О.А. ФУГА, Д.Р. НИФОНТОВ, Н.А. КУДРЯШОВ
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ САСА-САТСУМЫ

Рассмотрено обобщённое уравнение Саса-Сатсумы. Исследуемое уравнение является обобщением нелинейного уравнения Шрёдингера. Обобщённое уравнение Саса-Сатсумы учитывает сложные нелинейные эффекты при описании процесса распространения импульса в нелинейно-оптических средах. Построены законы сохранения и получены соответствующие первые интегралы для изучаемого уравнения. Найдены некоторые точные решения обобщённого уравнения Саса-Сатсумы.

O.A. FUGA, D.R. NIFONTOV, N.A. KUDRYASHOV
National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia

CONSERVATION LAWS, FIRST INTEGRALS AND EXACT SOLUTIONS FOR THE GENERALIZED SASA-SATSUMA EQUATION

The generalized Sasa-Satsuma equation is considered. The studied equation is a generalization of the nonlinear Schrödinger equation. The generalized Sasa-Satsuma equation takes into account complex nonlinear effects when describing the process of pulse propagation in nonlinear optical media. Conservation laws are constructed and the corresponding first integrals are obtained for the studied equation. Some exact solutions of the generalized Sasa-Satsuma equation are found.

Рассматривается обобщённое уравнение Саса-Сатсумы[1,2] с произвольным значением коэффициента отражения

$$iq_t + aq_{xx} + bq|q|^{2n} + i(\alpha q_{xxx} + \beta q_x|q|^{2n} + \delta q(|q|^{2n})_x) = 0$$

Решение этого уравнения не находится с помощью метода обратной задачи рассеяния, но оно имеет законы сохранения – важнейшие характеристики нелинейных эволюционных уравнений.

Три закона сохранения выражаются функциями.

$$1)\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0, \ \text{где } T_1 \text{ и } X_1 \text{ равны:}$$

$$T_1 = i|q|^2$$

$$X_1 = a(q^* q_x + q_x^* q) + i\alpha(q_{xx}q^* + q_{xx}^* q - |q_x|^2) + \frac{i}{n+1}(\beta + 2\delta n)|q|^{2n+2} \tag{1}$$

$$2)\ \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial X_2}{\partial x} = 0, \ \text{где } \delta = 0, \text{а } T_2 \text{ и } X_2 \text{ равны:}$$

$$T_2 = \frac{i}{2}(q_x^* q - q^* q_x)$$

$$X_2 = \frac{i}{2}(q^* q_t - q_t^* q) + a|q_x|^2 + \frac{b}{n+1}|q|^{2n+2} + i\alpha(q_{xx}q_x^* - q_{xx}^* q_x) \tag{2}$$

$$3)\ \frac{\partial T_3}{\partial t} + \frac{\partial X_3}{\partial x} = 0, \ \text{где } \delta = 0, \text{а } T_3 \text{ и } X_3 \text{ равны:}$$

$$T_3 = -a|q_x|^2 + \frac{b}{n+1}|q|^{2n+2} + \frac{i\alpha}{2}(q_{xx}^* q_x - q_{xx}q_x^*) + \frac{i\beta}{2(n+1)^2}((q^*)^{n+1}(q^{n+1})_x - ((q^*)^{n+1})_x q^{n+1})$$

$$X_3 = a(q_x q_t^* + q_x^* q_t) + i\alpha(q_{xx}q_t^* - q_{xx}^* q_t) + \frac{i\alpha}{2}(q_{xt}q_x^* - q_{xt}^* q_x) + \frac{i\beta}{2(n+1)^2}(((q^*)^{n+1})_t q^{n+1} - (q^{n+1})_t (q^*)^{n+1}) \tag{3}$$

Используя (1), (2), (3), вычисляются первые интегралы, которые могут быть использованы для дальнейшего анализа уравнения и поиска точных решений.

Также было найдено точное решение при n = 0:

$$q = \int \frac{iCq + e^{iCz}}{\sqrt{-\frac{a - 2\alpha + b}{\alpha}\left(\frac{q}{e^{iCz}}\right)^2 - \frac{I_1}{\alpha}}}dz \ , \text{где } q = q(z), z = x - C_0 t \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект государственного задания № FSWU-2023-0031).

Список литературы

1. Kivshar Y. S., Agrawal G. P., Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals, Academic Press, 2003.
2. Sasa, N., Satsuma, J.: New-type of soliton solutions for a higher-order nonlinear Schrödinger equation. J. Phys. Soc. Jpn. 60, 409–417 (1991).
3. Kudryashov, Nikolay A., Conservation laws and Hamiltonian of the nonlinear Schrodinger equation of the fourth order with arbitrary refractive index, 2023, Optik, 286, 10.1016/j.ijleo.2023.170993.