

339.1
В 85

98

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ ЯДРА

(КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ)

Ю. А. СИМОНОВ, Е. Л. СУРКОВ

КВАНТОМЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРЕХ И БОЛЕЕ ЧАСТИЦ

МОСКВА — 1971

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий курс состоит из четырех лекций:

Лекция I. Задача трех тел в квантовой механике.

Метод гиперсферических функций.

Лекция II. Метод K - гармоник в задаче четырех тел. Групповая структура волновых функций четырех и более тел.

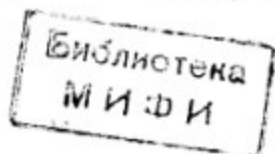
Лекция III. Некоторые точные результаты, относящиеся к системам нескольких частиц.

Лекция IV. Проблема насыщения ядерных сил.

Вторая лекция написана Е.Л.Сурковым. Основная идея всего курса состоит в следующем. Мы предполагаем, как и всегда в ядерной физике, что взаимодействие между частицами можно описать с помощью потенциала, для простоты выбранного в форме парного потенциала. Тогда мы можем использовать уравнение Шредингера для описания системы нескольких взаимодействующих частиц, и задача оказывается поставленной корректно с математической и физической точки зрения. Возникает вопрос: как далеко мы можем продвинуться в исследовании общих свойств решений и собственных значений энергии не делая никаких модельных приближений, столь обычных в ядерной физике, точность которых трудно проконтролировать? По этому вопросу существует уже весьма обширная литература и мы могли поэтому рассказать лишь о немногих методах. Первые две лекции посвящены так называемому методу K - гармоник. С точки зрения строгой теории его достоинства состоят в трех пунктах:

I) дается полная система функций, обладающая хорошей сходимостью, и позволяющая поэтому приблизиться к точному

562342,



результату сколь угодно близко;

2) в каждом данном приближении, когда число используемых функций ограничено, все собственные значения суть строгие верхние пределы для точных значений;

3) построенная система обладает ясной групповой структурой, которая сохраняется у полного решения точно для некоторого класса потенциалов и приближенно для потенциалов общего вида (достаточно быстро спадающих на бесконечности).

С точки зрения физического содержания метод интересен тем, что он рассматривает систему частиц с сугубо коллективной точки зрения и выделяет коллективные степени свободы, в то же время опираясь на реальное двухчастичное взаимодействие и не вводя никаких феноменологических параметров. Поэтому он представляет собой прямую противоположность методу независимых частиц, воплощая в какой то степени старое представление Н.Бора о ядре как о системе сильносвязанных частиц. Сравнение результатов настоящего метода с оболочечными методами поэтому оказывается особенно поучительным (этот вопрос рассматривается в лекциях А.И.Бази).

Третья лекция посвящена вопросам существования связанных состояний в системе N частиц и строгих границ на энергии уровней сверху и снизу, полученных как в методе K - кармоник, так и в других недавно предложенных методах.

Зная верхние и нижние границы, мы можем судить о точности разных приближенных методов и модельных расчетов, что и демонстрируется на многочисленных примерах в конце лекции. Подчеркнем еще раз, что в ядерной физике, насыщенной в настоящее время модельными расчетами и феноменологическими подгонками, очень важно иметь строгие, не зависящие от моде-

лей, критерии точности. Методы, представленные в третьей лекции, еще только начинают развиваться.

Наконец, четвертая лекция охватывает материал, полученный в самое последнее время и еще малоизвестный широкому кругу физиков. В ней рассматриваются строгие теоремы, относящиеся к насыщению ядерных сил и заменяющие старые результаты Финберга, Брейта и Вигнера, имевшие нестрогий характер и неприменимые к сложной форме ядерных сил, которая стала нам теперь известна. Конкретно исследуется целый ряд потенциалов, использующихся в ядерной физике в настоящее время. Важный вопрос об условном насыщении ядерных сил, т.е. о зависимости энергии связи от A до реальных $A \lesssim 300$ иллюстрируется численными расчетами. Наконец, излагаются точные результаты для гравитационных сил, чтобы продемонстрировать, как из уравнения Шриденгера и потенциала Ньютона можно предсказать свойства макроскопических систем, в том числе карликов и гигантских звезд. На этом примере мы видим, что не делая модельных приближений и не вводя полуфеноменологических теорий мы можем продвинуться очень далеко.

К сожалению, в лекцию не вошло большое количество материала, в котором строгие методы применяются к уравнениям Фадеева и Фадеева - Якубовского. Поэтому здесь ничего не говорится о кластерных образованиях и кластерной структуре волновой функции. Имеются и другие весьма интересные методы, которые не могли быть здесь освещены за недостатком места.

ЛЕКЦИЯ I

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

I. Квантовые числа в системе трех тел. Вращения, перестановки, выбор независимых переменных. Системы угловых функций, обладающих свойством полноты и ортонормированности.

Рассмотрим систему трех частиц и пусть их массы для простоты одинаковы. (Все дальнейшее рассмотрение легкообобщается на случай неравных масс). Наша конечная цель — ввести удобные переменные и построить полную систему функций, зависящих от всех переменных, кроме одной. Тогда полная волновая функция раскладывается по этой системе с коэффициентами, зависящими от последней переменной. Система функций, которую мы в дальнейшем будем называть угловыми функциями, близко связана с решениями свободного уравнения Шредингера для трех частиц. Поэтому мы рассмотрим квантовые числа, определяющие систему трех свободных частиц; эти же квантовые числа будут нумеровать систему угловых функций. При включении взаимодействия часть квантовых чисел перестает сохраняться, но если мы удачно выберем квантовые числа до включения взаимодействия (а выбрать их, как будет видно ниже, можно по-разному), то с учетом взаимодействия они будут приблизительно сохраняться и нарушение их будет мало. Не нужно думать, что исходя из свободного уравнения для трех частиц мы можем повторить схему, по сути трактующую взаимодействие по теории возмущений — ниже мы увидим, что построенная система функций наиболее удобна для описания сильно связанных коллективов частиц, локализо-

ванных в небольшой области пространства. В этом смысле ситуация схожа со случаем двух частиц: когда мы раскладываем волновую функцию по угловым функциям, являющимся решением свободной задачи, мы несколько не причастны к использованию теории возмущений к точному решению задачи. Точно также и в случае трех тел: разложение по угловым функциям, которые мы ниже построим, для некоторых классов потенциалов приводит к точным решениям, если ограничиться всего лишь одним членом; в общем случае любого потенциала получится сходящийся ряд.

Пусть координаты трех частиц равны $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Избавимся от движения центра масс, для чего введем координаты Якоби

$$\begin{aligned}\vec{\xi} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} - \vec{r}_3 \right) \\ \vec{\eta} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R} &= \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}\end{aligned}\quad (1)$$

Координаты $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ выбраны таким образом, что оператор кинетической энергии приобретает вид:

$$\begin{aligned}T &= -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_1^2} - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_2^2} - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_3^2} = \\ &= -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{\xi}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{\eta}^2} \right) - \frac{1}{6m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{R}^2}\end{aligned}\quad (2)$$

После отделения движения центра тяжести уравнение Шредингера становится таким:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{\xi}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{\eta}^2} \right) \Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + V_{1,2,3}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta}) &= \\ &= E \Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta}).\end{aligned}\quad (3)$$

где потенциальная энергия может состоять как из двухчастичных, так и трехчастичных взаимодействий:

$$V_{123}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_{12}(\vec{r}_{12}) + V_{13}(\vec{r}_{13}) + V_{23}(\vec{r}_{23}) + V^{(3)}(\vec{r}_{12}, \vec{r}_{13}, \vec{r}_{23}) \quad (4)$$

Парные расстояния выражаются через $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{12} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \sqrt{2} \vec{\eta} \\ \vec{r}_{13} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \vec{\xi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\eta} \\ \vec{r}_{23} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \vec{\xi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\eta} \end{aligned} \quad \vec{r}_{12} + \vec{r}_{31} + \vec{r}_{23} = 0 \quad (5)$$

Займемся теперь квантовыми числами для свободной системы 3-х тел. Если V_{123} в (3) равна нулю, то решение можно выбрать в виде $\exp\{i\vec{p}_3\vec{\xi} + i\vec{p}_\eta\vec{\eta}\}$ и мы видим, что шесть чисел $\vec{p}_\eta, \vec{p}_\xi$ образуют полный набор квантовых чисел. Переходя к любой другой системе решений число квантовых чисел, разумеется, меняться не будет. Вместо $\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta$ лучше выбрать энергию $E = \frac{1}{2m}(\vec{p}_\xi^2 + \vec{p}_\eta^2)$, которая в любом наборе будет сохраняющимся квантовым числом, и какие-нибудь другие пять переменных, например $\frac{\vec{p}_3}{\sqrt{2mE}}, \frac{\vec{p}_\eta}{\sqrt{2mE}}$

Перейдем теперь к другим типам квантовых чисел, которые включали бы момент количества движения частиц.

Здесь возникает важное свойство системы частиц, когда число частиц больше двух. Для двух частиц момент определяется просто: $\vec{L}_{12} = \frac{\hbar}{i}[\vec{r}_{12} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_{12}}]$. Для трех частиц мы тоже можем определить три относительных момента:

$$\vec{L}_{12} = \frac{\hbar}{i}[\vec{r}_{12} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_{12}}]; \quad \vec{L}_{13} = \frac{\hbar}{i}[\vec{r}_{13} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_{13}}]; \quad \vec{L}_{23} = \frac{\hbar}{i}[\vec{r}_{23} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_{23}}] \quad (6)$$

и полный момент

$$\bar{L} = \bar{l}_{12} + \bar{l}_{13} + \bar{l}_{23} \quad (7)$$

который сохраняется.

Основным недостатком моментов является их следующее свойство:

Утверждение 1. Моменты $\bar{l}_{ik}$ и их отдельные компоненты не коммутируют друг с другом.

Для доказательства нужно выразить координаты $\bar{r}_{ik}$ в (6) через $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ и явным образом прокоммутировать.

Следствие: не существует физического состояния, в котором $\bar{l}_{ik}$ имели бы одновременно определенные значения, кроме, может быть, состояния, в котором все $\bar{l}_{ik} = 0$.

Ниче мы построим такое состояние, а пока построим правильные моменты, коммутирующие друг с другом.

Утверждение 2. Моменты $\bar{l}_z$ и $\bar{l}_\eta$:

$$\bar{l}_z = \frac{\hbar}{i} \left[\bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right], \quad \bar{l}_\eta = \frac{\hbar}{i} \left[\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right] \quad (8)$$

коммутируют друг с другом и потому физическое состояние можно классифицировать по значениям $\bar{l}_z$, $\bar{l}_\eta$ и их проекции m_z , m_η . Далее, справедливо равенство:

$$\bar{L} = \bar{l}_z + \bar{l}_\eta \quad (9)$$

Доказательство утверждения основано на непосредственных вычислениях и проводится весьма просто.

Теперь напрашивается новый выбор квантовых чисел: E , $\bar{l}_z$, $\bar{l}_\eta$, m_z , m_η . Но их только пять и нам еще нужно найти шестое квантовое число. Для этого вернемся вначале к

следствии из Утверждения I и построим явно такое состояние, в котором все ψ_{ik} одновременно равны нулю.

Определим глобальный радиус трех частиц:

$$\rho^2 = \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2 = \frac{1}{3}[(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2 + (\bar{r}_1 - \bar{r}_3)^2 + (\bar{r}_2 - \bar{r}_3)^2] = (\bar{r}_1 - \bar{\rho})^2 + (\bar{r}_2 - \bar{\rho})^2 + (\bar{r}_3 - \bar{\rho})^2 \quad (10)$$

Утверждение 3. Состояние, в котором все ψ_{ik} одновременно равны нулю, всегда записывается в виде $\Psi(\rho)$, где Ψ произвольная функция.

Доказательство производится следующим образом. Для ψ_{12} это очевидно из записи (10) и соотношения между $\bar{r}_2$ и $\bar{\eta}$ (5). Для любого другого ψ_{ik} мы замечаем, что ρ симметрично относительно перестановок индексов частиц и потому мы всегда можем заменить нумерацию так, чтобы $\bar{\eta}$ соответствовало бы данному ψ_{ik} . Остальная часть утверждения, а именно, что любая функция с $\psi_{ik} = 0$ записывается в виде $\Psi(\rho)$ будет очевидна, когда мы построим полную систему функций и увидим, что все остальные функции дают хотя бы для одного ψ_{ik} собственное значение, отличное от нуля.

Итак, поняв важность ρ , выберем его в качестве одного из переменных. Другие переменные пусть будут такие:

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{\eta}}{\eta} = (\nu_1, \varphi_1); \quad \bar{n}_3 = \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = (\nu_2, \varphi_2); \quad \cos \theta = \frac{\rho}{r} \quad (11)$$

Решение свободного уравнения Шредингера (3) будем искать в виде:

(12)

$$\Psi(\rho, \theta, \nu_1, \varphi_1, \nu_2, \varphi_2) = Y_{\ell_1 m_1}(\nu_1, \varphi_1) Y_{\ell_2 m_2}(\nu_2, \varphi_2) \Psi(\rho, \theta)$$

где Y_{lm} - обыкновенные сферические функции.

Для $\Psi(\rho, \theta)$ получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 2\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) - \right. \\ & \left. - \frac{l_2(l_2+1)}{\rho^2 \cos^2 \theta} - \frac{l_3(l_3+1)}{\rho^2 \sin^2 \theta} \right\} \Psi = E \Psi \end{aligned} \quad (13)$$

Это уравнение допускает разделение переменных ρ и θ .

Для дальнейшего нам будут нужны только решения уравнения Лапласа, т.е. уравнения (13) с $E = 0$. Такое уравнение имеет решение вида:

$$\Psi(\rho, \theta) = \rho^k w(\theta) \quad (14)$$

и для $w(\theta)$ получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\sin^2 2\theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^2 2\theta \frac{d}{d\theta}) - \frac{l_2(l_2+1)}{\cos^2 \theta} - \frac{l_3(l_3+1)}{\sin^2 \theta} + \right. \\ & \left. + K(K+4) \right] w(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Решение уравнения (15), регулярное при $\theta = 0$, имеет вид:

$$w(\theta) = \sin^{l_1} \theta \cos^{l_2} \theta F\left(\frac{l_2+l_3-K}{2}, \frac{l_2+l_3+K+4}{2}, l_1+\frac{3}{2}, \sin^2 \theta\right) \quad (16)$$

Чтобы решение было еще регулярным и при $\theta = \frac{\pi}{2}$, нужно, чтобы ряд обрывался, т.е.

$$K = l_3 + l_2 + 2n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Итак, мы получим недостающие квантовое число, это K , принимающее всегда целые положительные значения, большие чем

$l_3 + l_2$ (и той же четности). Полная совокупность квантовых чисел теперь выглядит так:

$$E, K, \ell_\eta, m_\eta, \ell_\xi, m_\xi. \quad (18)$$

а соответствующие решения для $E = 0$ имеет вид (12), (14), (16). Для $E > 0$ решение получается заменой

$$\rho \rightarrow \frac{\mathcal{I}_{K+2}(\sqrt{2mE}\rho)}{2mE\rho^2} \quad (19)$$

Вместо квантовых чисел (18) мы можем еще взять другой набор, с выделением полным моментом L и его проекцией M :

$$E, K, L, M, \ell_2, \ell_\xi \quad (20)$$

Соответствующие волновые функции получаются из предыдущих заменой:

$$\Upsilon_{\ell_\eta m_\eta} \Upsilon_{\ell_\xi m_\xi} \rightarrow \sum_{m_\eta} \begin{pmatrix} \ell_\eta & \ell_\xi & L \\ m_\eta & M-m_\eta & M \end{pmatrix} \Upsilon_{\ell_\eta m_\eta} \Upsilon_{\ell_\xi m_\xi} \quad (21)$$

Рассмотренные выше наборы квантовых чисел и соответствующие решения были исследованы в ряде работ [1]. Отметим, что они могут быть легко получены с помощью правил, сформулированных в более общем случае в [2].

Мы можем раскладывать решение полного уравнения Шредингера с взаимодействием по системе функций, отвечающей (18) или (20). При этом возникает, однако, следующее неудобство. В задаче о взаимодействии трех нуклонов, например, волновая функция должна обладать определенной симметрией относительно перестановок. С функцией вида (16) этого трудно достичь, потому что она очень сложно преобразуется под действием перестановок. Нужны другие переменные. Обратимся к перестановкам, меняющим индексы частиц у координат, например $P_{13} \vec{r}_1 = \vec{r}_3$.

Их действие на $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ таково:

$$P_{12} \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ -\vec{\eta} \end{pmatrix}; \quad P_{13} \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}$$

$$P_{23} \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Таким образом, перестановки вращают в пространстве $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$; обычные вращения вращают $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ по отдельности и для построения симметрии, нужно работать в шестимерном пространстве векторов $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ и строить соответствующие представления группы вращений шестимерного пространства O_6 . Выше и были построены такие представления, соответствующие одному разбиению. Учет условий симметрии требует введения другого разбиения.

Введем два вектора:

$$\vec{Z} = \vec{\xi} + i\vec{\eta}; \quad \vec{Z}^* = \vec{\xi} - i\vec{\eta} \quad (23)$$

Они обладают весьма простыми свойствами относительно перестановок:

$$P_{12} \vec{Z} = \vec{Z}^*; \quad P_{13} \vec{Z} = \vec{Z}^* e^{-i\frac{2\pi}{3}}; \quad P_{23} \vec{Z} = \vec{Z} e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad (24)$$

Преобразования для $\vec{Z}^*$ получаются с помощью комплексного сопряжения. Волновая функция (12), как можно увидеть, есть полином, составленный из компонент $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$, степень которого равна K . Поскольку $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ сложно преобразуются при перестановках, то и функция (12), хотя и полином, преобразуется тем не менее сложно. Теперь же напрашивается способ, как построить функцию, преобразующуюся просто при пере-

становке - это построить полином из $\vec{z}$ и $\vec{z}^*$, который должен удовлетворять поперечному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{z} \partial \vec{z}^*} \mathcal{P}_K(\vec{z}, \vec{z}^*) = 0 \quad (25)$$

Оператор момента выражается весьма просто:

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i} \left[\vec{z} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right] + \frac{\hbar}{i} \left[\vec{z}^* \frac{\partial}{\partial \vec{z}^*} \right] \quad (26)$$

Ясно, что для сохранения простых перестановочных свойств нужно фиксировать разность степеней $\vec{z}$ и $\vec{z}^*$ в полиноме (25). Поэтому мы введем оператор, собственное значение которого будет нам давать новое квантовое число :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \left(\vec{z} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} - \vec{z}^* \frac{\partial}{\partial \vec{z}^*} \right) \quad (27)$$

Мы нашли уже пять квантовых чисел, определяющих решение свободного уравнения Шредингера: $E, \hat{L}, M, K, V$. Шестой оператор находится из того условия, чтобы он коммутировал со всеми предыдущими. Его выражение оказывается следующим: (А.М.Бадальян, Ю.А.Симонов (не опубликовано), *G. Racah, Rev Mod. Phys.* 21, 494 (1959

$$\hat{\Omega} = \mathcal{L}_i \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_k} - z_k^* \frac{\partial}{\partial z_i^*} \right) \mathcal{L}_k \quad (28)$$

Итак, шесть квантовых чисел, характеризующих решение уравнения Шредингера и обладающих простыми перестановочными свойствами (а именно, E, L^2, M, K перестановочно инварианты, а V и Ω меняют знак при любой перестановке) суть следующие:

$$E, L^2, M, K, V, \Omega \quad (29)$$

Набор (29) заменяет набор (18) или (20). По сравнению с (20) меняются только два квантовые числа $l_1, l_2 \leftrightarrow V, \Omega$. Ясно, что оба набора функций должны быть связаны ортогональным преобразованием.

Нам осталось построить угловые функции, отвечающие квантовым числам (29). Наиболее простым случаем здесь является

$L^2 = 0$; тогда $M = 0$ и $\Omega = 0$, для нахождения угловых функций нужно положить $E = 0$ и мы имеем всего два квантовых числа V, K . Можно непосредственно искать решение (25) в виде полинома с неизвестными коэффициентами [3]. Мы воспользуемся другой процедурой, более близкой к работе [4].

Введем переменные A и λ :

$$\vec{Z}^2 \vec{Z}^{*2} = \rho^4 A^2; \quad \vec{Z}^2 = -\rho^2 A e^{-i\lambda} \quad (30)$$

Их перестановочные свойства весьма просты:

$$P_{12}A = A; \quad P_{12}\lambda = -\lambda; \quad P_{13}\lambda = -\lambda + \frac{4\pi}{3}; \quad P_{23}\lambda = -\lambda - \frac{4\pi}{3} \quad (31)$$

Уравнение (25) в этих переменных принимает вид:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^4} \left[4(1-A^2) \frac{\partial^2}{\partial A^2} + \frac{4(1-3A^2)}{A} \frac{\partial}{\partial A} + \frac{4}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] \right\} P_K(\rho, A, \lambda) = 0 \quad (32)$$

Регулярное решение уравнения (32) имеет следующий вид:

$$P_K(\rho, A, \lambda) = \rho^n (c_1 \cos \lambda V + c_2 \sin \lambda V) A^{(V)} F\left(\frac{K}{V} + \frac{|V|}{2} + 1, -\frac{K}{V} + \frac{|V|}{2}, 1 + |V|/A^2\right) \quad (33)$$

Из условия цикличности V следует выбрать целым n и его достаточно взять натуральным $V = 0, 1, 2, \dots$

Чтобы решение (33) не имело особенностей при $\lambda = 1$, нужно чтобы ряд обрывался, т.е.

$$-\frac{\kappa}{4} + \frac{|\nu|}{2} - n = 0, -1, -2, \dots \quad (34)$$

Отсюда следует, что ν есть четное неотрицательное число, и $\nu = \frac{\kappa}{2}; \frac{\kappa}{2} - 2, \dots, 0$ или 1 если $\frac{\kappa}{2}$ четное или нечетное соответственно. Итак, два решения запишем в виде:

$$u_{\kappa}^{\nu} = \text{const } p^{\kappa} \cos \lambda \nu A^{\nu} P_{\frac{\kappa}{2} - \frac{\nu}{2}}^{\nu, 0} (1 - 2A^2)$$

$$w_{\kappa}^{\nu} = \text{const } p^{\kappa} \sin \lambda \nu A^{\nu} P_{\frac{\kappa}{2} - \frac{\nu}{2}}^{\nu, 0} (1 - 2A^2) \quad (35)$$

$$\text{где } P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \text{ есть полином Якоби.} \quad (36)$$

Решения (35) и (36) соответственно четное и нечетное по отношению к перестановке P_{12} . Кроме того, из свойств (31) следует, что для $\nu = 3n$ u_{κ}^{ν} симметричная, а w_{κ}^{ν} антисимметричная функция. Для остальных ν они образуют (с точностью до множителя) двумерное представление группы перестановок (которое характеризуется матрицами (22)). Мы имеем теперь почти все, что мы хотели: а именно, систему функций для трех частиц при $L = 0$, которая

- а) является решением уравнения Лапласа, а потому образует полный набор;
- б) имеет очень простые свойства по отношению к перестановкам.

Нам нужно теперь отделить угловую часть функций (35), (36), т.е. просто отбросить множитель p^{κ} и отнормировать функции. Записывая элемент объема в виде:

$$d\vec{\xi} d\vec{\eta} = p^5 dp d\Omega_c \quad (37)$$

а элемент шестимерной сферы, проинтегрированный по всем переменным, кроме A и λ есть:

$$d\Omega_6 = \pi^2 A dA d\lambda \quad (38)$$

Область изменения переменных A и λ есть $[0,1]$ и $[0, \frac{\pi}{2}]$ соответственно. Условие нормировки принимает вид:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_K^{\nu}(A, \lambda) u_{K'}^{\nu'}(A, \lambda) \pi^2 A dA d\lambda = \delta_{KK'} \delta_{\nu\nu'} \quad (39)$$

Функции, удовлетворяющие нормировочным условиям и составляющие пары, преобразующиеся по двумерным представлениям группы перестановок, такие:

$$u_K^{\nu} = \sqrt{\frac{K+2}{\pi^3}} \cos \lambda \cdot A^{\nu} \cdot P_{\frac{K}{2}-\frac{\nu}{2}}^{(\nu, 0)}(1-2A^2) \cdot \begin{cases} 1 & \nu \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \nu = 0 \end{cases} \quad (40)$$

$$w_K^{\nu} = \sqrt{\frac{K+2}{\pi^3}} \sin \lambda \cdot A^{\nu} \cdot P_{\frac{K}{2}-\frac{\nu}{2}}^{(\nu, 0)}(1-2A^2) \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi\nu}{3} \quad (41)$$

Полное число полиномов с $L = 0$ для данного K равно $\frac{K}{2} + 1$.

Ниже в таблице даны числа полиномов с разной симметрией для $K \leq 12$:

	Двумерные	Симметр.	Антисимметр.	Полное число функций
0	0	1	0	1
2	2	0	0	2
4	2	1	0	3
6	2	1	1	4
8	4	1	0	5
10	4	1	1	6
12	4	2	1	7

Здесь мы видим, что симметричные функции возникают для $K = 0$, а следующая только для $K = 4$ — обстоятельство весьма важное в дальнейшем. Второе — вплоть до $K = 12$ имеется только одна симметричная функция, так что значок γ для них не существует. Третье — антисимметричные функции начинаются с $K = 6$, что определит в дальнейшем их малосущественную роль.

В переменных ρ, ξ, η первые функции можно записать так:

$$\begin{aligned} u_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}; & u_2^1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \cdot \frac{\eta^2 - \xi^2}{\rho^2}, \\ w_2^1 &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3}} \cdot \frac{\xi \eta}{\rho^2}; & u_4^0 &= \sqrt{\frac{3}{\pi^3}} \left[1 - 2 \left(\frac{\eta^2 - \xi^2}{\rho^2} \right)^2 - \gamma \left(\frac{\xi \eta}{\rho^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (42)$$

Для $L \neq 0$ можно принять следующую процедуру построения полиномов [5]. Поскольку каждая производная $\frac{\partial}{\partial \vec{z}}; \frac{\partial}{\partial \vec{z}^*}$ представляет собой вектор, просто преобразующийся при перестановках и коммутирующий с лапласианом, то достаточно подействовать тензором, составленным из $\frac{\partial}{\partial \vec{z}} \equiv \partial$ и $\frac{\partial}{\partial \vec{z}^*} \equiv \partial^*$ на гармонический полином с $L = 0$ (формулы (35) и (36)), и мы получим гармонический полином с фиксированным L . Т.е. в общем случае запишем:

$$\partial^{LMV}(\partial, \partial^*) P_{K_0}^{\nu s}(\rho, A, \lambda) = P_{K=L, M, L, \nu}(\vec{z}, \vec{z}^*) \quad (43)$$

Неудобство такой процедуры состоит в том, что получающиеся полиномы не будут, вообще говоря, отвечать определенному значению Ω . Однако практически вырождение по квантовому числу Ω возникает лишь для больших K или боль-

ших L , так что, например, для $L = 1$ система функций свободна от этой трудности, так же как и для $L = 2$, $K < 4$. Другие подходы, которые были либо более сложными и не могли дать полиномы для произвольных K (Zichendracht [1]), либо методы, развиваемые в последнее время Смородинским и сотрудниками [6] пока также не смогли преодолеть трудности с квантовым числом Ω , хотя в [6] получено немало интересных результатов.

Приведем, для иллюстрации, полиномы с $L = 1$ и отрицательной четностью. В соответствии с (43) они получаются, если продифференцировать один раз по $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (или $\frac{\partial}{\partial z^*}$) полиномы (35) и (36). В результате получим такие (уже отнормированные) полиномы:

$$U_K^{\varepsilon + \frac{1}{2}} = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{K+2\varepsilon+3}{\pi^3} \right]^{1/2} \left\{ \frac{z_M}{\rho} H_n^{(\varepsilon, 1)} - \frac{z_n^*}{\rho} H_{n-1}^{(\varepsilon+1, 1)} \right\} \quad (44)$$

Здесь $\varepsilon = -\frac{K-1}{2}; -\frac{K-1}{2}+2, \dots, \frac{K-1}{2}$ K - нечетное, $\varepsilon + \frac{1}{2}$ равно соб. зн. $\hat{y}$, z_M есть сферическая проекция вектора $\vec{z}$ (то же для $\vec{z}^*$):

$$\begin{aligned} z_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (z_x + i z_y) \\ z_0 &= z_z \\ z_- &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (z_x - i z_y) \end{aligned} \quad n = \frac{1}{2} \left(\frac{K-L}{2} - \varepsilon \right) \quad (45)$$

Функция H_n определена следующим образом:

$$H_{n-s}^{(\alpha, \beta)} = e^{-i\alpha A} A^\kappa P_{n-s}^{(\alpha, \beta)}(1-2A^2), \quad H_{n-s}^{(\alpha, \beta)} \equiv 0 \quad \text{для } n-s \leq 0 \quad (46)$$

Ясно, что при $K = 1$ имеются только два полинома: $\vec{z}^*$ и $\vec{z}$

Аналогично получаются полиномы для $L > 1$, а также псевдополиномы, т.е. полиномы с четностью $(-1)^{L+1}$: они пропорциональны векторному произведению $[\vec{z} \times \vec{z}^*]$, которое в свою очередь представляет собой антисимметричный полином наименьшей степени.

Приведем для примера еще гармонический полином наименьшей степени для $L = 2$, т.е. с $K = 2$. Их всего три. Симметричный ($L = 2, M = m+m'; \nu = 0$):

$$P_0(z, z^*) = \frac{1}{2}(z_m z_m^* + \bar{z}_m^* \bar{z}_m) - \frac{1}{3} g m m' (\vec{z} \cdot \vec{z}^*) \quad (47)$$

Несимметричные: $L = 2, M = m+m', \nu = 1$:

$$P_1 = z_m z_m' - \frac{1}{3} g m m' \vec{z}^2, \quad L=2; M=m+m'; \nu=-1 \quad (48)$$

$$P_{-1} = \bar{z}_m^* \bar{z}_m'^*, - \frac{1}{3} g m m' \vec{z}^{*2} \quad (49)$$

Здесь $g_{00} = -g_{-1-1} = g_{11} = 1; \quad g_{01} = g_{0-1} = 0$

Пользуясь свойствами (24) мы получаем, что $P_{12} P_1 = P_{-1}; \quad P_{13} P_1 = e^{-i \frac{4\pi}{3}} P_{-1}; \quad P_{23} P_1 = e^{i \frac{4\pi}{3}} P_{-1} \quad (50)$

Поэтому

$$P^- = \frac{i}{2}(P_1 - P_{-1}), \quad P^+ = \frac{1}{2}(P_1 + P_{-1}) \quad (51)$$

Образуют смешанное представление и преобразуются как $\vec{\eta}$ и $\vec{\xi}$ соответственно (см. (22)).

II. Сходимость разложения по системе угловых функций.

Конкретные примеры системы трех тел с парными потенциалами и вид волновых функций.

Рассмотрим теперь решение полного уравнения Шредингера (3) с потенциалами (4). Мы построили две системы функций, являющихся решениями уравнения Лапласа. Такие функции называются гиперсферическими. Чтобы отличить вторую систему, а именно функции (40) и (41) мы будем называть их K - гармониками. Выше уже говорилось, что их преимущество заключается в простых симметрических свойствах. Важным свойством любых гиперсферических функций, в том числе и K - гармоник, является их полнота, т.е. любую функцию, зависящую от пяти угловых переменных можно разложить по системе (40), (41) и записать в виде ряда. Мы сейчас разложим решение уравнения Шредингера (3), для чего предварительно введем удобное обозначение: $\omega_K^\nu \equiv u_K^\nu$, $\nu > 0$. Тогда запишем (для простоты рассмотрим решение уравнения Шредингера с $L = 0$)

$$\Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{K=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{\nu=-\frac{K}{2}, -\frac{K}{2}+2, \dots}^{\frac{K}{2}} u_K^\nu(\Omega) \frac{\chi_K^\nu(\rho)}{\rho^2} \quad (52)$$

суть угловые части гармонических полиномов, т.е. удовлетворяют уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{\xi}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{\eta}^2} \right) u_K^\nu = \frac{K(K+4)}{\rho^2} u_K^\nu \quad (53)$$

Подставляя разложение (52) в уравнение Шредингера (3) и пользуясь условием (53) и ортонормированностью u_K^ν , по-

лучаем систему уравнений [7]:

$$\frac{d^2 \chi_K^\nu}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\chi_K^\nu}{d\rho} - \left[\chi^2 + \frac{(\kappa+2)^2}{\rho^2} \right] \chi_K^\nu = \sum_{\kappa'=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{\nu_c=\frac{\kappa'}{2}}^{\frac{\kappa'}{2}} V_{\kappa\kappa'}^{\nu\nu'}(\rho) \chi_{\kappa'}^{\nu'}(\rho) \quad (54)$$

где

$$V_{\kappa\kappa'}^{\nu\nu'}(\rho) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int U_K^\nu V_{123}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) U_{\kappa'}^{\nu'} d\Omega_6 \quad (55)$$

$$\text{и } \chi^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}, \quad E < 0$$

Исследуем, прежде всего, свойства матричных элементов для потенциалов (55). Неудобство этого выражения заключается в том, что $d\Omega_6$ содержит два интегрирования по dA и $d\lambda$, тогда как парный потенциал зависит только от одной переменной.

Поэтому удобно ввести в рассмотрение гармонические функции, зависящие только от одной переменной $\cos \theta = \frac{\eta}{\rho}$. Из (53) легко получить, что такие функции суть полиномы Гегенбауэра $C_{\frac{\kappa}{2}}^1(\cos 2\theta)$ и поскольку они образуют полную систему для функций, зависящих от одной переменной, то можно написать:

$$U_{12}(z_{12}) \equiv U_{12}(\sqrt{1+\cos 2\theta} \rho) \sum_{\kappa=0,2,\dots} V_K^{(12)}(\rho) C_{\frac{\kappa}{2}}^1(\cos 2\theta) \quad (56)$$

Наоборот, можно выразить $V_K(\rho)$ через $U_{12}(z)$:

$$V_K^{(12)}(\rho) = \frac{2}{\hbar} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} C_{\frac{\kappa}{2}}^1(x) U_{12}(\rho\sqrt{1+x}) dx \quad (57)$$

Подобное разложение можно записать для $U_{13}(\vec{r}_{13})$ если заметить, что $\cos 2\theta = A \cos \lambda$

$$U_{13}(z_{13}) = \sum_{\kappa=0,2,\dots} U_{\kappa}^{(1)}(\rho) C_{\frac{\kappa}{2}}^1 \left[A \cos\left(\lambda - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (58)$$

Выражение для $U_{23}(z_{23})$ отличается заменой знака перед $\frac{2\pi}{3}$.
Для простоты ограничимся случаем одинаковых парных потенциалов и вычислим $U_{0\kappa}^{0\nu}(\rho)$, определяемое формулой (55):

$$U_{0\kappa}^{0\nu} = -\frac{4m}{\hbar^2} \frac{(-1)^{\frac{\kappa}{2}-\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\kappa+2}} U_{\kappa}(\rho) \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi\nu}{3}\right) \begin{cases} 1 & \nu=0 \\ 2^{-1/2} & \nu=1 \\ 0 & \nu=2 \end{cases} \quad (59)$$

Чтобы вычислить м.э. общего вида (55) нужно знать разложение

$$u_{\kappa}^{\nu}(\Omega) u_{\kappa'}^{\nu'}(\Omega) = \sum_{\bar{\kappa}, \bar{\nu}} c(\kappa, \nu, \kappa', \nu'; \bar{\kappa}, \bar{\nu}) u_{\bar{\kappa}}^{\bar{\nu}}(\Omega) \quad (60)$$

где коэффициенты c оказываются пропорциональными квадрату $3j$ -символов Вигнера, а сумма по $\bar{\kappa}$ в (60) идет от $\kappa - \kappa'$ до $\kappa + \kappa'$. Тогда

$$U_{\kappa\kappa'}^{\nu\nu'}(\rho) = \pi^{1/2} \sum_{\bar{\kappa}, \bar{\nu}} c(\kappa, \nu, \kappa', \nu'; \bar{\kappa}, \bar{\nu}) U_{\bar{\kappa}0}^{\bar{\nu}0} \quad (61)$$

а $U_{\bar{\kappa}0}^{\bar{\nu}0}$ определяется формулой (59).

Таким образом, свойства коэффициентов $U_{\kappa\kappa'}^{\nu\nu'}$ определяются целиком свойствами более простых величин $U_{\kappa}(\rho)$, которыми мы сейчас и займемся.

Пусть парный потенциал $V(z)$ разлагается в ряд вида:

$$V(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (62)$$

Тогда легко вычислить соответствующее разложение для $U_K(\rho)$ с помощью (57): ~~$U_K(\rho)$~~

$$U_K(\rho) = \frac{U_K^{(-1)}}{\rho} + U_K^{(0)} + U_K^{(1)}\rho + \dots + U_K^{(n)}\rho^n + \dots \quad (63)$$

Причем возникают два свойства:

а) при заданном n : $U_K^{(n)} \sim \frac{1}{K^{n+2}}$ для $K \rightarrow \infty$ (64)

б) постоянный член U_0 дает вклад только в $U_0(\rho)$

Теперь обратимся к области больших ρ . С помощью той же формулы (57) можно получить, что [7]:

$$U_K(\rho) \sim \frac{4\sqrt{2}}{\pi\rho^3} (-1)^{\frac{K}{2}} \left(\frac{K}{2} + 1\right) \int_0^\infty U(\tau) \tau^2 d\tau \quad (65)$$

Для получения общих оценок воспользуемся выражением:

$$C'_n(\cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$$

с помощью которого (57) можно переписать в виде:

$$U_K(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \sin\left[\left(\frac{K}{2} + 1\right)\varphi\right] U(\rho\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}) d\varphi \quad (66)$$

Отсюда видно, что $U_K(\rho)$ играет роль коэффициентов Фурье для функции $U(\tau)$; тогда, воспользовавшись теоремами Стокса для коэффициентов Фурье [8], получаем следующее свойство.

Для потенциалов $U(r)$, обладающих непрерывной n -ой производной, коэффициент $U_K(\rho)$ удовлетворяет неравенству:

$$|U_K(\rho)| \leq \frac{\text{const} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{n+2}}{\left(\frac{K}{2} + 1\right)^{n+2}} \quad (67)$$

где const не зависит ни от ρ , ни от K , а имеет величину порядка радиуса потенциала, $\text{const} \sim \bar{U}$, где $\bar{U}$ есть средняя величина потенциала.

Для потенциалов, которые имеют кулоновскую особенность при $r = 0$ или же разрывны (случай прямоугольной ямы), нужно в формуле (67) положить $n = -1$.

Рассмотрим теперь сходимость разложения (56) по K .

Если зафиксировать ρ , то при условии (67) с $n > 0$ разложение (56) сходится абсолютно и равномерно для всех θ (строго говоря, анализ показывает, что благодаря знакопеременности ряда равнопотенциала $U_K(\rho) \sim \frac{(-1)^K}{K+2}$ и потому ряд сходится равномерно и абсолютно всюду кроме $\theta = 0$ и π).

Пусть теперь ρ меняется. Как изменятся свойства сходимости ряда (56)? Условие (67) показывает, что эти свойства неравномерны по ρ . В самом деле, число членов K_0 , начиная с которого сумма $\sum_{K=K_0}^{K_0+\rho} U_K(\rho) C_{K/2}'(x)$ может быть сделана сколь угодно малой, зависит от ρ , а именно $K_0 \sim \frac{\rho}{a}$. Практически это означает, что для достаточно точной аппроксимации потенциала при заданном ρ нужно взять $K_0 \sim \frac{\rho}{a}$ членов суммы в разложении (56):

Сейчас мы уже в состоянии заняться вопросом о сходимости ряда (52) для волновой функции. Этот вопрос имеет большой практический интерес, так как нам нужно знать, сколько уравнений оставить в системе (54) при заданной точности - а это важно для численных расчетов. Рассмотрим энергию E E_B , где E_B отвечает энергии двухчастичного связанного состояния (E_B равно энергии связи дейтона в случае задачи трех нуклонов), тогда волновая функция трех частиц описывает связанное со-

стояние трех частиц и нормируема. Далее, поскольку она удовлетворяет уравнению Шредингера, она всюду конечна и непрерывна. Если потенциал есть гладкая функция, то непрерывна также и вторая производная $\Psi(\vec{r}, \vec{p})$ по любому аргументу; в общем случае 2-я производная ведет себя так же, как потенциал. Отсюда уже можно сделать вывод о том, что ряд для второй производной сходится так же как ряд для потенциала, а значит, коэффициенты ряда (52) должны содержать лишнее K^2 в знаменателе по сравнению с рядом по K - гармоникам для потенциала. Последнее утверждение следует из того, что двойное дифференцирование u_K^V , согласно (53), дает $K^2 u_K^V$. Ряд по K - гармоникам для $V(r; K)$ выглядит так:

$$V(r_{12}) + V(r_{13}) + V(r_{23}) = \frac{\hbar^2}{2m} \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{K, V} u_K^V(\Omega) V_{K0}^{V0} \quad (68)$$

Вспоминая выражение (59) и оценку (67) находим:

$$V_{K0}^{V0} \leq \frac{\bar{V} \left(\frac{p}{a}\right)^{n+2}}{\left(\frac{K}{2} + 1\right)^{n+5/2}} ; \quad K > \frac{p}{a} \quad (69)$$

Сопоставляя (68) и (52) тогда получаем

$$|x_K^V(p)| < \frac{\text{const}}{\left(\frac{K}{2} + 1\right)^{n+9/2}} ; \quad p \in [0, R] \quad (70)$$

Для потенциалов разрывных или с кулоновской особенностью в нуле следует заменить n на -1 . Возникает вопрос, для каких K начинается такое быстрое спадание (70). Более тщательный анализ [7] показывает, что оно происходит для $K > \max\left[2R, \frac{R}{a}\right]$, где R размеры области по p , на которой мы исследуем значение функции. Этот анализ осно-

выводится на интегральной форме уравнения Шредингера, а именно:

$$\chi_K^v(p) = \bar{I}_{K+2}(xp) K_{K+2}(xp) \int_0^\infty f_K(p, p') \Phi_K^v(p') p' dp' \quad (71)$$

где мы ввели обозначения:

$$\Phi_K^v(p) = \int u_K^v \Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta}) U_{123}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \frac{d\Omega_6}{p^2} \quad (72)$$

$$f_K(p, p') = \begin{cases} \frac{\bar{I}_{K+2}(xp')}{\bar{I}_{K+2}(xp)} ; & p' \leq p \\ \frac{K_{K+2}(xp')}{K_{K+2}(xp)} ; & p' \geq p \end{cases} \quad (73)$$

Из (71) и нормируемости функции $\Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ следует, кроме того, что каждая парциальная волна $\chi_K^v(p)$ экспоненциально убывает:

$$\chi_K^v(p) \sim e^{-xp} ; \quad p \gg \frac{\kappa}{x} ; \quad \kappa a \quad (74)$$

Отсюда и из (70) мы заключаем, что разложение для Ψ по K - гармоникам сходится всюду и равномерно по p . Однако вторая производная Ψ может сходиться так же неравномерно по p , как и потенциал.

Выше порога развала на дейтон и нуклон волновая функция трех частиц становится ненормируемой, т.к. она отвечает физической картине рассеяния. Однако по-прежнему мы можем использовать закон сходимости (70), поскольку при его выводе

нам не требовалось условия нормируемости или знание асимптотических свойств. Но этот закон, как и в случае потенциала имеет локальный смысл, а значения K_0 , начиная с которого он выполняется, растут с ρ . Такая же ситуация была и раньше, но если раньше $\cos \theta$ в (70) была пропорциональна $e^{-\alpha \rho}$ и обеспечивала равномерную сходимость по β , то теперь это уже не так. Сама $\psi(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ и парциальные гармоники $\chi_K^V(\rho)$ не убывают экспоненциально при $\rho \rightarrow \infty$ и потому ряд (52) сходится неравномерно по β . Можно еще сказать, что для ряда (52) ниже порога развала имеется и сильная и слабая и равномерная сходимость. Выше порога остается только свойство слабой сходимости, т.е. любой матричный элемент $(\psi(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \phi(\vec{\xi}, \vec{\eta}))$, где $\phi(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ - нормируемая функция, представляется сходящимся рядом по K - гармоникам $\sum_{K=0}^{K_0}$ и предел $K_0 \rightarrow \infty$ дает значение этого матричного элемента.

Итак, мы приходим к выводу, что в задаче о связанном состоянии системы трех тел достаточно рассмотреть некоторое конечное число гармоник, а именно:

$$K_0 \sim \left(\frac{R}{a} ; \alpha R \right) \quad (75)$$

где R - размеры системы, a - радиус действия сил. Иногда можно несколько ослабить критерий сходимости. А именно, для случая δ - функциональных сил в одном измерении, когда $q = 0$ согласно нашей оценке (75), должно быть существенно бесконечное число гармоник. Однако, как показывают расчеты [9], уже первая гармоника с $K = 0$ дает энергию трех частиц с точностью около 10%. Поэтому оценка (75) может оказаться завышенной, в особенности если мы интересуемся какими-то усред-

ненными свойствами системы, например, энергией связи.

Следовательно, в системе уравнений (54) нам достаточно оставить K_0 уравнений и решать их (вообще говоря, численно) на собственные значения. Какими свойствами обладает полученная "усеченная система"? Для ответа на этот вопрос нам надо прежде установить несколько свойств м.э. $V_{KK'}^{VV'}$, при выводе которых мы пользуемся (61).

Свойство I.

$$V_{KK}^{VV}(p) \approx V_{00}^{00}(p); \quad p < p_0 \sim a \quad (76)$$

Например:

$$V_{KK}^{00}(p) = V_{00}^{00}(p) + \frac{K(K+4)}{(K-2)(K+6)} \frac{\sqrt{5}}{4} V_{20}^{00}(p) + \dots \quad (77)$$

$V_{20}^{00}(p)$ имеет большую численную малость (см. (69)), например для прямоугольной ямы в области $p < 2a$, второй член составляет меньше 5% от первого, для Гаусса вклад около процента.

Свойство II. Недиagonalные м.э. малы по сравнению с diagonalными и для $|K-K'| \gg 1$ имеется оценка:

$$V_{KK'}^{VV'}(p) \sim V_{K-K',0}^{V-V',0} \sim \frac{V_{00}^{00}(p) \left(\frac{p}{a}\right)^{n+2}}{(|K-K'|+2)^{n+5/2}} \quad (78)$$

Даже при небольших $K-K' = 2,4$ недиагональные м.э. имеют численную малость по сравнению с diagonalными.

Например:

$$V_{K,K'+4}^{00}(p) = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{K+4}{\sqrt{(K+2)(K+6)}} V_{10}^{00}(p) + \dots \quad (79)$$

и $V_{\nu\nu}^{\infty}(p)$ по сравнению с $V_{\nu\nu}^{\infty}(p)$ в области p от $p=0$ до $p=p_0$, при котором $V_{\nu\nu}^{\infty}(p_0) \sim \frac{1}{10} V_{\nu\nu}^{\infty}(0)$ мало, а именно эта малость составляет менее 10% от $V_{\nu\nu}^{\infty}(p)$ при том же p для прямоугольной ямы и Гауссова потенциала.

Свойство III. Все м.э. $V_{\kappa\kappa'}^{\nu\nu'}(p) \sim \frac{\text{const}}{p^3}$; $p \gg \kappa a$; $\kappa' a$

В области малых p все диагональные м.э. имеют такое же разложение по степеням p , как парные потенциалы $V(r)$ по степеням r . У недиагональных м.э. в отличие от диагональных, отсутствует постоянный член, не зависящий от p .

Вооружившись этими свойствами, мы строим следующую приближенную схему. Для данных квантовых чисел системы трех частиц мы находим наименьшее $\kappa = \kappa_{min}$. Оно находится из условий: $\kappa_{min} \gg L$; четность системы равна $p = (-1)^{\kappa_{min}}$; кроме того, нужно удовлетворить условиям симметрии, которые связаны со спином и изоспином. Например, для трития и He^3 в основном состоянии $\kappa_{min} = 0$. Возбужденное состояние трития (если оно существует) с $L = 1$, $P = -1$ имеет $\kappa_{min} = 1$. Тринейтрон (если он существует) имеет $\kappa_{min} = 1$ [10]. В первом приближении решается одно уравнение (или система), в котором оставлены только диагональные члены с $\kappa = \kappa_{min}$, т.е. уравнение вида:

$$\left\{ \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{d}{dp} - \left[\chi^2 + \frac{(\kappa_{min} + 2)^2}{p^2} \right] + V_{\kappa_{min}\kappa_{min}}^{\nu\nu}(p) \right\} \chi_{\kappa_{min}}^{\nu}(p) = 0 \quad (80)$$

Оно имеет в точности вид обычного одномерного уравнения Шредингера, в котором вместо потенциала $V(r)$ стоит $V_{\kappa_{min}\kappa_{min}}^{\nu\nu}(p)$. Однако из свойств I-III мы знаем, что разница в поведении между двумя этими величинами невелика.

Вблизи начала координат их поведение просто совпадает, а при больших ρ $V_{KK}^{(w)}$ спадает, вообще говоря, медленнее чем $V(z)$. Однако "центробежный потенциал" $\frac{(K+2)^2}{\rho^2}$ спадает еще медленнее и потому играет основную роль при больших ρ . Таким образом, возникает задача на нахождение связанных состояний в потенциале $V_{KK}^{(w)}(\rho)$ с моментом $\ell = K + \frac{3}{2}$.

В следующем приближении мы должны присоединить следующее уравнение, соседнее по K и решать систему большего числа уравнений.

Проиллюстрируем сказанное на примере трития. Потенциалы выбирались в форме прямоугольных ям [11]. Одно уравнение с $K = 0$ дало $7,37 \leq |E_T^{(1)}| \leq 7,5$ ме В, два уравнения с $K = 0, K = 2$ дают $8,1 \leq |E_T^{(1)}| \leq 8,12$ ме В, три уравнения с $K = 0, 2, 4$ дают $8,4 \leq |E_T^{(1)}| \leq 8,43$ ме В.

Вклад в нормировочный интеграл функции с $K = 2$ составляет 1,28%, а функции с $K = 4$ - меньше процента.

Еще лучше сходимость в случае потенциала типа Гаусса [12] $E_T^{(1)} = -9,206$ ме В, $E_T^{(2)} = -9,606$ ме В, $E_T^{(3)} = -9,732$ ме В. В случае более сложной структуры потенциала, а именно если на малых расстояниях присутствует отталкивание, сходимость может несколько ухудшиться, что демонстрируется другим примером в работе [12].

Таким образом, мы получаем простой способ анализа волновой функции и вычислений для задачи трех тел, обладающий большой практической простотой.

Все свойства м.э. потенциалов и характер сходимости волновой функции могут быть перенесены без изменения на случай большего числа частиц. Главное изменение состоит в учете принципа Паули, которое приводит к большим значениям K_{min}

и потому разложение по K в сумме вида (52) начинается с $K = K_{min}$, а не с нуля. Значок $\vee$ также должен быть обобщен - он включает теперь целую совокупность индексов $[13]$. Однако свойства сходимости волновых функций остаются прежними.

Литература к лекции I

- [1] G. Derrick; J.M. Blatt *Nucl Phys* 8, 310 (1958)
W. Zickendraht, *Proc. Natl Acad* 52, 1565 (1964).
Ann Phys 35, 18 (1965).
- [2] Н.Я.Виленкин, Г.Кузнецов, Я.А.Сморodinский ЯФ, 2, 906 (1965).
- [3] Ю.А.Симонов ЯФ, 3, 630 (1966).
- [4] J.M. Levy-Leblond, M. Levy-Nahas, *J.Math Phys* 6, 1971 (1965).
- [5] В.В.Пустовалов, Ю.А.Симонов ЖЭТФ, 51, 345 (1966).
- [6] В.Нири, Я.А.Сморodinский ЯФ 9 894 (1969).
В.В.Пустовалов, Я.А.Сморodinский ЯФ 10, № 6 (1969).
- [7] А.М.Бадалян, Ю.А.Симонов ЯФ 3, 1032 (1966).
- [8] Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа т.1, стр.234, ГИФМЛ, Москва 1963.
- [9] F. Calogero (частное сообщение).
- [10] А.М. Badalyan, preprint JHEP № 746.
- [11] Ю.А.Симонов, А.М.Бадалян ЯФ 5, 88 (1967).
- [12] M. Fadre de la Ripelle, preprint Orsay N157 (1969).
- [13] Ю.А.Симонов ЯФ, 7, 1210 (1968).

ЛЕКЦИЯ № 2

МЕТОД К-ГАРМОНИК В ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ^{x/}

Как было видно на примере трех частиц, разложение волновой функции по однородным гармоническим полиномам степени K сходится достаточно быстро. Это означает, что гармонические полиномы, являются волновыми функциями системы свободных частиц, тем не менее правильно передают основные черты взаимодействующей системы, в частности, локализацию связанного состояния в ограниченной пространственной области. Задачу построения полной системы таких полиномов с заданной симметрией относительно перестановок частиц и с заданным полным угловым моментом можно сформулировать на языке теории групп. Такой групповой подход мы продемонстрируем на примере четырех частиц.

Чтобы выделить движение системы как целого, введем координаты Якоби:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) & \bar{\xi}_3 &= \frac{1}{\sqrt{12}} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 - 3\bar{r}_4) \\ \bar{\xi}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_3) & \bar{R} &= \frac{1}{4} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \bar{r}_4)\end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, уравнение Шредингера для свободного движения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}_3^2} \right) \psi(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) = - \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$$

инвариантно относительно преобразований, действующих на верхние и нижние индексы девятимерного вектора $\bar{\xi}_\alpha^i$ (индекс i относится к пространственным координатам, α — номер век-

^{x/} Лекция написана Е.Л.Сурковым.

тора) и оставляющих инвариантным квадрат девятимерного вектора ρ^2 :

$$\xi_{\alpha'}^i = \sum_{i, \alpha=1,2,3} R_{\alpha\alpha'}^{ii} \xi_{\alpha}^i ; \quad \rho^2 = (\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \sum_{i, \alpha=1,2,3} (\xi_{\alpha}^i)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

Известно, что однородные гармонические полиномы степени K образуют базис неприводимого представления группы O_9 , сохраняющей ρ^2 . Эти гармонические полиномы удовлетворяют девятимерному уравнению Лапласа:

$$\Delta_9 \mathcal{P}_K \equiv \sum_{i, \alpha=1,2,3} \frac{\partial^2}{\partial \xi_{\alpha}^{i2}} \mathcal{P}_K = 0 \quad (1.4)$$

Физический смысл квантового числа K , как и в случае трех частиц, заключается в том, что оно характеризует совместное движение частиц причем данным значениям K соответствует локализация всех частиц в пространственной области размерами $\sim \frac{K}{x}$. В этом смысле K эквивалентно обычному орбитальному моменту ℓ (в случае двух частиц $K \equiv \ell$). По аналогии с задачей трех тел можно ожидать, что для описания системы взаимодействующих четырех частиц будет достаточно ограничиться несколькими гармониками с малыми значениями K .

Эти гармоники должны описывать состояния частиц с полным орбитальным моментом L и определенной перестановочной симметрией, то-есть преобразовываться по неприводимым представлениям группы пространственных вращений O^3 и группы перестановок четырех частиц S_4 .

Каждая из этих групп индуцирует линейное преобразование в пространстве девятимерных векторов ξ_{α}^i , при этом O^3 действует только на верхние индексы ξ_{α}^i , а перестановки - только на нижние индексы:

$$O^3 \bar{z}_\alpha^i = \sum_{i', \alpha' = 1, 2, 3} R^{i i'} \bar{z}_{\alpha'}^{i'} ; \quad S_4 \bar{z}_\alpha^i = \sum_{\alpha' = 1, 2, 3} R_{\alpha \alpha'} \bar{z}_{\alpha'}^i \quad (I.5)$$

Эти преобразования, конечно, коммутируют друг с другом и составляют инвариантным свободное уравнение Шредингера и скалярное произведение $\rho^2 = (\bar{z}, \bar{z})$. Ясно, что они входят в O_9 в качестве подгруппы.

$$O_9 \supset O^3 \otimes O^3 \quad (I.6)$$

Многочастичные состояния будут задаваться с помощью квантовых чисел этой цепочки подгрупп: K в O_3 , L в O_3 и схемы Юнга $[p]$ в S_4 . Вообще говоря, этих квантовых чисел недостаточно для классификации поэтому состояния с определенными L и $[p]$ будут встречаться в представлении $\{K\}$ неоднократно. Возникает вопрос, нельзя ли в цепочку (I.6) вставить промежуточную подгруппу, чтобы с помощью ее квантовых чисел хотя бы частично снять вырождение? Такую подгруппу действительно можно найти. Как легко видеть, каждая перестановочная матрица $R_{\alpha \alpha'}$ не меняет скалярного произведения по нижним индексам

$$(\bar{z}^i, \bar{z}^k) = \sum_{\alpha' = 1, 2, 3} \bar{z}_{\alpha'}^{i'} \bar{z}_{\alpha'}^k \quad (I.7)$$

и образует конечную подгруппу непрерывной ортогональной группы O_3 действующей только на нижние индексы вектора $\bar{z}_\alpha^i$ ("Вращения" в пространстве номеров частиц) группы вращений по верхним и нижним индексам коммутируют друг с другом и их прямое произведение $O^3 \otimes O^3$ образует нужную нам промежуточную подгруппу с дополнительным квантовым числом Λ - "угловым моментом по нижним индексам". Базисные вектора внутри пред-

ставления нумеруются обычно с помощью квантовых чисел определенной цепочки подгрупп. Иногда этих чисел хватает для однозначной нумерации базиса, а иногда нет. К сожалению, в физических задачах чаще встречается второй вариант, и в нашем случае тоже.

Внутри представления $[f]$ группы перестановок квантовых чисел канонической цепочки

$$S_4 \supset S_3 \supset S_2$$

достаточно для нумерации базиса, но вырождение может возникнуть при редукции с O_3 на S_4 . Уже на первом этапе приведения

$$O_9 \supset \begin{matrix} O^3 \\ O^2 \end{matrix} \otimes \begin{matrix} O^3 \\ O^2 \end{matrix} \quad (1.8)$$

неминуемо возникает вырождение - эта цепочка дает нам всего лишь пять квантовых чисел: K в O_9 , L , M в O^3 и аналогично λ , μ в O^3 . Для ликвидации этого дефицита (нехватает трех квантовых чисел, так как после выделения движения центра масс при заданной энергии система из четырех частиц описывается 8 переменными и, значит, 8 квантовыми числами) мы должны были бы из генераторов группы O_9 построить три оператора типа Казимира, коммутирующих друг с другом и с генераторами групп O^3 и O_3 . Однако в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением малых K , представляющих наибольший практический интерес. Как станет ясно из дальнейшего, при $K \leq 4$ эти дополнительные квантовые числа еще не проявляются и квантовых чисел цепочки (1.8) оказывается достаточно для полной нумерации интересующих нас состояний четырех частиц. В общем это является даже некоторым преимуществом данной схемы, которая позволяет выделить именно существенные квантовые числа для задачи с коротко-

действием.

Заметим теперь, что подгруппы S_3 перестановок частиц 1, 2, 3 является подгруппой $O_2 < O_3$ ($\xi_3 = \text{const}$) тем самым возникает цепочка подгрупп

$$O_9 \supset O^3 \otimes O_3 \supset O_2 \quad (I.9)$$

$$\begin{matrix} U & U & U \\ O_2 & S_4 \supset S_3 \supset S_2 \end{matrix} \quad (I.10)$$

следуя которой мы получим состояния с определенным орбитальным моментом L и его проекцией M , преобразующиеся неприводимо при перестановках частиц 1, 2, 3, 4.

Перейдем теперь к картановским переменным по верхним и нижним индексам:

$$\eta_{\alpha}^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_{\alpha}^1 \pm i \xi_{\alpha}^2); \quad \eta_{\alpha}^0 = \xi_{\alpha}^3 \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (I.11)$$

$$Z_{\pm 1}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_1^i \pm i \eta_2^i); \quad Z_0^i = \eta_3^i \quad i = \pm 1, 0 \quad (I.12)$$

В этих переменных скалярное произведение (I.3) запишется в виде

$$\rho^2 = (Z Z) \equiv \sum_{\substack{i=\pm 1, 0 \\ \alpha=\pm 1, 0}} Z_{\alpha}^i Z_{-\alpha}^{-i}$$

а оператор Лапласа

$$\Delta_9 \equiv \sum_{i, \alpha=\pm 1, 0} \frac{\partial^2}{\partial Z_{\alpha}^i \partial Z_{-\alpha}^{-i}} \quad (I.13)$$

В этих переменных генераторы групп O_9, O^3, O_3 будут соответственно

$$X_{\alpha\beta}^{ij} = Z_{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial Z_{\beta}^j} - Z_{\beta}^j \frac{\partial}{\partial Z_{\alpha}^i}; \quad X^{ij} = \sum_{\alpha=\pm 1, 0} X_{\alpha, -\alpha}^{ij}; \quad X_{\alpha\beta} = \sum_{i=\pm 1, 0} X_{\alpha\beta}^{i-i} \quad (I.14)$$

Генераторы группы пространственных вращений X^{ij} являются скалярами относительно преобразований O_3 и поэтому не меняются при перестановке частиц. Легко также убедиться, что X^{ij} коммутируют с X_α . Проиллюстрируем действие перестановок на переменные Z_α^i :

$$S_2 = (\hat{1} \hat{2}) \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_0 \\ Z_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_0 \\ Z_{-1} \end{bmatrix}; \quad \hat{S}_3 = (\hat{1} \hat{2}) (\hat{3} \hat{4}) =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}i & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}; \quad S_{\bar{4}} = (\hat{1} \hat{2} \hat{3}) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{2\pi}{3}i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi}{3}i} \end{bmatrix} \quad (I.15)$$

($(I23)$ - циклическая перестановка 1, 2, 3 и т.п.).

Все эти матрицы ортогональны относительно скалярного произведения по нижним индексам:

$$(Z^i Z^j) = \sum_{\alpha = \pm 1, 0} Z_\alpha^i Z_{-\alpha}^j \quad (I.16)$$

и принадлежат тем самым группе O_3 трехмерных вращений с отражениями. Эта группа является прямым произведением группы собственно вращений с $\det = +1$ и группа пространственных отражений. Ее представления D_Λ^+ и D_Λ^- отличаются тем, что D_Λ^- меняет знак при отражениях, а D_Λ^+ нет.

II. Приведение по цепочке подгрупп (I.9) (I.10).

После сделанных замечаний начнем последовательное приведение пространства гармонических полиномов степени K согласно редукционной цепочке? (I.9) (I.10).

Рассмотрим сначала однородные полиномы степени K , отбросив на время требование гармоничности. Эти полиномы образуют

базис неприводимого представления $[K]$ группы унитарных преобразований U_9 с генераторами

$$C_{\alpha\beta}^{ij} = Z_{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial Z_{\beta}^j} \quad i, j, \alpha, \beta = +1, 0, -1.$$

Размерность этого представления равна числу независимых полиномов степени K в девятимерном пространстве

$$N[K] = \frac{(K+8)!}{8! K!}$$

Группа U_9 содержит в качестве подгруппы прямое произведение $U_3 \times U_3$, действующей отдельно на верхние и нижние индексы Вектора Z_{α}^i генераторами C^{ij} и $C_{\alpha\beta}$:

$$C^{ij} = \sum_{\alpha} C_{\alpha+\alpha}^{ij} ; \quad C_{\alpha\beta} = \sum_i C_{\alpha,\beta}^{i,i}$$

Генераторы U_3 разбиваются на диагональные $C^{i,i}(i=\pm 1, 0)$, повышающие $C_{+}^{ij}(i>j)$ и понижающие $C_{-}^{ij}(i<j)$.

Неприводимое представление любой классической группы, в том числе унитарной и ортогональной, задается своим старшим весом. Под действием повышающих операторов полином старшего веса обращается в ноль, оставаясь собственным вектором под действием диагональных операторов.

Найдем, какие представления $U^3 \times U_3$ содержатся в U_9 и перечислим полиномы старшего веса относительно $U^3 \times U_3$.

Поливектором называется определитель, составленный из вектора Z_{α} - многомерный аналог векторного произведения:

$$\Delta_{\alpha}^i = Z_{\alpha}^i ; \quad \Delta_{\alpha\beta}^{ij} = \begin{vmatrix} Z_{\alpha}^i & Z_{\beta}^i \\ Z_{\alpha}^j & Z_{\beta}^j \end{vmatrix} ; \quad \Delta_{\alpha\beta\gamma}^{ijk} = \begin{vmatrix} Z_{\alpha}^i & Z_{\alpha}^j & Z_{\alpha}^k \\ Z_{\beta}^i & Z_{\beta}^j & Z_{\beta}^k \\ Z_{\gamma}^i & Z_{\gamma}^j & Z_{\gamma}^k \end{vmatrix}$$

Однородные полиномы от поливекторов образуют базис неприводимого представления $U_3 \otimes U_3$ со старшими векторами вида

$$P = (\Delta_i)^P (\Delta_{10}^i)^Q (\Delta_{10}^{i-1})^S ; \quad P+2Q+3S=K$$

старших полиномов другого вида не существует.

Действительно, диагональные операторы C'' , C^{00} , C^{-1-1} переводят эти полиномы в себя, например:

$$C''P = \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial Z_{\alpha}^i} P = (p+q+s)P$$

Повышающий оператор, например $C^{10} = \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial Z_{\alpha}^j}$. Действуя на поливектор, заменяет Z^0 на Z^1 и обращает поэтому Δ_{10}^{10} .

Δ_{10-1}^{10-1} в ноль. Таким образом, неприводимое представление $[K]$ группы U_9 содержит неприводимые представления $[p, q] \otimes [p, q]$ подгруппы $U^3 \otimes U_3$, задаваемые квантовыми числами p и q , так как S определяется из соотношения $p+2q+3s=k$. Теперь можно вычислить, какие неприводимые представления группы $O_3 \times O_3$ содержатся в представлении $[p, q] \times p, q$ группы $U_3 \times U^3 \supset O_3 \otimes O_3$. Из всех унитарных преобразований $U_3 \times U^3$ ортогональная подгруппа выбирает такие, которые сохраняют скалярные произведения

$$(Z^i Z^j) = \sum_{\alpha=\pm 1,0} Z_{\alpha}^i Z_{\alpha}^j; \quad (Z_{\alpha} Z_{\beta}) = \sum_{l=\pm 1,0} Z_{\alpha}^l Z_{\beta}^{-l}$$

отдельно и по верхним и по нижним индексам. Соответственно, старшими векторами относительно $O^3 \times O^3$ будут не только полиномы вида (P) , но и те, которые получаются из них всевозможными свертками по нижним и верхним индексам. Продолжая эту операцию, можно найти спектр группы $O^3 \times O_3$, содержащийся в однородных полиномах степени K и одновременно построить явный вид полиномов с определенными ℓ и Λ .

Проще всего пояснить это на примерах. Рассмотрим однородные полиномы от Z_{α}^i небольших степеней:

При $K = 1$ полином старшего веса относительно $U^3 \otimes U_3$ один - это $Z'_1 \{p=1; q=0\}$ одновременно он является и старшим вектором относительно $O^3 \otimes O_3$ с $\ell=1, \Lambda=1$ так как повышающие операторы группы $O^3 \otimes O_3$ $\chi^{1,0}$ и $\chi_{1,0}$ обращают его в ноль. Проверим размерность базиса:

$$\sum_{\substack{\text{всех} \\ \ell \otimes \Lambda}} (2\ell+1)(2\Lambda+1) = 3 \cdot 3 = \frac{(1+8)!}{1! 8!} = 9$$

При $K = 2$ есть два старших относительно $U^3 \otimes U_3$ полинома:

$(Z'_1)^2 \{p=2; q=0\}$ и $\Delta^{1,0}_{1,0} \{p=0; q=2\}$. Старшие вектора в $O^3 \otimes O_3$ получаются из последних сверткой по верхним и нижним индексам. При свертке $\Delta^{1,0}_{1,0}$ получается ноль, т.к. поливектор антисимметричен по своим индексам. Свертка же $(Z'_1)^2$ дает следующие базисные вектора:

$$(Z'_1)^2 \Rightarrow (Z'_1)^2 \oplus (Z'_1 Z'_1) = (Z'_1 Z'_1) \oplus (Z'_1 Z'_1) = Z'^i_1 Z'^{-i}_1 \oplus (Z'^i_1 Z'^{-i}_1)$$

$$\ell=2 \otimes \Lambda=2; \ell=2 \otimes \Lambda=0; \ell=0 \otimes \Lambda=0$$

$$\text{и, наконец, сам } \Delta^{1,0}_{1,0} \quad \ell=1 \otimes \Lambda=1$$

Проверим правильность приведения по размерности:

$$\sum_{\substack{\text{всех} \\ \ell \otimes \Lambda}} (2\ell+1)(2\Lambda+1) = (4+1)(4+1) + (4+1)(1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (4+1) + (2+1)(2+1) = 25+5+1+5+9 = 45 = \frac{(2+8)!}{2! 8!} = 45$$

Коротко спектр суммы представлений $\ell \otimes \Lambda$ среди полиномов степени 2 можно записать как

$$(2 \oplus 0) \oplus (2 \oplus 0) \oplus 1 \oplus 1$$

При $K = 3$ старшие в $U^3 \otimes U_3$ вектора есть

$$\begin{array}{cccc} (Z'_1)^3 & Z'_1 \Delta^{1,0}_{1,0} & \Delta^{1,0-1}_{1,0-1} & \\ \{3,0\} & \{3,0\} & \{1,1\} & \{0,0\} \\ \{3,0\} & \{1,1\} & \{0,0\} & \end{array}$$

Сделаем приведение $U^3 \otimes O^3$ только по верхним индексам: по нижним повторяется буквально:

$$(Z^1)^3 \Rightarrow (Z^1)^3 \oplus Z^1_1 (Z^1, Z^1); [3, 0] \supset 3 \oplus 1$$

$$(Z^1) \Delta^{10}_0 \Rightarrow Z^1 \Delta^{10}_0 \oplus Z^1_i \Delta^{1-i}_0; [1, 1] \supset 2 \oplus 1$$

$$\Delta^{10-1}_{10-1} \Rightarrow \Delta^{10-1}_{10-1} \quad [0, 0] \supset 0$$

(чтобы получать старшие вектора, свертку в поливекторах нужно проводить по младшим индексам, например $Z^1_i \Delta^{1-i}_0$, а не $Z^1_i \Delta^{10}_0$; Δ^{10-1}_{10-1} есть, конечно, старший вектор в O^3 с $\ell=0$, свернуть его уже нельзя).

С полученными полиномами нужно проделать те же свертки и по нижним индексам, чтобы осуществить приведение и по $U_3 \supset O_3$. В результате мы получим спектр $O^3 \otimes O_3$ содержащийся в представлении $[K=3]$ группы U_9 :

$$[3] \supset \underbrace{[3, 0]}_{(3 \oplus 1)} \oplus \underbrace{[3, 0]}_{(3 \oplus 1)} \oplus \underbrace{[1, 1]}_{(2 \oplus 1)} \oplus \underbrace{[1, 1]}_{(2 \oplus 1)} \oplus \underbrace{[0, 0]}_0 \oplus \underbrace{[0, 0]}_0$$

Мы ввели здесь естественные обозначения для спектра квантовых чисел использованной пока нами редукционной цепочки подгрупп

$$U_9 \supset U^3 \otimes U_3, \quad [K] \supset \sum_{\ell} [p, q] \otimes [p, q] \\ \underbrace{O_3 \otimes O_3}_{(\sum \ell) \otimes (\sum \lambda)}$$

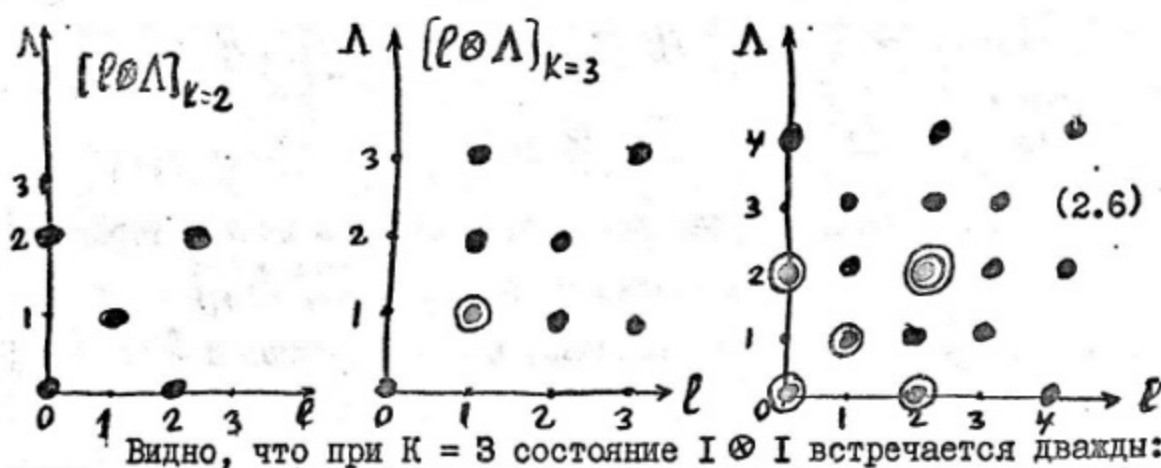
Итак, однородные полиномы степени $K=3$ содержат следующие состояния $\ell \otimes \lambda$

$$[K=3] \supset (3 \oplus 1) \oplus (3+1) \oplus (2 \oplus 1) \oplus 0 \oplus 0 = \\ = 3 \otimes 3; 3 \otimes 1; 1 \otimes 3; 1 \otimes 1; 2 \otimes 2; 2 \otimes 1; 1 \otimes 2$$

Проверим правильность приведения по размерности:

$$\sum_{\ell \otimes \lambda} (2\ell+1)(2\lambda+1) = (7+3)(7+3) + (5+3)(5+3) + 1 \cdot 1 = \\ = 100 + 64 + 1 = 165 = \frac{(3+8)!}{3! 8!} = 165$$

Спектры представления $[K]$, приведенного по подгруппам (2.5) удобно изображать графически, откладывая по осям координат квантовые числа ℓ, Λ :



Действуя описанным способом, мы будем получать однородные полиномы степени K с определенными ℓ и Λ , причем полиномы $|[K]; [\ell, \Lambda]; \ell, \Lambda\rangle$ будут нумероваться квантовыми числами редукционной цепочки

$$u_9 = u^3 \otimes u_3$$

$$u_3 \otimes u_3$$

После этого мы должны перейти от однородных полиномов, образующих базис неприводимого представления группы, к гармоническим полиномам, образующим базис неприводимого представления ортогональной группы O_9 .

Известно, что любой однородный полином степени K P_K можно однозначно представить в виде комбинации гармонических полиномов P_K :

$$P_K = P_K + \rho^2 P_{K-2} + \rho^4 P_{K-4} + \rho^6 P_{K-6} \quad (2.7)$$

Это означает, что представление $[K]$ группы U_9 содержит

представления $[K]$, $[K-2]$, $[K-4]$... своей ортогональной подгруппы O_3 . Наша задача состоит в том, чтобы из однородных полиномов степени K отобрать гармонические полиномы с определенными значениями ℓ и Λ . Для этого нужно взять их линейную комбинацию

$$P = \sum_{p,q} a_{pq} |[K]; [p, q]; \ell, \Lambda \rangle \quad (2.8)$$

и подобрать коэффициенты a_{pq} , так, чтобы действие оператора Лапласа на P давало ноль. Оператор Лапласа инвариантен относительно преобразований подгруппы $O^3 \otimes O_3$, поэтому, подействовав лапласианом на полином степени K с определенными $\ell \otimes \Lambda$, мы получим полином степени $K-2$ с теми же $\ell \otimes \Lambda$.

Приравняв его нулю, получим связь между коэффициентами a_{pq} . Если же данные $\ell \otimes \Lambda$ не содержатся среди полиномов степени $K-2$, то однородный полином автоматически будет и гармоническим. Например, при $K=2$ гармоническими являются все состояния за исключением $(Z^2 Z)$, при $K=3$ - все кроме $Z^1_1(ZZ)$ и $Z^1_2 \Lambda^1_{-2}$ с $\ell=\Lambda=1$. Только в этом случае нужно составить линейную комбинацию $Z^1_1(ZZ) + a Z^1_2 \Lambda^1_{-2}$ и, подействовав оператором Лапласа, найти коэффициент a . Он оказывается равным $-\frac{11}{4}$.

Из разложения (2.7) следует, что всякий полином степени K представим в виде суммы гармонического полинома степени K и умноженного на ρ^2 однородного полинома степени $K-2$. Поэтому спектр $[\ell \otimes \Lambda]_K$ однородных полиномов степени K относительно группы $O^3 \otimes O_3$ равен сумме спектра гармонических полиномов степени K $[\ell \otimes \Lambda]_K$ и спектра однородных полиномов степени $K-2$ $[\ell \otimes \Lambda]_{K-2}$. Отсюда мы можем сразу найти, какие представления $\ell \otimes \Lambda$ подгруппы $O^3 \otimes O_3$ содержатся в неприво-

данным представлении $[K]$ группы O_3 :

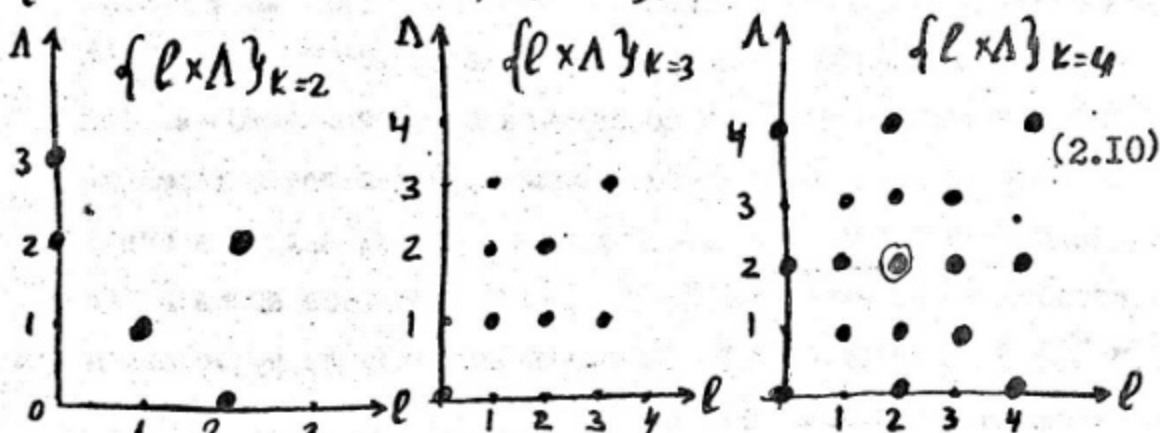
$$\{l \otimes \Lambda\}_K = [l \otimes \Lambda]_K - [l \otimes \Lambda]_{K-2} \quad (2.9)$$

а так же размерность $N\{K\}$ пространства гармонических полиномов:

$$N\{K\} = N[K] - N[K-2] = \frac{(K+8)!}{K! 8!} - \frac{(K-2+8)!}{(K-2)! 8!} = \frac{(2K+7)(K+6)!}{K! 7!}$$

В качестве примера приведем спектры $O_3 \supset O^3 \otimes O_3$ при $K = 1, 2, 3, 4$. Они получаются из спектров (2.6) вычитанием спектров полиномов степени $K-2$: $\{l \times \Lambda\}_2 = [l \times \Lambda]_2 - [l \times \Lambda]_0$;

$$\{l \times \Lambda\}_3 = [l \times \Lambda]_3 - [l \times \Lambda]_1; \quad \{l \times \Lambda\}_4 = [l \times \Lambda]_4 - [l \times \Lambda]_2$$



Как видно, при $K = 0, 1, 2, 3$ квантовых чисел цепочки подгруппы

$O_3 \supset O^3 \otimes O_3$ достаточно для однозначной нумерации состояний

четырех частиц. Первый раз двукратное вырождение появляется при $K = 4, l = \Lambda = 2$. И с ростом K число вырожденных состояний увеличивается. Самое неприятное состоит в том, что вырожденными становятся и состояния на границе спектра, при $l = 0$.

Именно с этим связаны те значительные усложнения, которые возникают при переходе от трех частиц к четырем и более.

Только для трех частиц квантовых чисел K и l цепочки

$O_6 \supset O^3 \otimes O_2$ оказывается достаточно для нумерации состояний

с $l = 0$. Но для малых значений K , представляющих наибольший

практический интерес, описанный выше способ позволяет почти однозначно строить однородные гармонические полиномы степени K , старшие относительно подгруппы $O^3 \otimes O_3$. Следующий шаг в редукционной цепочке - редукция с группы O^3 на O^2 - делается с помощью обычных понижающих операторов в O^3 : полиномы с определенным значением проекции полного момента m получаются из старшего полинома последовательным действием оператора $X^{-1,0}$:

$$|K; l \otimes \Lambda; m\rangle = \sqrt{\frac{2^{l-m} (l+m)!}{(2l)! (l-m)!}} (X^{-1,0})^{l-m} |K; l \otimes \Lambda\rangle \quad (2.11)$$

Точно так же и по нижним индексам вектора Z_α^l понижающий оператор $X_{-1,0}$ даст нам состояние с определенным квантовым числом μ подгруппы $O_2 \subset O_3$

$$|K; l \times \Lambda; m, \mu\rangle = \sqrt{\frac{2^{\Lambda-\mu} (\Lambda+\mu)!}{(2\Lambda)! (\Lambda-\mu)!}} (X_{-1,0}^\Lambda)^{\Lambda-\mu} |K; l \times \Lambda, m\rangle \quad (2.12)$$

В результате мы получим полиномы с квантовыми числами

$K; l, m; \Lambda, \mu$ редукционной цепочки

$$O_3 \supset O^3 \otimes O_3$$

$\cup$
 O_2

$\cup$
 O^2

(2.13)

III. Гармонические полиномы определенной перестановочной симметрии

Связь между группой перестановок и группой ортогональных преобразований по нижним индексам O_3 позволяет нам построить из полиномов с квантовыми числами K, l, m, μ состояния, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы пере-

становок S_4

$$\begin{matrix} O_3 & \supset & O_2 \\ U & & U \end{matrix}$$

$$S_4 \supset S_3 \supset S_2$$

(3.1)

Каждая перестановка представляет собой некоторое конечное вращение R_s (с отражением) по нижним индексам вектора Z_s^i , поэтому она оставляет неизменными квантовые числа k, l, m, Λ ; при этом полиномы с разными μ преобразуются с помощью обычных D -матриц трехмерных вращений:

$$\hat{S} |\Lambda^\pm, \mu\rangle = (\pm 1)^{\frac{ds-1}{2}} \sum_{\mu'} D_{\mu', \mu}^\Lambda(R_s) |\Lambda^\pm, \mu'\rangle \quad (3.2)$$

Действие оператора перестановок зависит только от квантовых чисел Λ, μ , поэтому в дальнейшем мы будем опускать остальные k, l, m ($ds = +1$ для четной перестановки и -1 для нечетной). Нам осталось сделать последний шаг, отвечающий редукции (3.1).

Для этого нужно установить:

1. Какие представления группы перестановок содержатся в представлении $\Lambda^\pm$ группы O_3 :

2. Какие представления S_3 содержатся в представлении $|\mu|$ группы O_2 .

3. Построить явный вид полиномов, преобразующихся по неприводимым представлениям S_4 .

Первое. Напомним, что группы S_4 содержит пять классов, каждый из которых порождается элементами S_i (I.15). Поэтому она имеет пять неприводимых представлений: симметричное $[4]$, антисимметричное $[1^4]$ два трехмерных $[21^2]$, $[31]$ и одно двумерное самосопряженное $[2^2]$, базисные функции которых изображаются диаграммами Юнга с заполнением. Зная характеры

представлений, нетрудно найти, сколько раз $h[f]$ представление $[f]$ группы перестановок содержится в представлении $D_{\Lambda \pm}$ группы O_3 :

$$h[f] = \frac{1}{4!} \sum_{s_i} g_i \chi^{[f]}(s_i) \chi^{\Lambda \pm}(s_i) \quad (3.3)$$

Характеры группы перестановок известны $\chi^{[f]}(s_i)$. Характеры же $D^{\Lambda \pm}(R_i)$ нетрудно найти. Для этого достаточно перестановочные матрицы R_{s_i} (I.15) привести к диагональному виду:

$$d_{s_i} \begin{bmatrix} e^{-i\psi_i} & & \\ & 1 & \\ & & e^{i\psi_i} \end{bmatrix}$$

Тогда характер $D_{\Lambda \pm}(R_i)$ будет равен

$$\chi^{\Lambda \pm}(s_i) = \pm \frac{d_i - 1}{2} \frac{S_m(\Lambda + \frac{1}{2}) \psi_i}{S_m \frac{\psi_i}{2}}$$

В качестве примера мы укажем, какие представления группы перестановок содержатся в представлении O_3 при $\Lambda = 1^+, 2^+, 3^+, 4^+$

$$\begin{aligned} \Lambda = 1^+ & \supset \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \Lambda = 2^+ & \supset \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \Lambda = 3^+ & \supset \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \Lambda = 4^+ & \supset \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как видно, при небольших K и, следовательно, малых Λ вырождения нет и на этом этапе преведения - каждое представление S_4 встречается не более одного раза. Состояния противоположной четности $\Lambda = 1^-, 2^-, 3^-, 4^-$ содержат сопряженные представления, у которых в схеме Юнга строчки заменены на столбцы.

Второе. Представление группы двумерных вращений с отра-

жениями O_2 задается квантовым числом $|\mu|$ и при $\mu = 3p$.
 $p = 0, 1, 2 \dots$ распадается на симметричное и антисимметричное представления подгруппы S_3 : при других μ оно содержит двумерное представление $\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} S_3$. Это уже было установлено в задаче трех тел.

Перейдем, наконец, к подгруппе $S_2 \subset S_3$. При перестановке частиц $1, 2$ $\vec{z}_1 \rightarrow -\vec{z}_1$ (см. (I.I) $z_1 \rightarrow -z_1$; $z_2 \rightarrow z_2$), а μ переходит в $-\mu$. Полиномы с определенными Λ и μ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{12} |\Lambda^+, \mu\rangle &= (-1)^\Lambda |\Lambda^+, -\mu\rangle \\ \hat{S}_{12} |\Lambda^-, \mu\rangle &= -(-1)^\Lambda |\Lambda^-, -\mu\rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} [|\Lambda^+, \mu\rangle \pm (-1)^\Lambda |\Lambda^+, -\mu\rangle] &= \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [|\Lambda^+, \mu\rangle \mp (-1)^\Lambda |\Lambda^+, -\mu\rangle] &= \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

- соответственно симметричны и антисимметричны при перестановках первой и второй частиц.

Теперь уже нетрудно строить полиномы, отвечающие определенному заполнению схемы Юнга $[p]$. Мы рассмотрим в качестве примера $\Lambda = 2^+$ которое содержит представления группы перестановок $\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}$ причем μ принимает значения $0, \pm 1, \pm 2$.

Вектор $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}$ должен преобразовываться по симметричному представлению $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \end{smallmatrix}$ группы перестановок частиц $1, 2, 3$. Но это возможно только при $\mu = 3p$, т.е. при $\mu = 0$. Следовательно,

$$\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square \end{smallmatrix} = |2, 0\rangle \quad (3.8)$$

Вектор $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ антисимметричен при перестановках частиц 1, 2; из (3.7) следует, что он должен представлять собой линейную комбинацию следующих состояний:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|2, 2\rangle - |2, -2\rangle]; \frac{1}{\sqrt{2}} [|2, 1\rangle - |2, -1\rangle]$$

Поэтому

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 \end{bmatrix} = a \frac{1}{\sqrt{2}} [|2, 2\rangle - |2, -2\rangle] + b \frac{1}{\sqrt{2}} [|2, 1\rangle - |2, -1\rangle] \quad (3.9)$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Постоянные a, b можно найти, подействовав на (3.9) какой-нибудь перестановкой, например, частиц 3, 4. Левая часть при этом изменится не должна, а правая преобразуется с помощью обычных матриц вращения $D_{\mu\mu'}^2(R_s)$. Приравнивая после этого правую и левую части (3.9), находим постоянные

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Аналогично поступаем и при построении вектора $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} [|2, 2\rangle + |2, -2\rangle] \right\} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} [|2, 1\rangle + |2, -1\rangle] \right\} \quad (3.10)$$

После этого легко найти и базисные вектора представления $\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$. При перестановках частиц 1, 2, 3 они должны преобразовываться одинаково с (3.9) и (3.10).

Поэтому

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\} = a' \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} [|2, -2\rangle - |2, 2\rangle], -\frac{1}{\sqrt{2}} [|2, 2\rangle + |2, -2\rangle] \right\} + b' \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} [|2, 1\rangle - |2, -1\rangle], \frac{i}{\sqrt{2}} [|2, 1\rangle + |2, -1\rangle] \right\}$$

Как состояния, принадлежащие разным представлениям группы перестановок S_4 , $\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}$ должны быть ортогональны друг другу;

$$a'a + b'b = 0; \quad |a'|^2 + |b'|^2 = 1$$

Отсюда сразу находим $a' = \frac{1}{\sqrt{3}} ; b' = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Таким образом можно строить состояния определенной перестановочной симметрии из полиномов с определенными Λ и μ . При этом коэффициенты типа $a, b; a', b'$ не зависят, конечно, от остальных квантовых чисел. Кроме того, все нечеткие перестановки имеют отрицательный определитель $d_s = -1$, поэтому $D^{\Lambda+} D^{\Lambda-}$ преобразуются по сопряженным представлениям группы перестановок. В связи с этим соотношения типа (3.10) определяют одновременно и $\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ при $\Lambda = 2^+$ и $\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}$ для состояний противоположной четности с $\Lambda = 2^-$. Из-за всего этого объем вычислений сравнительно невелик.

IV. Нормировка полиномов

В базисе однородных полиномов степени K можно определить дифференциальное скалярное произведение:

$$\{P_K(z_\alpha^i), Q_K(z_\alpha^i)\} = P_K^* \left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha^i} \right) Q_K(z_\alpha^i) \quad (4.1)$$

Это скалярное произведение инвариантно относительно унитарных преобразований z_α^i , в том числе и относительно преобразований группы $O_9 \subset U_9$. Если полиномы P, Q преобразуются по неприводимым представлениям O_9 , то существует очень простая связь между дифференциальным скалярным произведением и обычным скалярным произведением в котором произведение полиномов интегрируется по поверхности сферы единичного радиуса $\rho^2 = 1$ в девятимерном пространстве:

$$(P, Q) = \int P^* Q d\Omega_9 \quad \int d\Omega_9 = 1 \quad (4.2)$$

Эта связь такова:

$$(P, Q) = A(k) \{P, Q\} \quad (4.3)$$

Коэффициент $A(k)$ не зависит от остальных квантовых чисел подгрупп группы O_9 , так как матричные элементы неприводимого представления O_9 определяются только структурой группы, ее коммутационными соотношениями и не зависит от конкретного вида инвариантного скалярного произведения. Посчитав $A(k)$ для самого простого гармонического полинома $P_k = (z_1')^k$, можно нормировать полиномы с помощью дифференциального скалярного произведения, что, конечно, проще, чем считать каждый раз интегралы по девятимерной сфере.

$$A(k) = \frac{7!!}{(2k+7)!!}$$

Причем отнормировать достаточно лишь полиномы старшего веса, так как все последующие операции сохраняют нормировку.

Результаты подобных вычислений можно найти в работах где приведены подробные таблицы полиномов с $K = 1, 2, 3, 4$.

У. Расчеты связанных состояний четырех нуклонов.

Следующий этап состоит в отыскании спин-изоспиновых волновых функций, которые отвечали бы определенному полному спину четырех нуклонов S , изоспиновому спину T , их проекциям M_S ; M_T и которые преобразовывались при перестановках как соответствующие схемы Юнга $[P]$. Задача, по существу, сводится к проблеме разложения произведения представлений спиновой и изоспиновой функции, по неприводимым представлениям группы перестановок, т.е. к нахождению коэффициентов Клебша-Гордана для S_4 . Соответствующие методы изложены в книге [2], поэтому мы не будем здесь на них

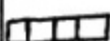
останавливаться.

С помощью спин-изоспиновых волновых функций $|S, T, M_s, M_T; [f], r_i\rangle$ и координатных волновых функций $|k, l, m, \Lambda, [f], r'\rangle$, задаваемых квантовыми числами k, l, m, Λ , схемой Юнга $[f]$ и ее заполнением λ можно построить полный набор функций, полностью антисимметричных относительно перестановок одновременно координат, спиновых и изоспиновых переменных четырех частиц. Для этого необходимо перемножить координатные и спин-изоспиновые функции, преобразующиеся по сопряженным представлениям $S_u[f]$ и $[\tilde{f}]$ схемы Юнга которых отличаются заменой строк на столбцы и наоборот:

$$|l m S T; k \Lambda [f]\rangle = \frac{1}{\sqrt{h[f]}} \sum |k; l m; \Lambda [f] r\rangle \cdot |S T M_s M_T [\tilde{f}] \tilde{r}\rangle.$$

($h[f]$ - размерность представления $[f]$).

В результате мы получим полный набор функций, заданных на поверхности девятимерной сферы $\rho^2 = 1$, определяемый квантовыми числами $k, l, m, \Lambda, [f], S, T, M_s, M_T$. Задание спина и изоспина системы четырех нуклонов определяет, по каким схемам Юнга $[\tilde{f}]$ преобразуются спин-изоспиновые функции и соответственно определяются сопряженные схемы Юнга $[f]$ для координатных функций. После этого можно найти, при каких Λ возможны данные $[f]$ и каким наименьшим значениям k, l отвечают заданные спин и изоспин системы

(S, T)	$[f]_{K_{\min}} \ell$	$[f]_{K_{\min}} \ell$	$[f]_{K_{\min}} \ell$	$[f]_{K_{\min}} \ell$
$(0, 0)$	 $K=0 \ell=0^+$	 $K=2 \ell=0^+$	 $K=3 \ell=0^-$	
$(0, 1)$	 $K=1; \ell=1^-$	 $K=2 \ell=1^+$		
$(1, 0)$	 $K=1; \ell=1^-$	 $K=2 \ell=1^+$		
$(1, 1)$	 $K=1 \ell=1^-$	 $K=2; \ell=0^+$	 $K=2; \ell=1^+$	 $K=3 \ell=0^-$
$(0, 2)$	 $K=2; \ell=0^-$			
$(1, 2)$	 $K=2 \ell=1^+$			
$(2, 2)$	 $K=3 \ell=0^-$			

В этой таблице приведены наименьшие значения $K, \ell^{\pm}$ разрешенные при заданных S, T . Поскольку K определяет порядок следования уровней и наиболее глубоким уровням отвечают наименьшие K уже из этой таблицы можно сделать важные выводы:

1. Наинизшим состоянием будет $S = T = 0$, для которого $K_{\min} = 0; \ell = 0^+$.

2. Следующей группой уровней будут состояния с $S=1; T=0, \ell=1^-; S=0, T=1, \ell=1^-; S=1, T=1, \ell=1^-$ для которых $K_{\min} = 1$.

3. Состояния с S или T равным двум имеют $K_{\min}=2$ и располагаются выше всех, если только такие связанные состояния действительно существуют.

В отсутствие тензорных сил S и T по отдельности являются сохраняющимися квантовыми числами. Поэтому волновая функция системы четырех нуклонов характеризуется значениями

$\ell, m, s; T, M_s, M_T$. Мы можем разложить ее по полной системе функций на девятимерной сфере:

$$\psi^{\ell m s T} = \sum_{k \Lambda \{f\}} a_{k \Lambda \{f\}}^{\ell m s T}(\rho) |\ell m s T; k \Lambda \{f\}\rangle \quad (5.2)$$

Коэффициенты разложения $a(\rho)$ зависят только от расстояния ρ в девятимерном пространстве:

$$\rho^2 = \vec{z}_1^2 + \vec{z}_2^2 + \vec{z}_3^2 \quad (5.3)$$

В уравнении Шредингера для четырех взаимодействующих нуклонов

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\right)\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \hat{U}\psi = \frac{2m}{\hbar^2} E\psi \quad (5.4)$$

в операторе кинетической энергии (операторе Лапласа в девятимерном пространстве) мы выделим угловую и радиальную части:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} = \Delta_9 = \frac{1}{\rho^8} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^8 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\Delta_9}{\rho^2} \quad (5.5)$$

Построенные нами гармонические полиномы степени K удовлетворяют уравнению Лапласа и являются поэтому собственными функциями оператора Лапласа на девятимерной сфере:

$$\Delta_9 P_K = 0 \Rightarrow \Delta_{9g} P_K(\rho) = -K(K+7) P_K(\rho) \quad (5.6)$$

$$z'_\alpha = \rho \Omega_\alpha, \quad P_K(z) = \rho^K P_K(\Omega_g)$$

Воспользуемся этим и подставим разложение (5.2) в уравнение Шредингера. В результате получим систему зацепляющихся одномерных уравнения для парциальных волн $a_{k \Lambda \{f\}}^{\ell m s T}(\rho)$:

$$\left[\frac{1}{\rho^8} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^8 \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{K(K+7)}{\rho^2} - \epsilon^2 \right] a_{k \Lambda \{f\}}(\rho) =$$

$$= \sum_{k' \Lambda' \{f'\}} a_{k' \Lambda' \{f'\}}(\rho) \langle \ell s T, k \Lambda \{f\} | \hat{U} | \ell s T, k' \Lambda' \{f'\} \rangle \quad (5.7)$$

В матричных элементах оператора взаимодействия интегрирование ведется по поверхности сферы в девятимерном пространстве, в результате чего они будут зависеть только от девятимерного радиуса ρ (в разложении мы воспользовались ортогональностью базисных функций по всем квантовым числам). Система уравнений (5.7) является точной. Приближение будет состоять в том, что если разложение сходится достаточно быстро, то можно пренебречь вкладом состояний с большими K и решать конечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Суммирование в разложении (5.2) ведется по всем $K \geq K_{\min}$ и всем Λ , $[f]$, возможным при данном K , причем $K_{\min}$ определяется значениями ℓ, S, T . Кроме того, поскольку четность состояния есть $(-1)^K$, в сумму входят K только той же четности, что и $K_{\min}$. Кроме того, при $K \geq 4$ возникают и другие квантовые числа-индексы повторения, по которым также необходимо суммировать.

В качестве первого приближения можно оставить в разложении только гармоники с $K = K_{\min}$. Последующие приближения оставляют в разложении гармоники с $K_{\min} + 2, K_{\min} + 4 \dots$ Мы приведем результаты расчетов энергии связи α -частиц ($S=P=0$) с разной формой двухчастичного взаимодействия, параметры которого подогнаны по двухчастичной задаче.

Форма потенциала	Энергия связи основан. состоян. Мэв			Возб. 0^+ K=0:
	K = 0	K = 0, 2	K = 0, 2, 4	
Прямоугольная яма	31.52			2,04
Экспонента	43.6			5,6
Куба	55			8,4
Pires-de-Fourreil	22,63	26,47	28,45	
Vikenmeier-Haiken-Broich	18,57	21,23	23,67	

Из таблицы можно сделать следующие выводы:

1. Разложение по К-Гармоникам сходится достаточно быстро уже первое приближение находится в неплохом согласии с экспериментом, и последующие приближения дают только небольшие поправки в энергию связи и волновую функцию α -частицы;

2. Энергия связи сильно зависит от формы парного потенциала, - потенциал в форме экспоненты и потенциал Юкавы дают слишком большую энергию связи уже в первом приближении и каждое последующее приближение может только увеличить энергию связи;

3. Интересным является тот факт, что возбужденное состояние $0^+ \alpha$ -частицы в методе К-гармоник описывается тем же уравнением, что и основное состояние - уравнение для парциальных волн $A_k(\rho)$. дают два уровня с одними и теми же угловыми частями, но с разными зависимостями от ρ .

VI. Коротко о волновых функциях для системы n частиц.

Остановимся теперь на изменениях, которые возникают при переходе к системе n частиц. В этом случае после исключения движения центра инерции с помощью координат Якоби

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i; \quad \vec{\xi}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} \left[\sum_{i=1}^{\alpha} \vec{r}_i - \alpha \vec{r}_{\alpha+1} \right]; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.1)$$

1. Оператор кинетической энергии системы будет инвариантен относительно преобразований группы $O_{3(n-1)} = 3(n-1)$ -мерных вращений и отражений, сохраняющих квадрат вектора $\vec{\xi}_\alpha$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_3^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_{n-1}^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{3(n-1)}$$

$$\rho^2 = (\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\vec{\xi}_\alpha)^2 \quad (6.2)$$

(6.2)

Выделим в этой группе прямое произведение $O^3 \otimes O_{n-1}$ группы пространственных вращений O^3 и группы O_{n-1} , действующих независимо на верхние и нижние индексы вектора $\{ \alpha^i \}$. Группа перестановок S_n n частиц будет являться подгруппой O_{n-1} . Кроме того, подгруппа $S_{n-1} \subset S_n$ перестановок первых $n-1$ частиц будет подгруппой $O_{n-2} (\{ \alpha_{n-1} = \text{const} \})$, а подгруппа $S_{n-2} \subset O_{n-3}$ и т.д.

Редукция такого рода является канонической для групп O_{n-1} и S_n и позволяет однозначно нумеровать базисные вектора неприводимых представлений как O_{n-1} , так и S_n . Возникает следующая редукционная цепочка:

$$O_{3(n-1)} \supset O^3 \otimes O_{n-1} \supset O_{n-2} \supset O_{n-3} \supset \dots \supset O_3 \supset O_2 \quad (6.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \cup & & \cup & & \cup & \\ S_n & \supset & S_{n-1} & \supset & S_{n-2} & \supset & \dots \supset S_4 \supset S_3 \supset S_2 \end{array} \quad (6.4)$$

Следуя ей, мы получим состояния с определенным угловым моментом ℓ и определенной симметрией из состояний с квантовыми числами цепочки $O_{n-1} \supset O_{n-2} \supset O_{n-3} \supset \dots \supset O$, как это мы делали в задаче четырех тел. Причем связь между подгруппами $S_i \subset O_{i-1}$ позволяет факторизовать коэффициенты перехода от одного базиса к другому и использовать результаты вычислений этих коэффициентов при переходе, например, от четырех частиц к пяти и т.д., что существенно упрощает вычисления.

2. Нужно заметить, что квантовых чисел этой цепочки по-прежнему недостаточно для полной нумерации базисных векторов пространства однородных гармонических полиномов степени K ,

образующих базис неприводимого представления $\{k\}$ группы $O_3(n-1)$. Система n частиц определяется $3n-4$ переменными (при фиксированной энергии) и требует для своего описания $3n-4$ квантовых чисел. Группа O^3 дает нам два числа: ℓ, m . Представление $\{k\}$ группы $O_3(n-1)$ содержит представления $O^3 \otimes O_{n-1}$ с весами $\ell \otimes (\Lambda_1^{n-1}, \Lambda_2^{n-1}, \Lambda_3^{n-1}, 0, \dots, 0)$. Причина этого заключается в том, что в группе O_{n-1} из векторов трех сортов ξ^1, ξ^2, ξ^3 можно строить неприводимые тензоры, антисимметризованные не более чем по трем нижним индексам, поэтому соответствующая схема Юнга для O_{n-1} , определяющая симметрию неприводимого тензора, содержит не более трех строк длиной $\Lambda_1^{n-1}, \Lambda_2^{n-1}, \Lambda_3^{n-1}$. Переходя далее к подгруппам $O_{n-1} \supset O_{n-2} \supset \dots \supset O_2$, мы получим цепочку квантовых чисел вложенных подгрупп Гельфанда-Цейтлина $[\Lambda_q^p]$ p - номер подгруппы O_p $p = n-1, n-2, \dots, 2$ $q = 1, 2, 3$, $q \leq [\frac{p}{2}]$ (целой части $\frac{p}{2}$). Пересчитывая $[\Lambda_q^p]$, мы видим, что до полного количества $3n-4$ при редукции $O_3(n-1) \supset O_3 \otimes O_{n-1}$ с квантовыми числами $\ell, m, [\Lambda_q^p]$ нам не хватает одного при $n = 3$, трех при $n = 4$, четырех при $n = 5$ и пяти квантовых чисел $\mathcal{N}_i$ при $n \geq 6$. Дальше с ростом числа частиц число недостающих квантовых чисел не увеличивается и не превышает пяти.

3. Редукция по подгруппам O_p начиная с $\xi_i = \text{const}$ позволяет существенно диагонализировать координатную часть оператора парного взаимодействия $\hat{U} = \sum u_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ полная волновая функция антисимметрична, поэтому матричный элемент этого оператора с помощью перестановок сводится к матричному элементу оператора

$$\frac{n(n-1)}{2} u_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{n(n-1)}{2} u_{12}(\xi_1)$$

Последний же является скаляром относительно подгруппы $O_{n-2} \subset O_{n-1}$ действующей на $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}$ и оставляющей неизменным ξ_1 . Поэтому он будет диагонален по всем квантовым числам $[L_q^p]$, $p \leq n-2$ этой подгруппы, и, более того, не будет зависеть вообще от квантовых чисел $[L_q^p]$ при $p \leq n-3$.

В таком базисе координатная часть скалярного оператора парных взаимодействий будет диагональная по всем квантовым числам $(3n-13)$ подгруппы $O^3 \otimes O_{n-1} \subset O_{3(n-1)}$ за исключением следующих девяти: $K, L_1^{n-1}, L_2^{n-1}, L_3^{n-1}, \dots, R_1, R_2, \dots, R_5$. Оператор трехчастичного взаимодействия $U_{123}(\xi_1, \xi_2)$ будет, очевидно, диагонален по квантовым числам подгруппы

$O_{n-3}(\xi_1 = \text{const}; \xi_2 = \text{const})$ и к предыдущим девяти добавится еще три недиагональных квантовых числа $L_1^{n-2}, L_2^{n-2}, L_3^{n-2}$.

Мы видим, что классификация по подгруппам O_p отвечает классификация взаимодействий по парным, тройным и т.п. Увеличивая коллективность взаимодействий, мы каждый раз теряем диагональность взаимодействия по трем квантовым числам и, наконец, при полностью n -частичном взаимодействии существенными становятся все $[L_q^p]$.

4. В группе перестановок S_n кроме цепочки (6.4) однозначно нумерует состояния и цепочка подгрупп

$$S_n \supset S_2 \otimes S_{n-2} \supset S_{n-3} \supset \dots \supset S_3 \supset S_2$$

Она отвечает выделению двух подсистем, состоящих из частиц 1, 2 и остальных $n-2$ частиц. Этим двум подсистемам соответствуют координаты Якоби

$$\xi = \sqrt{\frac{2(n-2)}{n}} \left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_{n-2}}{n-2} - \frac{\vec{r}_{n-1} + \vec{r}_n}{2} \right); \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1})$$

$$\xi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \vec{r}_i - \alpha \vec{r}_{\alpha+1} \right) \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-2$$

и редукционная цепочка

$$O_{3(n-1)} \supset O^3 \otimes \bigcup_{U} O_{n-1} \supset O_{n-2} \supset \bigcup_{U} O_{n-3} \supset \bigcup_{U} O_{n-4} \supset \dots \supset \bigcup_{U} O_2$$

$$S_n \supset S_2 \otimes S_{n-2} \supset S_{n-3} \supset \dots \supset S_3 \supset S_2$$

в которой редукция $O_{n-1} \supset O_{n-2} \supset \dots \supset O_2$ проводится в порядке $\eta = \text{const}$; $\xi = \text{const}$; $\xi_1 = \text{const}$; $\xi_2 = \text{const}, \dots$

Эта цепочка обладает тем преимуществом, что при вычислении двухчастичных матричных элементов $U_{n,n-1}(\eta)$ будет в явном виде учтена их диагональность по всем квантовым числам подгруппы O_{n-2} .

ЛИТЕРАТУРА К ЛЕКЦИИ № 2 (КУРС № 1)

1. Е.Л.Сурков ЯФ, 5, 908, (1967).
2. Хамермеш, Теория групп и её применения, Москва, Мир, 1968.
3. А.М.Бадалян, Е.С.Гальперн, В.Н.Ляховицкий, В.В.Пустовалов, Ю.А.Симонов, Е.Л.Сурков ЯФ, 6, 473 (1967).
4. *M. Eabre de la Ripelle, preprint Orsay*
(1969). IPNO/T H157

Л Е К Ц И Я № 3

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К СИСТЕМАМ ТРЕХ И БОЛЕЕ ЧАСТИЦ

Рассмотрим систему N нерелятивистских частиц, взаимодействующих с помощью парных потенциалов. Это ограничение не принципиально для дальнейшего, однако, на практике мы не знаем многочастичных сил и пока не знаем экспериментов, из которых их можно было бы определить, а поэтому включение их в задачу представляет чисто академический интерес. Итак, мы знаем парное взаимодействие и у нас есть уравнение Шредингера, следовательно, в принципе мы можем его решить и найти основное и возбужденное состояние системы N частиц. Однако, даже в столь простом подходе, как метод K - гармоник, мы приходим в конце концов к численному решению одного или системы дифференциальных уравнений, в других подходах в задаче также возникают громоздкие численные расчеты. Вообще, в задаче трех и более тел довольно трудно контролировать точность делаемых физических и вычислительных приближений, что связано с большим числом переменных.

В связи с этим очень важную роль играют точные критерии, которые можно доказать с теоремной строгостью. Последние две лекции и будут посвящены этим точным результатам. В настоящей лекции мы сконцентрируем свое внимание на тех результатах, которые применимы для конечных значений N , в том числе и для $N = 3$, а в следующей лекции займемся теоремами о на-

существовании ядерных сил, т.е. случае, когда $N \rightarrow \infty$.

Итак, пусть число частиц N конечно, и парные потенциалы заданы. Основные результаты, которые представляют наибольший интерес для связанных состояний системы N частиц и которыми мы будем здесь заниматься — это верхние и нижние пределы для основного и возбужденного уровней системы и условия существования уровней (необходимые и достаточные).

А. Верхние пределы для уровней и достаточные условия существования.

Верхние пределы получаются относительно просто, поскольку в нашем распоряжении всегда имеется принцип Рэлея — Ритца. Пусть имеется совокупность n нормированных и всюду конечных функций ψ_t ($\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$), которые мы последовательно ортогонализуем по отношению друг к другу, и пусть гамильтониан системы имеет вид:

$$H = T + \sum_{i,j} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \quad (I)$$

где T — оператор кинетической энергии, из которого извлечена энергия движения центра инерции (точное определение см. ниже). Тогда истинное значение n -го уровня энергии удовлетворяет неравенству: $E_n < E_n^{(t)}$

(2)

$$\text{где } E_n^{(t)} = (\psi_n, H \psi_n^{(t)}) \quad (3)$$

Отметим, что потенциальная энергия V_{ij} может зависеть от спинов и изоспинов частиц, содержать также в явном

виде оператор импульса (силы, зависящие от скорости) и включать бесконечную отталкивающую сердцевину. При этом, если пробная функция $\psi^{(x)}$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и истинное решение, то неравенство (2) попрежнему выполняется.

Для того, чтобы получить верхний предел $E_n^{(t)}$, наиболее близкий к истинному значению, желательно поточнее угадать пробную функцию и тут все зависит от умения и изобретательности исследователя. Мы будем использовать функции метода K - гармоник - гиперсферические функции. Их достоинство состоит в том, что взяв достаточно большое число гармоник, тогда в силу теорем Рэлея-Ритца включение каждой дополнительной гармоники уменьшает величину $E_n^{(t)}$, т.е. происходит приближение к истинному значению энергии. Таким образом, метод действует автоматически и обеспечивает нужную точность. Напомним, что в первых двух лекциях говорилось о быстрой сходимости метода для потенциалов, не содержащих сильного отталкивания, в случае трех и четырех частиц и были даны соответствующие оценки.

Здесь пробную функцию для N частиц мы возьмем в виде разложения по K - гармоникам и посмотрим, какие общие заключения можно сделать в самом простом случае, когда мы ограничиваемся гармоникой с наименьшим значением K /1/.

Сначала рассмотрим случай N - бозонов и для простоты не будем учитывать спин и изоспин. Массы частиц пусть равны m_i , а координаты $\vec{r}_i$. Разложение по K - гармоникам имеет вид:

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \rho^{-\frac{3N-5}{2}} \sum_{K, \nu} u_K^\nu \chi_K^\nu(\rho) \quad (4)$$

$$\text{где } \rho^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} \rho_i^2; \rho_i = \vec{r}_i - \vec{R}; \vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \quad (5)$$

Подстановка разложения (4) в уравнение Шредингера или же подстановка (4) в (3) и варьирование по функциональным элементам $\delta \chi_k^v(\rho)$ приводит к системе уравнений:

$$\frac{d^2 \chi_k^v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d \chi_k^v}{d\rho} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{(K + \frac{3N-5}{2})^2}{\rho^2} \right] \chi_k^v = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{k'v'} V_{kk'}^{vv'} \chi_{k'}^{v'} \quad (6)$$

K пробегает значение $L, L+2, \dots$ или $L+1, L+3$ в зависимости от четности системы с полным моментом L .

v пробегает все возможные значения из набора $D(K)$.
Как и раньше,

$$V_{kk'}^{vv'}(\rho) = \int d\Omega_{3N-3} U_k^v \sum_{i,j} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) U_{k'}^{v'} \quad (7)$$

В общем случае N частиц, как и для 3-х частиц, $V_{kk'}^{vv'}$, ведет себя при малых ρ так же как парные потенциалы $V_{ij}(r)$ при малых r , а при больших ρ , $V_{kk'}^{vv'} \sim \frac{1}{\rho^3}$. В наиболее важном для бозонов случае, для $K \neq K', = 0$ имеем:

$$W_N(\rho) = V_{00}^{00}(\rho) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3N-3}{2})}{\Gamma(\frac{3N-6}{3})} \frac{1}{\rho^3} \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{-3} \times \\ \times \int_0^{\rho \alpha_{ij}} r^2 dr \left(1 - \frac{r^2}{\alpha_{ij}^2 \rho^2} \right)^{\frac{3N-8}{8}} V_{ij}(r) \quad (8)$$

где $\alpha_{ij} = \left[\frac{m(m_i + m_j)}{m_i m_j} \right]^{\frac{1}{2}}$

Заметим теперь, что уравнение (6), если в нем оставить член с $K = K', = 0$, в точности есть рациональное уравнение Шредингера с орбитальным моментом $\ell = \frac{3N-6}{2}$ и потенциалом $W_N(r)$

. Следовательно, используя вариационный принцип (2), можно сформулировать следующую теорему:

Теорема: Пусть E есть основное состояние системы N частиц и пусть $E_\ell[W_N]$ есть энергия связанного состояния двух частиц с приведенной массой m , орбитальным моментом ℓ , взаимодействующих через посредство потенциала $W_N(r)$ (8). Тогда выполняется неравенство:

$$E \leq E_\ell = \frac{3N-6}{2} [W_N] \quad (9)$$

Найти $E_{\frac{3N-6}{2}}[W_N]$ из решения одномерного уравнения Шредингера это уже простая задача, которая может быть решена многими способами. Главное, что облегчает нахождение

$E_\ell[W_N]$, это следующее обстоятельство. Напишем уравнение (6) для $K = 0$ в виде $\psi(\rho) = \frac{\chi(\rho)}{\rho}$

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{\left(\frac{3N-6}{2}\right)\left(\frac{3N-4}{2}\right)}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} W_N(\rho) \right] \psi = 0 \quad (10)$$

и определим эффективную потенциальную энергию:

$$W_{\text{эфф}}(\rho) \equiv \frac{2m}{\hbar^2} W_N(\rho) + \frac{(3N-4)(3N-6)}{\rho^2} \quad (11)$$

Как кинетическая энергия (второй член в (II)), так и потенциальная $W_N(\rho)$ велики и растут с ростом N . Последнее можно, например, установить из формулы (8), вынося $V_{ij}(r)$ в точке верхнего предела (если $V_{ij}(r)$ монотонно меняющийся притягивающий потенциал), откуда

$$W_N(r) \leq \sum_{i < j}^N V_{ij}(\rho^{\alpha_{ij}}) \quad (12)$$

Поэтому для достаточно больших N $W_{\text{эфф}}$ гораздо больше,

чем радиальная кинетическая энергия
хорошей оценкой является

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} \quad \text{и достаточно}$$

$$E \frac{3N-6}{2} [W_N] \cong W_{\varphi\varphi}(\rho_0) \quad (I3)$$

где ρ_0 - точка минимума $W_{\varphi\varphi}$

$$\frac{dW_{\varphi\varphi}}{d\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \rho_0 \quad (I4)$$

Эта оценка (I3) оказывается достаточно точной (лучше 10%) уже при $N \sim 10$.

Из теоремы немедленно можно вывести такое следствие:

Если в системе двух тел с потенциалом $W_N(r)$ и орбитальным моментом $l = \frac{3N-6}{2}$ имеется уровень, то основное оостояние соответствующей системы N - тел имеет отрицательную энергию.

И здесь возникает такая проблема. Казалось бы, что система N тел должна иметь связанное состояние с энергией

$E < E \frac{3N-6}{2} [W_N]$, однако может случиться, что подсистема из $N-1$ - тел имеет еще более глубокое связанное состояние, и тогда система тел несвязана. Для системы безонов с чис-

то притягивающим взаимодействием весьма вероятно (во всяком случае это можно установить из метода K - гармоник), что основное состояние N тел глубже, чем основные состояния

$N-1$, $N-2$, ... тел. Реальный пример трития подтверждает это мнение. Однако для фермионов это, повидимому, не так - см. реальный пример и . Было бы интересно установить какие-либо строгие теоремы по этому поводу. Еще один интересный вопрос, нерешенный до сих пор: - пусть мы уменьшаем глубину парного потенциала, тогда связанные состояния начнут постепенно исчезать, но в каком порядке это произой-

дет? Кажется естественным, что сначала исчезнет двухчастичное состояние, за ним трехчастичное и т.д.

Разберем теперь несколько примеров.

1) Ньютоновский потенциал

$$V_{ij} = -\frac{g^2}{r} ; \quad m_i = m \quad (I5)$$

с помощью (8) получаем $W_N(r) = -\frac{\eta_N^2}{r}$, где

$$\eta_N^2 = \frac{g^2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N(N-1)}{N-2} \frac{\Gamma(\frac{3N-2}{2})}{\Gamma(\frac{3N-6}{2})} ; \quad (I6)$$

Уравнение (I0) с таким $W_N(r)$ легко решается, и мы получаем:

$$E_N \leq -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{\eta_N^4}{(3N-4)^2} \quad (I7)$$

Отсюда видно, как быстро растет энергия с ростом числа частиц

$$\left| \frac{E_3}{E_2} \right| = \left(\frac{32}{5\pi} \right)^2 \sim 4 ; \quad \left| \frac{E_4}{E_2} \right| = \left(\frac{105}{32} \right)^2 \sim 10$$

Для $N \rightarrow \infty$ мы получаем, что $|E_N| \sim N^3$, что отражает сингулярный характер потенциала. Такое поведение в действительности имеет место, что можно установить добавив к оценке сверху (I7) оценку снизу, данную в /2/.

Отметим простую оценку снизу, годную для случая несингулярных парных потенциалов, ограниченных снизу постоянной $-|v|$, а именно, энергия связи N частиц в этом случае удовлетворяет неравенству:

$$-E \leq \frac{N(N-1)}{2} |v| \quad (I8)$$

2) Чтобы понять точность метода, возьмем именно такой потенциал, который можно ограничить снизу:

$$V_y(r) = -\frac{g^2}{r} + \frac{\lambda^2}{r^2} \quad (19)$$

Тогда легко снова получить и решить уравнение (10) и получить следующее выражение для энергии (подробное вычисление предоставляется проделать слушателям):

$$E_N \leq -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{\hbar^4 N^4}{\left\{1 + \left[(3N-5)^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \lambda^2 N(N-1)(3N-5)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2} \quad (20)$$

Тогда для больших N (18) и (20) дают следующие весьма жесткие ограничения:

$$-\frac{g^4 N^2}{4\pi \lambda^2} \geq E \geq -\frac{g^4 N^2}{8 \lambda^2} \quad (21)$$

Предел (18) весьма неточный, поскольку в нем полностью пренебрегается кинетической энергией, и потому истинная энергия ближе к выражению (20) т.е. приближение нулевой гармоникки оказывается здесь весьма точным.

3) Рассмотрим в качестве еще одного примера атом

Пусть
$$V_{ii}(r) = -\frac{e^2(N-1)}{r}; m_i \rightarrow \infty; V_{ij} = \frac{e^2}{r}; m_j = m; j \neq i$$

Для $N = 3$ (атом гелия) получаем

$$E \leq \beta^2 E_H = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2} \beta^2 \quad (22)$$

где $\beta = \frac{128}{15\pi} \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) \sim 2,25$, в то время как точное значение есть $\beta = 2,405$. Согласие, если учесть сложный характер взаимодействия в этой системе, весьма неплохое. Подобным образом, можно получить выражение для произвольного N , что и предоставляется читателю (см. также /1/ и другие при-

меры, приведенные там).

Мы рассмотрим выше случай N бозонов и границы сверху для уровней и достаточные условия существования связанных состояний. Перейдем теперь к системе N фермионов.

Как и раньше, мы разложим функцию N фермионов в ряд по всем гармоникам, а затем оставим гармонику с наименьшим K . Эта процедура полностью эквивалентна использованию в принципе Рэлея-Ритца пробной функции:

$$\Psi = \rho^{-\frac{3N-4}{2}} u_{K_{\min}}^v(\Omega) \chi_{K_{\min}}(\rho) \quad (23)$$

Здесь $u_{K_{\min}}(\Omega)$ есть угловая функция, отвечающая наименьшему K , возможному для антисимметричной по всем частицам функции, т.е.

$$\Delta_{\mathfrak{z}} (\rho^{K_{\min}} u_{K_{\min}}) = 0 \quad (24)$$

где $\Delta_{\mathfrak{z}}$ есть часть полного лапласиана за вычетом движения центра инерции, т.е.

$$\Delta_{3A} = \Delta_{\mathfrak{z}} + \frac{1}{A} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \quad (25)$$

Функции $u_{K_{\min}}$ были построены в /3/, там же были построены функции $u_{K_{\min}+1}$ и был дан рецепт построения функции $u_{K_{\min}+2}$. Нам сейчас потребуются только функции

$$P_{K_{\min}} \equiv \rho^{K_{\min}} u_{K_{\min}} \quad (26)$$

Забудем сначала о спине и изоспине и попытаемся построить полностью антисимметричный полином для N частиц наименьшей степени. Если бы у нас было только одно измерение, то ответ очень прост и давно известен

$$P_{kmin}(x) = \prod_{i>j=1}^N (x_i - x_j) \quad (27)$$

Степень полинома (27) равна $\frac{N(N-1)}{2}$, т.е. просто числу пар частиц; (27) можно также переписать в виде:

$$P_{kmin}(x) = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} \quad (28)$$

Легко видеть, что выражение (28) трансляционно-инвариантно и удовлетворяет уравнению (24). В трехмерном пространстве положение сложнее и интереснее. Определим сферический полином одной переменной степени $\bar{n} = 2n + l$

$$P_{nlm}(\vec{r}) = C_{nlm} |\vec{r}|^{2n+l} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (29)$$

C_{nlm} - некоторая константа

Утверждение: детерминант

$$P_{kmin}(\vec{r}) = \det \begin{vmatrix} P_{000}(\vec{r}_1) & P_{000}(\vec{r}_2) & \dots & P_{000}(\vec{r}_N) \\ P_{011}(\vec{r}_1) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{nlm}(\vec{r}_1) & \dots & \dots & P_{nlm}(\vec{r}_N) \end{vmatrix} \quad (30)$$

- а) трансляционно инвариантен;
- б) удовлетворяет уравнению (24), т.е. является гармоническим полиномом;
- в) есть антисимметричный полином наименьшей степени, если функции $P_{000} = \text{const}$, P_{011} , ..., P_{nlm} составляют на-

бор N различных функций (29) наименьших степеней. Отметим, что вместо функций (29) мы могли бы взять любую полную и независимую систему полиномов от одной переменной. Доказательство того утверждения довольно просто и предоставляется читателю (те, кого это затруднит, найдут доказательство в работе /3/. При доказательстве существенно помнить одно свойство детерминантов, они обращаются в нуль, когда две строки или столбца пропорциональны друг другу.

Подсчитаем степень полинома (30). Заметим, прежде всего, что зависимость степени $K_{\min}$ от числа частиц N в отличие от одномерного случая нерегулярна. А именно, существуют такие числа частиц, когда в (30) входят все сферические функции с данным l , или, точнее, когда все однородные полиномы степени $\bar{n}$ от одной переменной $\bar{r}_i$ использованы в детерминанте.

Такие значения определяются соотношением:

$$N = \frac{1}{6}(\bar{n}_0 + 1)(\bar{n}_0 + 2)(\bar{n}_0 + 3) \quad (31)$$

где $\bar{n}_0$ - максимальная степень однородных полиномов, использованных в (30). Для таких N выражение $K_{\min}$ легко вычислить:

$$K_{\min} = \frac{\bar{n}_0(\bar{n}_0 + 1)(\bar{n}_0 + 2)(\bar{n}_0 + 3)}{8} \quad (32)$$

Ясно, что $\bar{n}_0$ пробегает целые значения: $\bar{n}_0 = 0, 1, 2, \dots$ и тогда соотношение (32) и (31) определяют зависимость $K_{\min}$ как функцию N (при этом $\bar{n}_0$ является параметром). Для N , превышающих одно из значений (31) на единицу, $K_{\min}$ вырастает сразу на $\bar{n}_0 + 1$ и продолжает расти линейно с ростом до следующего значения из набора (31). Легко увидеть следую-

щие свойства полиномов (30):

а) их заполнение соответствует оболочкам (пока в абстрактном смысле, поскольку мы не ввели спин и изоспин);

б) значения (31) не что иное как "магические числа" частиц;

в) K_{min} испытывает скачок роста вблизи "магических" значений (31). Эти факты предопределяют оболочечную структуру ядра, которая проявилась в последующих расчетах, но мы сейчас не будем на этом останавливаться, а отметим лишь одно свойство: в силу (27) и (28), если бы ядра были одномерными, то никакой оболочечной структуры у них не существовало бы, что подтверждает интуитивное представление об оболочке, как о каком-то слое в трехмерной структуре ядра).

Вопрос: а если бы ядра были двумерные, была бы у них оболочечная структура?

Введем спин и изоспин. Тогда вместо функций (29) нам нужно взять функции

$$\Phi_{n_i l_i m_i}^{\mu_i \tau_i}(\vec{p}_i) = C_{n_i l_i m_i} \rho_i^{2n_i + l_i} Y_{l_i m_i}(\theta_i, \varphi_i) \alpha^{\mu_i \tau_i} \quad (33)$$

где $\alpha^{\mu_i \tau_i}$ - спин-изоспиновая функция i -го нуклона. Полином (30) теперь нужно строить из функций (33) и если мы выберем снова в детерминанте N функций вида (33), различных и наименьшей возможной степени, то свойства а) - в) Утверждения сохраняется, за исключением того, что $P_{K_{min}}$ будет удовлетворять обобщенному принципу Паули, с учетом спина и изоспина, а не будет просто антисимметричен. Вместо числа $\bar{n}_0$ нужно ввести два числа: максимальную степень функции (33) входящей в $P_{K_{min}}$, обозначим ее M_p для протонов и M_n

нейтронов.

Тогда магические числа нейтронов и протонов равны /4":

$$N_{n,p} = \frac{1}{3} (M_{n,p}+1)(M_{n,p}+2)(M_{n,p}+3) \quad (34)$$

и полное число частиц $N = N_p + N_n$, а соответствующее значение K_{min} равно:

$$K_{min} = \frac{1}{4} [M_n(M_n+1)(M_n+2)(M_n+3) + \\ + M_p(M_p+1)(M_p+2)(M_p+3)] \quad (35)$$

Мы можем здесь повторить все, что говорилось об оболочках, заполнении и т.п., однако вместо этого ограничимся "дважды магическими" значениями чисел частиц (34) и потребуем установить верхний предел для уровней энергии в таких системах. Эти значения N_n, N_p , а также N и K_{min} приведены в табл. I.

Итак, используя функцию (23) в качестве пробной в методе Рэлея-Ритца, мы получаем /4/:

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty d\rho \chi(\rho) \left\{ -\frac{1}{2m} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} \right] + V(\rho) \right\} \chi(\rho)}{\int_0^\infty d\rho \chi^2(\rho)} \quad (36)$$

Здесь

$$L = K_{min} + \frac{3N-6}{2}$$

$$V(\rho) = \frac{\langle \int d\Omega V_{K_{min}}^*(\Omega) \sum_{i,j=1}^N \hat{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) U_{K_{min}} \rangle}{\langle \int d\Omega U_{K_{min}}^*(\Omega) U_{K_{min}}(\Omega) \rangle} \quad (37)$$

Скобки в (37) означают суммирование по спин-изоспиновым индексам. Как обычно, $V(r)$ есть оператор в спин-изоспиновом пространстве:

$$V(r) = V_{33}(r) P_3^+ P_3^+ + V_{13}(r) P_3^- P_3^+ + V_{31}(r) P_3^+ P_3^- + \\ + V_{11}(r) P_3^- P_3^-; \quad (38)$$

Конкретная подстановка выражения (30) в (37) несколько после утомительных вычислений дает:

$$V(\rho) = \frac{1}{(\rho\sqrt{2})^3} \int_0^{\rho/\sqrt{2}} r^2 dr \left(1 - \frac{r^2}{2\rho^2}\right)^{L-1} \sum_{\substack{v=33,13 \\ 11,31}} V_v(r) Q_v^{M_n M_p}(x); \quad (39)$$

$$x = \frac{r^2}{2\rho^2 - r^2};$$

$$Q_v^{M_1 M_2}(x) = \sum_{t=0}^{2\max\{M_1, M_2\}} \frac{\Gamma(L + \frac{3}{2})}{\Gamma(L-t)\Gamma(t + \frac{3}{2})} q_{v,t}^{M_1 M_2} x^t \quad (40)$$

а $q_{v,t}^{M_1 M_2}$ — численные коэффициенты, явное аналитическое выражение для которых выглядит несколько громоздко. Обширные таблицы этих коэффициентов даны в работе /4/. Глядя на выражение (36) мы можем сформулировать теорему, полностью аналогичную данной выше для бозонов.

Теорема: n -й уровень ядра, состоящего из N_n нейтронов и N_p протонов, взаимодействующих попарно с потенциалом (38), ограничен сверху n -ым уровнем частицы с массой m и моментом L в поле $V(\rho)$, где $V(\rho)$ теперь, в отличие от (8) дается выражением (39). Существенно (34), то любое добавление тензорных и спин-орбитальных сил не меняет $V(\rho)$, поскольку полная волновая функция (28) в этом случае отвечает заполненным оболочкам и вклады этих потенциалов обращаются в нуль.

Как и в случае бозонов, вместо решения уравнения, следующего из (36),

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\rho^2} + V(\rho) + \frac{L(L+1)}{2m\rho^2} \right\} \chi(\rho) = E \chi(\rho) \quad (41)$$

для нахождения нижних уровней энергии с хорошей точностью можно искать минимум функции

$$W(\rho) = V(\rho) + \frac{L(L+1)}{2m\rho^2} \quad (42)$$

$$\left. \frac{dW(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0; \quad W(\rho) \approx W(\rho_0) + \frac{1}{2}(\rho-\rho_0)^2 W''(\rho_0) \quad (43)$$

и тогда энергия дается приближенным выражением

$$E_n = W(\rho_0) + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (44)$$

где ω связана с $W''(\rho_0)$ следующим образом:

$$\omega = \frac{\sqrt{W''(\rho_0)}}{m} \quad (45)$$

Смысл использованного приближения состоит в том, что глубина эффективной ямы $W(\rho_0)$ для $N \geq 10$ больше 100 Мэв, в то время как $\hbar\omega$ гораздо меньше $W(\rho_0)$ и если $W(\rho_0)$ растет с ростом числа частиц, то $\hbar\omega$ падает. В результате точность приближенной формулы (44) для основного состояния не хуже нескольких *mev*, по сравнению со ста или более *mev* для E_n .

Теперь мы можем использовать какой-нибудь конкретный потенциал, полученный из данных по $N-N$ рассеянию и подставить его в формулу (39) или (44) и тем самым получить верхние пределы для энергии. В табл.2 приведены значения коэффициентов $g_{v,t}^{M_1 M_2}$ для нескольких наименьших значений M_1 и M_2 , с помощью которых читатель может получить верхнюю границу для уровней для любого выбранного им потенциала, ибо процедура как было показано выше, весьма проста. Надо, однако, иметь в виду, что потенциалы, сингулярные при $r=0$ как $\frac{1}{r^3}$ или еще сильнее, дают расходящиеся результаты, которые неинтересны, поскольку мы получим $E < +\infty$, что всегда триви-

ально. Тот же ответ мы получаем для потенциала, имеющего жесткий кор. Пока формулы (39) и (44) использовались лишь для потенциалов без кора, или же потенциалов, имеющих мягкий кор. В табл.3 приведены некоторые данные расчетов; в табл.3а они выполнены Е.С.Гальперн и В.Н.Ляховицким, в табл.3-б М.В.Жуковым, в табл.3-в В.Рыбаченко и А.Седовым /5/. Мы видим, что во всех случаях в табл.3-в, энергия растет по модулю от He^4 до Ca^{40} слишком быстро, однако использованные потенциалы, повидимому, недостаточно хорошо подогнаны к фазам нуклон-нуклонного рассеяния при энергиях $E \geq 20 \text{ mev}$.

Можно отметить также, что очень большая величина получающейся энергии говорит в пользу выбранной пробной функции, поскольку истинная энергия должна быть еще больше по модулю.

Сравним теперь пробные функции в методе K - гармоник например, в методе Хартри-Фока с осцилляторными волновыми функциями. Для трех частиц, как показывает сравнение, проведенные в работе /6/, одинаковую точность в методе K - гармоник, в котором оставлено одна- две гармоники, дают примерно 6 функций с варьируемой зависимостью от ρ на каждую гармонику. Сравнение расчетов М.В.Жукова и работы /7/ показывают, что примерно такое же положение сохраняется для большего числа частиц (см. таблицу 3-в).

Мы вернемся к вопросу о зависимости энергии от числа частиц в следующей лекции, а сейчас перейдем к вопросу об ограничении значений уровней энергии снизу и о необходимых условиях для существования уровней в системе многих частиц.

Мы снова начнем со случая бозонов, хотя большинство полученных ниже результатов справедливо и для фермионов. Существует несколько методов получения нижних границ для энергии

уровня. Одни из них использовался уже давно в задаче двух тел, в частности, на этом пути были получены необходимые условия существования связанных состояний в системе двух тел - Т.Н. условия Иоста-Пайса /8/ и нижняя граница энергии основного состояния системы двух тел /9/. Общее обсуждение вариационных оценок энергии содержится у Спруха /10/, там же была высказана идея распространения результатов на случай большего числа частиц. Конкретные выражения для нижней границы энергии связи и необходимые условия существования уровней в системе N частиц были даны в работе /11/. Ниже мы будем следовать в основном работе /11/.

Запишем уравнение Шредингера для N частиц.

$$\left\{ -\hbar^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \Delta_i + \sum_{i>j=1}^N V_{ij}(\vec{r}_{ij}) - E \right\} \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad (46)$$

и введем координаты Якоби для отделения движения центра масс:

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= \alpha_i \left[-M_i \vec{r}_{i+1} + \sum_{j=1}^i m_j \vec{r}_j \right]; \quad i=1, 2, \dots, N-1 \\ \vec{R} &= \frac{1}{M_N} \sum m_i \vec{r}_i \end{aligned} \quad (47)$$

$$\text{где } \alpha_i = \left(\frac{m_{i+1}}{m M_i M_{i+1}} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad M_i = \sum_{j=1}^i m_j \quad (48)$$

масса m_i введена из соображений размерности и в остальном произвольна. Тогда оператор кинетической энергии приобретает вид:

$$T = \frac{1}{2M_N} \Delta_{\vec{R}} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_{x_i} \quad (49)$$

Переходя к интегральному уравнению и вводя свободную функцию Грина, получаем

$$\Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}) = \int d\vec{x}'_1 \dots d\vec{x}'_{N-1} G(E, \vec{x} - \vec{x}') \times \\ \times \sum_{i>j}^N V_{ij}(\vec{r}'_{ij}) \Phi(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_{N-1}) \quad (50)$$

Координаты $\vec{r}'_{ij}$ должны быть выражены через $\vec{x}'_i$, из них нам понадобится только

$$\vec{r}'_{ij} - \vec{r}'_{kl} = \alpha_{ij} \vec{x}'_i \quad (51)$$

$$\text{где } \alpha_{ij} = \sqrt{\frac{m(m_i + m_j)}{m_i m_j}} \quad (52)$$

Функция Грина удовл. уравнению:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i} - E \right] G_N(E, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}) = - \prod_{i=1}^{N-1} \delta(\vec{x}_i) \quad (53)$$

Легко показать, переходя к Фурье - представлению (мы представляем это читателю), что G_N имеет вид:

$$G_N(E, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3N-3}{2}}} \left(\frac{q}{\rho} \right)^{\frac{3N-5}{2}} K_{\frac{3N-5}{2}}(q\rho) \quad (54)$$

где $q = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$; $\rho^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \vec{x}_i^2$, т.е. это есть обычное ρ , определенное раньше в (5).

Из (54) видно, что для отрицательной энергии E функция Грина всюду отрицательна и экспоненциально убывает, когда любое из расстояний $|\vec{x}_i| \rightarrow \infty$.

Деля правую и левую часть выражения (50) на положительно определенную функцию $\Phi_t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1})$, мы получаем

$$\frac{\Phi(\vec{x})}{\Phi_t(\vec{x})} = \int d\vec{x}' G(E, \vec{x} - \vec{x}') \sum_{i>j}^N V_{ij} \frac{\Phi(\vec{x}')}{\Phi_t(\vec{x}')} \frac{\Phi_t(\vec{x}')}{\Phi_t(\vec{x})} \quad (55)$$

Здесь мы для краткости пишем $\bar{X}$ вместо набора $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{N-1})$. Потенциалы V_{ij} могут иметь отталкивающую и притягивающую части; наши результаты будут тем более справедливы, если мы заменим V_{ij} на

$$V_{ij} \rightarrow V_{ij}^{(+)}(\bar{r}) = V_{ij}(\bar{r}) \theta[-V_{ij}(\bar{r})] \quad (56)$$

т.е. если мы выброшим отталкивающую часть потенциала, тогда ядро уравнения (55) положительно (все кроме $\Phi(\bar{x})$ положительно) и вводя символ

$$\|f(\bar{x})\| = \max[f(\bar{x})]$$

можно получить

$$\frac{\Phi(\bar{x})}{\Phi_t(\bar{x})} \leq \left\| \frac{\Phi(\bar{x})}{\Phi_t(\bar{x})} \right\| \int d\bar{x}' G_N(E, \bar{x} - \bar{x}') \sum_{i>j}^N V_{ij} \frac{\Phi_t(\bar{x}')}{\Phi_t(\bar{x})} \quad (57)$$

Беря максимум от обеих частей (57) и сокращая на $\left\| \frac{\Phi(\bar{x})}{\Phi_t(\bar{x})} \right\|$ получаем самую общую форму, определяющую и нижнюю границу энергии и необходимые условия существования уровня:

$$\left\| \int d\bar{x}' G_N(E, \bar{x} - \bar{x}') \sum_{i>j}^N V_{ij}^{(+)}(\bar{r}_{ij}) \frac{\Phi_t(\bar{x}')}{\Phi_t(\bar{x})} \right\| \geq 1 \quad (58)$$

Это условие означает, что если для некоторого положительно определенного $\Phi_t(\bar{x})$ и энергии $E < 0$ величина, стоящая в (58) слева окажется меньше единицы, то связанных состояний (точнее, состояний с $E < 0$ с данными потенциалами $V_{ij}^{(+)}(\bar{r})$, и тем более с потенциалами $V_{ij}(\bar{r})$, в системе N частиц не может быть. С другой стороны, если для некоторого $\Phi_t(\bar{x})$ и некоторого $E = E_0 < 0$ левая часть (58) обращается в единицу,

то имеет место неравенство для истинного значения энергии связи:

$$E_{\text{св}} \geq E_0 \quad (59)$$

Условие (59) следует из монотонного убывания модуля G_N с ростом модуля E , причем это убывание равномерно по аргументам $\vec{X}_i - \vec{X}'_i$.

Отметим, что неравенство (58) превращается в равенство, если вместо $\varphi_i(\vec{x})$ подставить точное решение уравнения Шредингера (46), и потому близость нижнего предела к истинной энергии зависит от того, насколько близкой к истинной нам удалось выбрать пробную функцию

Теперь мы займемся выбором ф-ции $\varphi_i(\vec{x})$. Простейший выбор - это $\varphi_i = \text{const}$. Тогда интегрируя каждый член (58) по отдельности и пользуясь (51), (52) и равенством:

$$\int d\vec{x}'_2 \dots d\vec{x}'_{N-1} G_N(E, \vec{x}_1 - \vec{x}'_1; \dots, \vec{x}_{N-1} - \vec{x}'_{N-1}) = G_2(E, \vec{x} - \vec{x}') \quad (60)$$

которое легко получается из Фурье-представления для G_N , получаем

$$\left\| \int d\vec{r}' G_2(E, \vec{r} - \vec{r}') \sum_{i>j}^N V_{ij}^{(-1)}(\alpha_{ij} \vec{r}') \right\| \geq 1 \quad (61)$$

Здесь G_2 есть обычная двухчастичная функция Грина:

$$G_2(E, \vec{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi r} e^{-qr} \quad (62)$$

Если потенциал V_{ij} - центральный, то интегрирование по углам в (61) дает

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left\| \int_0^\infty dr' r' \sum_{i>j}^N V_{ij}^{(-1)}(\alpha_{ij} r') \frac{1}{2qr} \{e^{-q(r+r')} - e^{-q(r-r')}\} \right\| \quad (63)$$

Используя мажорирующую оценку

$$\frac{1 - e^{-qs}}{2qs} \geq \frac{e^{-q(r-s)} - e^{-q(r+s)}}{2qr} \quad (64)$$

получаем оценку снизу, эквивалентную формуле Швингера /9/ для двух тел:

$$E \geq -\frac{2m}{4\hbar^2} \left\{ \int_0^\infty ds \sum_{i>j}^N V_{ij}^{(-)}(\alpha_{ij}s) e^{-2qs} - 1 \right\}^2 \quad (65)$$

Здесь еще неявно содержится энергия под знаком интеграла; правая часть только уменьшится, если мы выбросим экспоненту, и тогда получим оценку в явном виде:

$$E \geq -\frac{1}{2\hbar^2} \left\{ \int_0^\infty dr \sum_{i>j}^N \sqrt{\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}} V_{ij}^{(-)}(r) \right\}^2 \quad (66)$$

Следует отметить, что оценка для энергии в процессе перехода от (58) к (66) делалось все более явной, но все менее жесткой (точной).

С другой стороны, подставляя (64) в (63) и полагая $q=0$, получаем необходимые условия существования связанного состояния в системе N тел, аналогичные соответствующим условиям Иоста-Пайса:

$$-\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r \sum_{i>j}^N V_{ij}^{(-)} \left(\sqrt{\frac{m(m_i + m_j)}{m_i m_j}} r \right) \geq 1 \quad (67)$$

Выше мы говорили и показывали на конкретных примерах, что оценки для энергии сверху, полученные, например, методом K -гармоник, оказываются весьма точными. Этого нельзя, к сожалению, сказать об оценках снизу, даваемых формулами (65)–(66) для N частиц, так же как и для соответствующих формул

для двух частиц. Даже в наиболее благополучном случае трех и четырех частиц они дают сильно завышенную (по модулю) энергию связи. Случай больших N неблагоприятен потому, что энергия, как видно из (66), растет слишком быстро, пропорционально N^4 для несингулярных потенциалов, в то время как истинное поведение при больших N , как будет показано ниже, есть N^2 . Далее, весь формализм и оценки (65), (66), конечно, справедливы и для фермионов, а не только бозонов, но истинная энергия связи фермионов лежит выше, чем для бозонов и потому оценки (65), (66) в этом случае слишком грубы. Наконец, в оценки и в необходимые условия (67) входит потенциал $V^{(-)}$, из которого исключена отталкивающая часть, которая в реальном случае нуклон-нуклонного взаимодействия весьма велика. Поэтому оценки (65) и (66) оказываются чересчур грубыми в случае нуклонных систем.

Тем не менее, описанный выше подход имеет два важных достоинства. Во-первых, полученные формулы весьма просты и дают правильную картину, например, из (67) видно, что даже слабый потенциал, несвязывающий двух частиц, может связать достаточно большое их количество. Во-вторых, у нас есть неограниченная свобода получать все более точные результаты, подставляя все более реалистическую функцию $\varphi_t(\vec{x})$ в выражение (58) — напомним, что раньше мы подставляли вместо $\varphi_t(\vec{x})$ постоянную. Теперь мы можем наметить путь, как уточнить, например, оценки. Для этого вместо $\varphi_t(\vec{x})$ следует подставить ф-цию (4) в выражение (58) и оставить там вклад наименьших K . Улучшение (58) для фермионов наталкивается на определенные трудности: мы не можем прямо подставить (23) вместо φ_t в (58), поскольку при выводе (58) существенно использовалась положительная оп-

ределенность $\varphi_{\varepsilon}(\vec{x})$. Весьма возможно, тем не менее, что такая подстановка дает правильный и близкий к истинному результат для энергии. Доказать это пока не удалось.

Теперь мы перейдем к другому подходу, позволяющему получить нижнюю границу для энергии связи. Этот подход развивался в основном благодаря работам Поста и Холла /12/, а также Калоджеро и Маркоро /13/. Мы будем следовать работе /13/, поскольку в этой форме метод выглядит наиболее просто, хотя ряд результатов из /12/ несколько точнее (ограничительнее), чем результаты, полученные в /13/.

Рассмотрим систему N одинаковых частиц, бозонов или фермионов с массой m , взаимодействующих между собой с помощью потенциала $V(r_{ij})$ и с внешним полем $W(\vec{r}_i)$. Обозначим основное состояние такой системы через E_N . Чтобы найти границу снизу для E_N , рассмотрим вспомогательную систему из n частиц, массы которых равны $m_i = \frac{m}{h_i}$, взаимодействующих друг с другом с потенциалами $V_{ij}(r_{ij}) \equiv g_{ij} V(r_{ij})$ и с внешним полем $f_i W(r_i)$. Индекс i пробегает значения от 1 до n . Обозначим энергию основного состояния такой вспомогательной системы через $E_n(h, g, f)$, где h, g и f означают наборы констант $\{h_i\}, \{g_{ij}\}, \{f_i\}$. Теперь мы можем сформулировать теорему:

Теорема: если для некоторого $n \leq N$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^n h_i = N; \quad \sum_{i \neq j=1}^n g_{ij} = N(N-1)$$

$$\sum_{i=1}^n f_i = N;$$
(68)

то энергия основного состояния вспомогательной системы меньше энергии основного состояния первоначальной системы из N частиц

$$E_n \geq E_n(h, g, f) \quad (69)$$

Доказательство: рассмотрим принцип Рэлея-Ритца, примененный к вспомогательной системе:

$$\begin{aligned} \{ \Psi, [\sum_{i=1}^n h_i T_i + \sum_{i \neq j=1}^n g_{ij} V(r_{ij}) + \sum_{i=1}^n f_i W(r_i)] \Psi \} \geq \\ \geq E_n(h, g, f) \end{aligned} \quad (70)$$

Здесь Ψ любая нормируемая пробная функция и $T_i = -\frac{1}{2m} \Delta_i$; выберем ее симметричной или антисимметричной по отношению к перестановкам любой пары частиц. Тогда ясно, что $(\Psi, T_i \Psi)$, также $(\Psi, V(r_{ij}) \Psi)$ не зависят от номера, и пользуясь условиями (68) мы можем переписать (70) в виде:

$$\{ \Psi [\sum_{i=1}^N T_i + \sum_{i \neq j=1}^N V(r_{ij}) + \sum_{i=1}^N W(r_i)] \Psi \} \geq E_n(h, g, f) \quad (71)$$

Взяв теперь в качестве Ψ точную, но неизвестную нам функцию N частиц Ψ_N , мы сразу получаем слева в (71) просто E_N , т.е. неравенство (69).

Теперь мы можем рассмотреть несколько примеров:

I) Положим $n = N-1$; $h_i = f_i = \frac{N}{N-1}$

$$g_{ij} = g = \frac{N}{N-2}; \quad 1 \leq i; j \leq n$$

Применяя (69), получаем:

$$E_N \geq E_{N-1} \left(\frac{N}{N-1}, \frac{N}{N-2}, \frac{N}{N-1} \right) = \frac{N}{N-1} E_{N-1} \left(1, \frac{N-1}{N-2}, 1 \right) \quad (72)$$

Последнее равенство следует из уравнения:

$$E_n(h, g, f) = h E_n\left(1; \frac{g}{h}; \frac{f}{h}\right) \quad (73)$$

которое просто установить в помощью (70).

2) Возьмем теперь $n=2$; $h_i = f_i = \frac{1}{2}N$; $g_{12} = g_{21} = \frac{N(N-1)}{2}$
для простоты положим внешнее поле равным нулю:

$$E_n \geq \frac{1}{2} N E_2(1, N-1, 0) \quad (74)$$

Пост /12/ своим методом получил близкую, но несколько лучшую оценку

$$E_n \geq (N-1) E_2\left(1; \frac{1}{2}N; 0\right) \quad (75)$$

Метод Поста /12/ основан на предварительном выделении движения центра масс, однако он не обладает такой общностью, как метод Калоджеро-Маркьоро /13/.

Мы сейчас используем результат /75/ в двух конкретных ситуациях. Во-первых, сформулируем следующую теорему:

Теорема: если потенциал V/r_{ij} недостаточно глубокий, чтобы связать две одинаковые частицы, то минимальное число частиц, необходимое чтобы получить основное соотношение с отрицательной энергией, равно наименьшему целому числу, которое больше чем $2G$, где $G V/r_{ij}$ дает нулевую энергию связи для двух частиц.

Доказательство следует непосредственно из /75/. Любопытно, что с ее помощью можно оценить количество атомов гелия, составляющих наименьшую устойчивую каплю жидкого гелия при нулевой температуре. При учете неточности определения феноменологического потенциала это количество равно 11 ± 1 . Во-вторых, рассмотрим пример ньютоновского потенциала /15/. С помощью формулы /75/ возникает следующая оценка: $E_N \geq \frac{N-(N-1)}{16} me^4$

Для оценки сверху мы можем использовать формулу /17/. Это дает для трех частиц:

$$\frac{9}{8}me^4 \leq E_3 \leq -\left(\frac{16}{5\pi}\right)^2 me^4 \quad (76)$$

Для четырех частиц:

$$-3me^4 \leq E_4 \leq -\left(\frac{105}{64}\right)^2 me^4 \quad (77)$$

Точность этих оценок равна $\pm 4\%$ и $\pm 5,5\%$ соответственно. Другие примеры приведены в работах (12).

Отметим, наконец, специфику фермионного случая. Как и раньше, нижний предел для энергии связи фермионов получится, если мы учтем антисимметрию для волновой функции вспомогательной системы, насчитывающей n частиц с $n \leq N$. Ясно, что нижний предел будет тем ближе к точному значению энергии, чем точнее мы учитываем антисимметрию во вспомогательной системе. Например, если мы взяли $n = 2$, то надо учитывать в (75) только p, f и т.д. состояния, что дает весьма нестрогий предел. Наоборот в примере 1), ф-ла (72), учитывается антисимметрия $N - 1$ частицы, что дает более точный предел для энергии. Основная теорема (69) может быть использована для получения и многих других примеров, вывод которых мы представляем читателю в качестве упражнений.

Существуют и другие методы получения нижних пределов, которые, однако, не столь просты как вышеупомянутые и требуют проведения вариационных расчетов, как и для определения верхних пределов. К ним относятся методы, основанные на выделении из гамильтониана сепарабельных членов (14) и метод Темпла (15), близко связанный с ними по существу.

В методе Темпла устанавливается следующее неравенство:

$$E_0 \geq \langle \mathcal{H} \rangle - \frac{\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2}{E_1 - \langle \mathcal{H} \rangle} \equiv E_L \quad (78)$$

здесь $\langle \mathcal{H} \rangle = \int \varphi_t \mathcal{H} \varphi_t d\tau = (\varphi_t, \mathcal{H} \varphi_t)$

$$\langle \mathcal{H}^2 \rangle = (\varphi_t, \mathcal{H}^2 \varphi_t)$$

и φ_t есть варьируемая пробная функция, а E_1 в (78) есть энергия первого возбужденного состояния с той же симметрией, что и основное состояние. В принципе, E_1 может быть началом непрерывного спектра. Видно, что (78) требует проведения вариационных расчетов для E_L и результаты и параметры для оптимального E могут отличаться от результатов для оптимального верхнего предела E_U , поскольку варьируются разные функционалы. Результаты вычислений, проведенных в (16) для ряда полуреалистических потенциалов приведены в табл.4. Там же указано значение нижнего предела, полученного методом Поста (12). Мы видим, что оценки сверху и снизу в ряде случаев весьма близки, однако надо иметь в виду, что в тех случаях когда известно точное значение, оно как правило, ближе к верхнему пределу. Отметим, что метод К-гармоник, не содержащий никаких множителей для подавления отталкивающего кора в потенциале Эйкемейера и Хакенбройха (последняя графа в табл.7) тем не менее дает неплохие результаты уже при учете трех низших гармоник (6), а именно, $E_U = -5,44$ для трития и $-23,67$ для He^4 .

Л И Т Е Р А Т У Р А

- I. F. Calogero, Yu. A. Simonov Phys. Rev. 169, 789 (1968).
2. H. R. Post Proc. Roy. Soc. A79, 819 (1962).
F. Calogero, C. Marchioro (unpublished)
3. Д. А. Симонов. Я. Ф. 7, 1210 (1968).
4. A. M. Badalyan, F. Calogero, Yu. A. Simonov
"Lower bound to the magnitude of the nuclear binding energy of doubly magic nuclei". Preprint Università di Roma, to be published in Nuovo Cimento
5. В. Ф. Рыбаченко, А. А. Садовой, Н. М. Чулков. ЯФ, 10, 1156, 1969.
В. Ф. Рыбаченко. А. А. Садовой, ЯФ, 11, № 3 (1970).
6. Fabre de la Ripelle Preprint 157, Orsay (1969).
7. R. Jost, A. Pais Phys. Rev. 74, 33 (1965).
8. A. B. Volkov Nucl. Phys. 82, 840 (1951), см. также
V. Borzmann Proc. Acad. Sci. USA 38, 961 (1952).
9. J. Schwinger Proc. Acad. Sci. USA 47, 122 (1961).
10. L. Spruch Lectures in Theoret. Physics, Boulder, Colo. 1961
L. Spruch in "Few-nuclear problems" Proc. of 9-th Summer meeting of nuclear physicists; Herceg Novi, 1964
11. F. Calogero, Yu. A. Simonov Nuovo Cim. 568, 71 (1968).
12. H. R. Post Proc. Phys. Soc. A69, 936 (1956),
A79, 819 (1962).
H. R. Post, R. L. Hall Proc. Phys. Soc. A90, 381 (1967).
R. L. Hall Proc. P. Soc. A91, 787 (1967).
О. А. Савченко, ЯФ 6, 645 (1967).
13. F. Calogero, C. Marchioro Journal of Math. Phys. 10, 562 (1969).

- I4. N.W. Basley, D.W. Fox Phys. Rev. I24, 483 (1961).
R. Sugar, R. Blankenbecler Phys. Rev. I368, 476 (1964),
OM. TAKKE IO .
I5. G. Temple Proc. Roy. Soc. AII9, 276 (1928).
I6. R. Afnan, Y.C. Tang Phys. Rev. I75, 1337 (1968).

Таблица I.

Лекция № 3 (В.А.Симонов)

N_h	$\vdots N_p \equiv Z$	$\vdots N_h + N_p = A$	$\vdots K_{min}$
2	2	4	0
8	2	10	6
8	8	16	12
20	8	28	36
20	20	40	60
40	20	60	120
40	40	80	180
70	40	110	300
70	70	140	420
112	70	182	630
168	112	280	1176
240	240	480	2519

Таблица 2.

(Лекция № 3 Д.А.Симонов).

M_1	M_2	N_n	N_p	A	$\frac{1}{9} g_{33}, t$	$\frac{1}{3} g_{32}, t$	$\frac{1}{3} g_{31}, t$	$g_{n,e}$	t
0	0	2	2	4	0	2	2	0	0
I	0	8	2	10	0 5	7,5 -1	5 0	0 3	0 1
I	I	8	8	16	0 12 0	15,5 -3 7,5	15,5 -3 7,5	0 12 0	0 1 2
2	2	20	20	40	0 85,5 -45 52,5 0	60,78125 -31,875 90,9375 -39,375 29,53125	60,78125 -31,875 90,9375 -39,375 29,53125	0 82,5 -45 52,5 0	0 1 2 3 4

Таблица № 3-б. Энергия ядер.

Емев	I	II	III	IV	V	VI	Эксперим. Е мев
He ⁴	31,5	55,2	28,2	26,2	20,8	17,2	28,3
C ¹²	96,8	110,7		72,1	47,0		92,16
O ¹⁶	259,0	406	214	199,5	141,6	110,6	127,6
Ca ⁴⁰	1854	3000	1385	1208	758	536	342,05

Таблица № 3-в. Параметры использованных потенциалов.

Но- мер вар.	Тип по- тенциа- ла	V _{3I}				V _{I3}			
		V ^c	r ^c	V ^o	r ^o	V ^c	r ^c	V ^o	r ^o
I	Прямо- угольн. яма	0	0	35,31	2,043	0	0	13,63	2,583
II	Юкава	0	0	50,37	1,377	0	0	46,88	1,170
III	Яма с отталки.	70	0,6	41,85	1,98	70	0,6	16,97	2,48
IV	—	100	0,6	43,73	1,96	100	0,6	17,87	2,45
V	—	50	1,00	74,93	1,75	50	1,00	25,74	2,28
VI	—	70	1,00	81,74	1,73	70	1,00	29,25	2,22

В.Ф.Рыбаченко, А.А.Садовой ЯФ III, № 4.

Таблица 3-а

М.В. Жуков

I-й Волковский потенциал.

E_{mev}	:	E_{calc}	:	радиус	E_{exp}
He^4	как у Волкова	-28,01 mev	1,37φ	-28,2 mev	
O^{16}	как у Волкова	-144,47 mev	1,47φ	-127,16	
Ca^{40}	400 mev	-	3 φ	-342,05	

Жуков

Волков

Таблица 4.

Потенц.	: Эксп. с кор. (A)			: Сумма гауссов			$E_{експ.}$ $: Hakenbroich$		
	E_v	E_L	радиус	E_v	E_L	r_0	E_v	E_L	r_0
$H^3 E_v$	-7,63	-17,24	1,62φ	-7,74	-12,38	1,59	-7,00	-8,04	1,71
$E_L \varphi$				-7,70	-8,88		-6,97	-7,57	1,60
$He^4 E_v$	-30,28	-54,2	1,39φ	-31,09	-32,43	1,34	-27,74	-33,8	1,44
$E_L \varphi$							-27,61	-28,7	1,52

ЛЕКЦИЯ № 4

ПРОБЛЕМА НАСЫЩЕНИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ

Силы, действующие между частицами в системе из N частиц, называются насыщающимися, если энергия основного состояния в такой системе E_N удовлетворяет условию:

$$E_N \geq C_1 N \quad (1)$$

где константа C_1 не зависит от N . Ясно, что для конечных и небольших N , если основное состояние существует (т.е. для потенциалов $V(r) > -\frac{1C1}{r^2}$), ограничение (1) всегда можно установить. Поэтому важно, чтобы (1) выполнялось для $N \rightarrow \infty$. Часто системы, обладающие свойством (1), называют также стабильными, а системы, для которых выполняется неравенство

$$E_N < C_2 N^\alpha \quad (2)$$

где $C_2 < 0$ и $\alpha > 1$ называют нестабильными.

Здесь мы будем интересоваться свойствами взаимодействия, которое будем считать для простоты двухчастичным и которое приводит к насыщению (1) или же к нестабильности (2). Мы обнаружим, что возможны вообще говоря (если исключить случаи вырождения впрочем, пока не исследованные) два режима: либо (1), либо (2) с $\alpha = 2$ в зависимости от того, удовлетворяют ли потенциалы взаимодействия некоторым условиям, которые называются условиями насыщения. Условия насыщения бывают двух типов:

1) достаточные, т.е. если потенциалы удовлетворяют достаточным условиям насыщения, то поведение (1) обеспечено; 2) не-

обходимые, т.е. если потенциалы не удовлетворяют необходимым условиям, то энергия основного состояния системы для достаточно больших N подчинена неравенству $E < - \text{Const } N^2$, где Const положительна. Нашей конечной целью является вывод достаточных и необходимых условий насыщения для потенциалов ядерных сил, включающих зависимость от спина, изотоп-спина, орбитального момента и т.д. Мы забудем вначале, что реальные ядра имеют массовые числа, не превышающие 300, и кроме ядерного взаимодействия имеется кулоновское. Основанием для применения теорем настоящего параграфа, справедливых, строго говоря, лишь в пределе $N \rightarrow \infty$, к реальным ядрам служат результаты предыдущей главы, где приводились цифры верхнего предела для энергии от He^4 до Ca^{40} в случае ненасыщающего потенциала, которые близко следуют закону (2) с $\alpha = 2$.

В конце этой главы мы поговорим о возможных добавках в ядерных силах и их роли в вопросе насыщения, в том числе и о кулоновских силах. Проблема насыщения для чисто кулоновских сил в отличие от ядерных носит другой характер и требует иного аппарата, а потому мы приведем в конце изложения лишь результаты без доказательства, поскольку они представляют самостоятельный интерес.

Наконец, случай гравитационных сил, имеющий ясное практическое приложение, может быть рассмотрен весьма просто в методе К-гармоник для получения верхних пределов для энергии и в методе Поста и Калоджеро-Маркьоро из предыдущей лекции для получения нижних пределов. Этот раздел будет заключать настоящую главу.

Итак, выведем сначала необходимые и достаточные условия насыщения центральных сил, зависящих только от расстояния,

поскольку учет обменного характера сил приводит к принципиальным осложнениям.

Отметим предварительно, что в классической физике определение насыщения сил или стабильности, имеет вид ограничения на потенциальную энергию N частиц:

$$V_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \geq -NB \quad (3)$$

для всех значений $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ и постоянной B . Если система стабильна в классическом смысле, т.е. выполняется (3), то она тем более стабильна в квантовом смысле, т.е. выполняется (I). Это утверждение основано на положительной определенности оператора кинетической энергии. Обратное утверждение не всегда верно.

Итак, мы можем сформулировать достаточное условие для классической стабильности и оно будет тем самым достаточным условием для квантовой стабильности.

Теорема I: Если парный потенциал может быть представлен в виде:

$$V(\vec{r}) = V^{(1)}(\vec{r}) + V^{(2)}(\vec{r})$$

где $V^{(1)}(\vec{r}) \geq 0$

для всех r , а

$$V^{(2)}(\vec{r}) = \int d\vec{p} e^{i\vec{p}\vec{r}} V^{(2)}(\vec{p}) \quad (4)$$

где $V^{(2)}(\vec{p})$ абсолютно интегрируемая функция, удовлетворяющая условию:

$$V^{(2)}(\vec{p}) \geq 0 \quad (5)$$

(т.е. потенциал $V^{(2)}(\vec{r})$ положительного типа), тогда система N частиц стабильна и (I) выполнено.

Доказательство: $V^{(1)}(\vec{r})$ выбрано специально, чтобы имело Фурье-компоненту с нужными свойствами. В частности, абсолютная интегрируемость $V^{(2)}(\vec{p})$ и условие (5) означают, что $V^{(2)}(0)$ конечно и больше нуля. Далее, очевидно, если система стабильна с взаимодействием $V^{(2)}(\vec{r})$, то она тем более стабильна с взаимодействием $V(\vec{r}) = V^{(1)}(\vec{r}) + V^{(2)}(\vec{r})$

Запишем:

$$V_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \equiv \sum_{i < j=1}^N V^{(2)}(r_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V^{(2)}(\vec{r}_{ij}) - \frac{N}{2} V^{(2)}(0) =$$

$$= \frac{1}{2} \int d\vec{p} |n(\vec{p})|^2 V^{(2)}(\vec{p}) - \frac{N}{2} V^{(2)}(0) \geq - \frac{N}{2} V^{(2)}(0) \quad (6)$$

Здесь $n(\vec{p}) = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{p}\vec{r}_i}$

Теорема доказана (она была впервые доказана Фишером и Рюэлем /1/ (см. также /2/).

Примечание к теореме: Теорема I дает только достаточные условия насыщения, но вовсе не необходимые; а именно, если условия теоремы не выполняются, например, $V^{(2)}(p_0) \leq 0$ для некоторого p_0 , то это вовсе не означает неустойчивости системы. Пример - отталкивающая прямоугольная яма, которая, конечно, не приводит к неустойчивости, но тем не менее, Фурье-компонента потенциала отрицательна при некоторых импульсах.

Может возникнуть вопрос: а каким поведением в пространстве должен обладать потенциал, чтобы система была стабильной (т.е. возникало насыщение). На этот вопрос отвечает

вторая теорема.

Теорема 2. Если парный потенциал $V(r)$ обладает следующими свойствами:

$$V(r) \begin{cases} \geq \frac{C}{r^{3+\varepsilon}} & , \quad r < a_1 \\ \geq -w & , \quad a_1 < r < a_2 \\ \geq -\frac{C'}{r^{3+\varepsilon'}} & , \quad r > a_2 \end{cases} \quad (7)$$

где $C, \varepsilon, w, C', \varepsilon', a_1, a_2$ любые положительные постоянные, то система N частиц ($N \rightarrow \infty$) стабильна. Доказательство теоремы основано на теореме I. Мы не будем его здесь приводить, интересующиеся могут найти его в работе /1/.

Примечания к теореме 2: степень 3, входящая в (7), не случайна: для пространства размерности V вместо 3 следует поставить степень V . Далее, для стабильности системы может возникать опасность, как видно из (7), и из области малых r , и из области больших r . Но практически область больших r не бывает опасна: ядерные силы спадают быстрее любой степени $\frac{1}{r}$ при $r \rightarrow \infty$; взаимодействие между нейтральными атомами спадает быстрее $\frac{1}{r^3}$ (а именно, взаимодействие, усредненное по состояниям системы двух атомов, всегда дается ван-дер-ваальсовым законом $V(r) \sim \frac{const}{r^6}$) взаимодействие кулоновское всегда состоит из отталкиваний и притяжений, которые гасят друг друга на больших расстояниях, т.е. возникает экранизация зарядов. В результате во всех этих случаях остается одна опасная область - это область вблизи $r = 0$. Поведение (7) достаточно для насыщения. Ясно, что поведение типа твердого тела также приводит к насыщению, однако если кор мягкий, надо пользоваться теоремой I и вычислить фурье-компоненту от потенциала.

Пример I. Возьмем потенциал Морза:

$$V(r) = [e^{-2\alpha(r-R)} - 2e^{-\alpha(r-R)}] V_0 \quad (8)$$

Это есть пример потенциала с мягким кором.

Фурье-компонента потенциала

имеет вид

$$V(\vec{p}) = \frac{8\alpha}{\sqrt{2}\pi} e^{\alpha R} \left[\frac{e^{\alpha R}}{(p^2 + 4\alpha^2)^2} - \frac{1}{(p^2 + \alpha^2)^2} \right] V_0 \quad (9)$$

Легко видеть, что при условии $e^{\alpha R} \geq 16$, $V(p) \geq 0$ для всех p и поэтому потенциал (8) приводит к насыщению. Пока мы еще не знаем, что будет, если $e^{\alpha R} < 16$, но ниже мы вернемся к этому примеру. Потенциал вида (8) был использован в /3/ и параметры α , R и полная амплитуда V_0 , не входящая в (8), были найдены из подгонки к фазам нуклон-нуклонного рассеяния в области 0-300 Мэв. Как мы видим, для насыщения нужно, чтобы верхняя точка потенциала $V(0) = e^{2\alpha R} - 2e^{\alpha R}$ превышала глубину $|V_{\min}| = 1$ более чем в 224 раза. Параметры потенциала /3/ следующие:

$$\text{Для } V_{31} : V_0 = 119,49, \quad R = 0,8668$$

$$\alpha = \frac{1}{0,3408}$$

$$\text{Для } V_{13} : V_0 = 61,99, \quad R = 0,9365$$

$$\alpha = \frac{1}{0,3957}$$

Как видно из приведенных цифр, потенциалы V_{31} и V_{13} удовлетворяют условиям насыщения. Эти потенциалы были использованы Ахмадходжаевым, Беляевым, Вжепционко для нахождения энергии связи трития методом Бэйтмена /4/, что дало в результате разумную цифру 9,125 Мэв.

Перейдем теперь к основной теореме — Фишера-Рунеля /1,2/, содержащей как достаточные, так и необходимые условия насыщения.

Теорема 3: Пусть потенциал $V(r)$ кусочно-гладкий, и $V(0)$ конечно:

А. Тогда, если существует число $n \geq 2$ и некоторый набор векторов $\{\vec{r}_i^0\}$, $1 \leq i \leq n$, такой, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V(\vec{r}_i^0 - \vec{r}_j^0) = -V_0 < 0 \quad (10)$$

то существуют постоянные $w^* > 0$ и N^* такие, что энергия основного состояния квантовомеханической системы из N одинаковых частиц удовлетворяет условию:

$$E_0(N) \leq -w^* N^2 \quad \text{для} \quad N \geq N^* \quad (11)$$

т.е. система нестабильна. При этом для частиц, подчиняющихся Бозе-Эйнштейновской или Больцмановской статистике размерность пространства V может быть произвольной. Для Ферми-Дираковских частиц предполагается, что $V \geq 3$ или же $V = 2$ и тогда V_0 должно быть достаточно велико.

Б. Обратное утверждение эквивалентно достаточным условиям насыщения:

Если неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V(\vec{r}_i^0 - \vec{r}_j^0) \geq 0 \quad (12)$$

выполняется для любого n и любого набора векторов $\{r_i^0\}$, то энергия основного состояния удовлетворяет неравенству:

$$E_0(N) \geq -\beta N \quad (13)$$

где $B > 0$ и не зависит от N , т.е. система стабильна.

Доказательство: Докажем сначала обратное утверждение, т.е. вторую часть теоремы. Потенциальная энергия системы из N частиц удовлетворяет условию (в силу (I2)):

$$V = \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \frac{N}{2} V(0) \geq -\frac{N}{2} V(0) \quad (I4)$$

Так как кинетическая энергия всегда положительна, то (I4) приводит немедленно к (I3).

Перейдем теперь к доказательству утверждения А. Для простоты возьмем $n = 2$, и два вектора $\vec{r}_1^0$ и $\vec{r}_2^0$. Условие (I0) тогда имеет вид:

$$2V(\vec{r}_1^0 - \vec{r}_2^0) + 2V(0) = -V_0 > 0 \quad (I5)$$

Построим вокруг векторов $\vec{r}_1^0$ и $\vec{r}_2^0$ два куба Γ_1^0 и Γ_2^0 , с размерами d :

$$\Gamma_1^0: \begin{aligned} -\frac{d}{2} &\leq x_1 - x_1^0 \leq \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} &\leq y_1 - y_1^0 \leq \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} &\leq z_1 - z_1^0 \leq \frac{d}{2} \end{aligned}$$

и те же условия для Γ_2^0 . Из-за кусочной гладкости $V(r)$ мы можем всегда выбрать размеры кубов Γ_1^0 и Γ_2^0 , т.е. величину d столь малой, что условие (I5) выполняется не только для самих $\vec{r}_1^0$ и $\vec{r}_2^0$, но и для всех $r_1 \in \Gamma_1^0$ и $r_2 \in \Gamma_2^0$, кроме того пусть Γ_1^0 и Γ_2^0 не перекрываются.

Возьмем пробную волновую функцию в виде:

$$\begin{aligned} \psi_n(x, y, z) = & \left(\frac{d}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \sin\left(a_n \frac{2\pi x}{d}\right) \sin\left(b_n \frac{2\pi y}{d}\right) \sin\left(c_n \frac{2\pi z}{d}\right) \times \\ & \times \theta\left(\frac{d}{2} - |x|\right) \theta\left(\frac{d}{2} - |y|\right) \theta\left(\frac{d}{2} - |z|\right) \end{aligned} \quad (I6)$$

где a_n, b_n, c_n представляют собой ряд натуральных чисел $a_n = 1, 2, 3, \dots$ и то же для b_n и c_n . Индекс n у функции (16) относится к разным наборам троек чисел (a_n, b_n, c_n) так что, например, $n = 1$ есть $(1, 1, 1)$, $n = 2$ есть $(2, 1, 1)$, $n = 3$ есть $(1, 2, 1)$ и т.д.

Определим теперь функцию

$$\psi_i(r) = \psi_n(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (17)$$

Таким образом, индекс i означает совокупность двух индексов: λ и n , где $\lambda = 1, 2$. Для построения пробной функции для N -фермионов нам нужно (для простоты забыв о спине)

n_1 функций $\psi_n(\vec{r} - \vec{r}_i)$ вида (16) и n_2 функций $\psi_n(\vec{r} - \vec{r}_i)$

$n_1 + n_2 = N$; так чтобы . Теперь построим

Слэтеровский детерминант

$$\Psi = \det [\psi_i(\vec{r}_j)] \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Вычислим с помощью функций (18) среднюю потенциальную энергию:

$$\bar{V} = \langle \Psi, \sum_{i < j=1}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \Psi \rangle \quad (19)$$

Обычные правила редукции приводят нас к форме /5/

$$\bar{V} = \sum_{i < j=1}^A (\langle ij | V | ij \rangle - \langle ij | V | ji \rangle) \quad (20)$$

где

$$\langle ij | V | lm \rangle \equiv \int d\vec{r} d\vec{r}' \psi_i(\vec{r}) \psi_j(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \psi_l(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}') \quad (21)$$

В силу ортогональности функций ψ_i и ψ_j второй член в (20) (обменный) пропорционален $\delta_{ss'} \delta_{nn'}$ и потому растет самое большее как N . Мы можем им пренебречь, ибо прямой член в (20) даст гораздо более сильную зависимость. В самом деле, подставляя функции (17) в (21) при $l=i$; $m=j$ и вынося $V(\vec{r}-\vec{r}')$ за знак интеграла, поскольку $V(r)$ слабо меняется внутри кубов Γ_1^0 и Γ_2^0 , и далее используя ортонормированность функций (17), получаем:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \sum_{s,s'=1,2} n^s n^{s'} V(\vec{r}_1^0 - \vec{r}_1^0) + \text{члены порядка } N \quad (22)$$

Выбрав теперь $n^s = n^{s'} = \frac{N}{2}$, имеем

$$\bar{V} = \frac{N^2}{16} [2V(\vec{r}_1^0 - \vec{r}_2^0) + 2V(0)] = - \frac{N^2 V_0}{16} \quad (23)$$

Нам осталось теперь только показать, что кинетическая энергия не может компенсировать этот катастрофический рост потенциальной энергии с числом частиц.

Для частиц, подчиняющихся статистике Больцмана или Бозе-Эйнштейна мы можем взять в качестве волновой функции произведение функций (17) со всеми $a_n = b_n = c_n = 1$. Тогда получим для средней кинетической энергии:

$$\langle T \rangle_N = N \frac{3 \hbar^2 \pi^2}{2 m d^2}$$

и результат (II) доказан.

Для частиц, подчиняющихся статистике Ферми-Дирака, выбор функции (18) с $n_1 = n_2 = \frac{N}{2}$ дает

$$\langle T_N \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m d^2} 2 \mathcal{D}\left(\frac{N}{2}\right) \equiv \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m d^2} 2 \sum_{f=1}^{N/2} |\vec{p}_f|^2 \quad (25)$$

где последняя сумма берется по $\frac{N}{2}$ различным трехмерным векторам $\vec{l}_i$, которые имеют целые положительные проекции на все три оси.

Минимальное значение $\mathcal{D}(n)$ достигается, когда вектора $\vec{l}_i$ заполняют октант 3-мерной сферы. Объем этого октанта равен $n \equiv \frac{N}{2} \equiv \frac{1}{8} AL^3$, где L - радиус сферы и A - постоянная. Ясно, что $\mathcal{D}(n)$ пропорционально моменту инерции октанта относительно одной из осей, поэтому

$$\mathcal{D}(n) \approx \frac{1}{8} BL^5 \sim n^{\frac{5}{3}} \quad (26)$$

Отсюда мы получаем (при желании мы могли бы получить границы сверху и снизу)

$$\langle T_N \rangle \sim \text{Const} \frac{\hbar^2}{m d^2} N^{\frac{5}{3}} \quad (27)$$

Совокупность оценок (23) и (27) и учет принципа Рэлея-Ритца для основного состояния энергии немедленно дает (II). Теорема доказана.

Примечания к теореме 3.

1) Выбранная волновая функция, сконцентрированная в инфинитезимальных кубах Γ^0 и Γ_2^0 может быть весьма далекой от реальности, однако нам было достаточно взять ее, чтобы доказать асимптотическую теорему 3. Численно кинетическая энергия (27) может быть весьма велика из-за наличия d^2 в знаменателе, однако для достаточно больших N (зависящих от d) условие (II) будет выполнено.

2) Теорема легко обобщается на случай $n > 2$. Мы не будем сейчас этим заниматься.

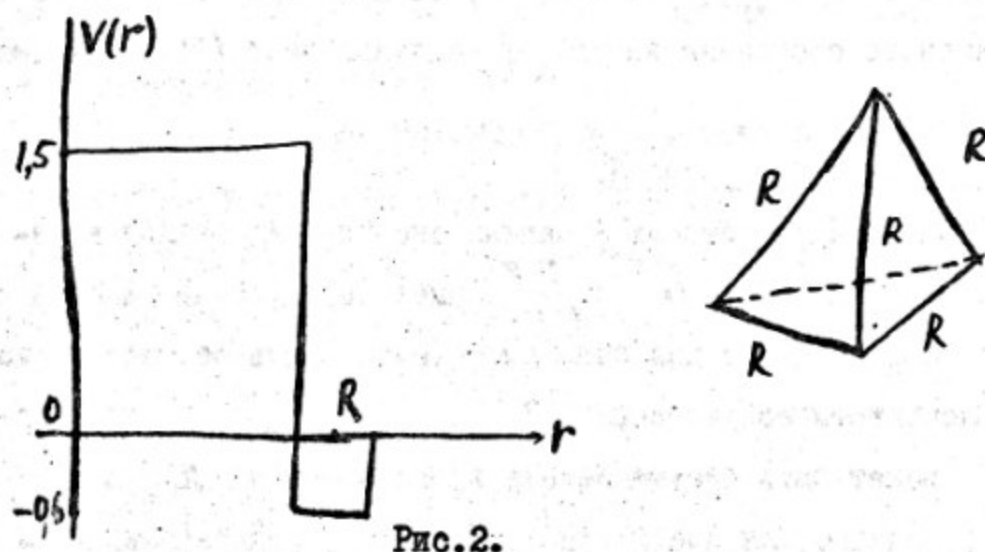
3) Размерность пространства входит только в оценку кине-

тической энергии и в общем случае вместо (27) получается $N \frac{V+2}{V}$, откуда при $V = 2$ следует замечание в тексте теоремы.

4) Видно, что теорема в трехмерном пространстве выглядит совершенно одинаково для бозонов и фермионов, и если система бозонов с данным взаимодействием нестабильна, то система фермионов будет точно также нестабильна. Стабильность, т.е. насыщение, обеспечивается только потенциальной энергией, а не кинетической.

5) Если (10) выполнено и система нестабильна, то одновременно, как показано Фишером и Рюэлем [1,2], расходится большая статистическая сумма и никакие термодинамические величины не могут быть определены - все свойства системы перестают быть аддитивными и статистическая механика неприменима к такой системе, хотя и

Пример 2: Рассмотрим потенциал, изображенный на рис.2.



Здесь расстояние R и толщина области притяжения произвольны. Покажем, что потенциал $V(r)$ приводит к нестабильности. Сначала применим теорему 3, взяв $n = 2$ и рас-

стояние между $\vec{r}_1^0$ и $\vec{r}_2^0$, равным R . Тогда условие неустойчивости согласно (10) принимает вид:

$$V(R) + V(0) < 0$$

что не выполняется для нашего потенциала.

Положим теперь $n = 4$ и возьмем конфигурацию векторов чтобы они давали положение вершин тетраэдра. Условие (10) теперь имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^4 V(\vec{r}_i^0 - \vec{r}_j^0) = 12 V(R) + 4 V(0) < 0 \quad (28)$$

Для потенциала на рис.2 это условие выполняется, т.е. действительно, несмотря на произвольно узкую притягивающую часть потенциала, он оказывается ненасыщающим.

Вопросы: 1) попробуйте найти соотношение высоты и глубины у потенциала типа изображенного на рис.2, чтобы неустойчивость возникала только при $n = 3$; 2) для указанного выше потенциала выясните, есть ли неустойчивость, если взять $n = 5$.

Здесь уместно сделать следующее замечание. Если условие (10) выполняется только для какой-то определенной конфигурации $\{\vec{r}_i^0\}$ и определенного n , то это означает, что с увеличением числа частиц N они будут равномерно группироваться в n точках, например, в вершинах тетраэдра, как на рис.3 и энергия будет расти пропорционально N^2 . Размеры системы, конечно, не растут, а остаются постоянными. Именно это и подразумевается под словом неустойчивость; спадания системы, падения всех частиц на какой-либо центр не происходит, если потенциал в нуле несингулярен (или сингулярен и положителен).

Удобно переформулировать теорему 3, если перейти от

дискретных наборов векторов $\{\vec{r}_i^0\}$ к непрерывным распределениям. Это действительно можно сделать, если воспользоваться теорией распределений. Приведем окончательную формулировку /2/:

Теорема 3-а. Если $V(r)$ есть конечная непрерывная функция и существует положительная мера $\mu(\vec{r})$ такая, что

$$\iint V(\vec{r} - \vec{r}') d\mu(\vec{r}) d\mu(\vec{r}') < 0 \quad (29)$$

то $V(r)$ не приводит к насыщению (выполняется неравенство (II)).

Наоборот, если для любой положительной меры $\mu(\vec{r})$ выполняется обратное неравенство, т.е.

$$\iint V(\vec{r} - \vec{r}') d\mu(\vec{r}) d\mu(\vec{r}') \geq 0 \quad (30)$$

то $V(r)$ приводит к насыщению.

Примечания к теореме: Слова "положительная мера" означают просто, что можно записать $d\mu(\vec{r})$ как $\alpha(\vec{r}) d\vec{r}$ с положительным $\alpha(\vec{r})$, причем $\alpha(\vec{r})$ может быть и суперпозицией δ -функций. Например, замена $d\mu(\vec{r}) \rightarrow \sum_{i=1}^n \delta(\vec{r} - \vec{r}_i^0) d\vec{r}$ сразу же переводит теорему 3-а просто в теорему 3.

Следствия из теорем:

I) Выберем $d\mu(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) d\vec{r}$. Тогда условие (29) переходит в следующее

$$V(0) < 0 \quad (31)$$

Итак, если потенциал в нуле сколь угодно слабо притягивающий, то невзирая на всю его остальную часть, он приводит к неустойчивости системы.

2) Положим $d\mu(\vec{r}) = e^{-2pr^2} d\vec{r}$, тогда (29) переходит в

$$\int_0^{\infty} dr r^2 e^{-p^2 r^2} V(r) < 0 \quad (32)$$

В частном случае $p = 0$ получаем еще более простой результат

$$\int_0^{\infty} r^2 dr V(r) \equiv V(p) \Big|_{p=0} < 0 \quad (33)$$

Итак, если (32) или (33) выполнены, то система неустойчива. Результат (33) был известен и использовался уже давно как критерий неустойчивости, хотя его строгий вывод помимо /1,2/ был дан не так давно Добрушиным (им же был получен и ряд других, более точных признаков /6/). К сожалению, среди некоторых физиков, занимающихся ядром, существует представление, что (33) является необходимым и достаточным критерием насыщения, т.е. если выполняется условие обратное (33), то система стабильна. Это конечно неправильно, т.к. легко нарушить (33), но одновременно выполнить (31).

Вернемся теперь к Примеру I. Мы видели там, что условие $e^{\alpha R} \geq 16$ дает $V(p) \geq 0$ и тем самым обеспечивает стабильность. Легко видеть, что обратное неравенство $e^{\alpha R} < 16$ приводит к тому, что $V(0) < 0$, т.е. выполняется (33) и система становится неустойчивой. Таким образом $e^{\alpha R} \geq 16$ является необходимым и достаточным условием стабильности.

3) Перейдем к Фурье-представлению в условиях (29) и (30). Получим вместо (29)

$$\int V(\vec{p}) |n(\vec{p})|^2 d\vec{p} < 0 \quad (34)$$

где
$$n(\vec{p}) = \int e^{i\vec{p}\vec{r}} d\mu(\vec{r})$$

Может показаться, что таким образом $V(p) < 0$ при некотором является достаточным условием ненасыщения, поскольку казалось бы мы можем выбрать $n(\bar{p})$ таким, чтобы сконцентрировать интеграл (34) в той области $\bar{p}$, где $V(\bar{p})$ отрицательно и тем самым обеспечить выполнение (34). Однако, это рассуждение ошибочно, поскольку в (34) надо учитывать, что $n(\bar{p})$ есть фурье-компонента положительной меры $d\mu(\bar{p})$, а это требование ограничивает форму $n(\bar{p})$.

Перейдем теперь к реальным ядерным силам, предполагая взаимодействие попрежнему парным. Проблема насыщения для ядерных сил исследовалась уже на ранних этапах развития ядерной физики /7/. Однако полученные результаты были оправданы только для потенциалов типа прямоугольной ямы (т.е. практически не меняющихся на протяжении всего радиуса взаимодействия), в то время как реальные ядерные силы, по-видимому, обладают гораздо более сложной формой /8/. Кроме того, нестрогий вывод условий насыщения в работах /7/ не позволял даже сразу сказать, являются ли эти соотношения необходимыми или достаточными. Наконец, недостаток рассмотрения в /7/ заключался еще и в том, что ненасыщенное (стянутое) состояние системы предполагалось сконцентрированным в одной точке ($N = 1$, в терминах теоремы 3), тогда как при сложном характере сил нестабильная система имеет другие конфигурации. Теорема 3 Фишера и Рюэля может быть обобщена на случай реальных ядерных сил, это было сделано в работе /9/; в одном из частных случаев (наиболее простом) возникают необходимые условия насыщения, совпадающие с полученными ранее в /7/. Ниже мы следуем работе /9/.

Итак, рассмотрим парный потенциал вида:

$$\begin{aligned} \hat{V} = & V_{33}(\vec{r}_{ij}) P_3^+(ij) P_\tau^+(ij) + V_{31}(\vec{r}_{ij}) P_3^+(ij) P_\tau^-(ij) + \\ & + V_{13}(\vec{r}_{ij}) P_3^-(ij) P_\tau^+(ij) + V_{11}(\vec{r}_{ij}) P_3^-(ij) P_\tau^-(ij) + \\ & + V_3^T(r_{ij}) S_{ij} P_\tau^{(+)}(ij) + V_1^T(\vec{r}_{ij}) S_{ij} P_\tau^{(-)}(ij) + \quad (35) \\ & + V_3^{LS}(r_{ij}) \vec{L}_{ij} (\vec{\delta}_i + \vec{\delta}_j) P_\tau^+(ij) + V_1^{LS} \vec{L}_{ij} (\vec{\delta}_i + \vec{\delta}_j) P_\tau^-(ij) \end{aligned}$$

Здесь $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$

$$\vec{L}_{ij} = -i\hbar \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} \right) \right] \quad - \text{относительный орби-}$$

тальный момент частиц i и j

$$P_3^\pm(ij) = \frac{1}{2} [1 \pm P_3(ij)] = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} (1 + \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j) \quad (36)$$

аналогичное выражение для $P_\tau^\pm(ij)$

$$S_{ij} = 3(\vec{\delta}_i \vec{n}_{ij})(\vec{\delta}_j \vec{n}_{ij}) - \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \quad (37)$$

а $n_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (38)$

В последующие результаты спин-орбитальный потенциал не дает вклада, это связано с характером используемой пробной функции. Теорема для потенциала (35) может быть сформулирована в виде теоремы 3, однако мы приведем здесь только ее в виде, аналогичном теореме 3-а.

Теорема 4. Если существуют четыре неотрицательных инте-

гральных мер $d\mu_\lambda(\vec{r})$, $\lambda = 1, 2, 3, 4$, таких что

$$\sum_{\lambda, \lambda'} \iint d\mu_\lambda(\vec{r}) d\mu_{\lambda'}(\vec{r}') \left\{ \sum_{\substack{v=33, 31 \\ 13, 11}} \alpha_v^{\lambda\lambda'} V_v(\vec{r}-\vec{r}') + (3n_z^2 - 1) \times \right. \\ \left. \times \sum_{v=3, 1} \beta_v^{\lambda\lambda'} V_v^p(\vec{r}-\vec{r}') \right\} < 0 \quad (39)$$

где

$$n_z = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')_z}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (40)$$

то в системе N частиц нет насыщения и энергия системы растет как

$$E(N) < -CN^2, \quad C > 0 \quad (41)$$

Здесь матрицы $\alpha_v^{\lambda\lambda'}$ и $\beta_v^{\lambda\lambda'}$ имеют следующий вид:

$$\alpha_{33} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{13} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство этой теоремы представляет собой простое обобщение доказательства теоремы 3 на случай спиновых и изоспиновых переменных. В этом случае индекс i у волновой функции (17) означает совокупность уже трех индексов: прежних j и n и, кроме того, спин-изоспинного индекса λ , пробегающего четыре значения ($\lambda = 1$ означает протон со спином вверх, $\lambda = 2$ протон со спином вниз, $\lambda = 3$ нейтрон со спином вверх и $\lambda = 4$ нейтрон со спином вниз. Индекс Z у n_Z в (40) означает проекцию на ось Z - ось квантования спина.

Более простая, но менее общая теорема может быть получена из теоремы 4, если предположить, что все интегральные меры пропорциональны друг другу:

Теорема 5. Пусть $d\mu(\vec{r})$ будет любой неотрицательной мерой и введем определения:

$$\tilde{V}_\nu = \iint d\mu(\vec{r}) d\mu(\vec{r}') V_\nu(\vec{r}-\vec{r}') \quad \nu = 33, 31, 13, 11 \quad (42)$$

$$\tilde{V}_\nu^T = \iint d\mu(\vec{r}) d\mu(\vec{r}') (3n_Z^2 - 1) V_\nu^T(\vec{r}-\vec{r}'), \quad \nu = 3, 1 \quad (43)$$

Тогда каждое из нижеследующих 4 неравенств есть необходимое условие для насыщения:

$$\tilde{V}_{33} + \tilde{V}_3^T \geq 0 \quad (44)$$

$$3\tilde{V}_{33} + \tilde{V}_{13} \geq 0 \quad (45)$$

$$3\tilde{V}_{33} + \tilde{V}_{31} + 3\tilde{V}_3^T + \tilde{V}_1^T \geq 0 \quad (46)$$

$$5\tilde{V}_{33} + \tilde{V}_{31} + \tilde{V}_{13} + \tilde{V}_{11} + 2\tilde{V}_{33}^T - 2\tilde{V}_1^T \geq 0 \quad (47)$$

$$9\tilde{V}_{33} + 3\tilde{V}_{31} + 3\tilde{V}_{13} + \tilde{V}_{11} \geq 0 \quad (48)$$

Примечания и следствия к теореме 5.

1) Теорема 5 означает, что если найдется такая неотрицательная функция $d\mu(\vec{r})$, с которой не будет выполнено хотя одно из неравенств (44)–(48), то система будет неустойчива, т.е. энергия системы будет расти как $-cN^2$, $c > 0$.

Доказательство теоремы 5 требует слишком много места и мы поэтому отсылаем интересующихся к работе /9/.

2) Предположим, что потенциалы $V_\nu(r)$ и $V_\nu^T(r)$ сферически симметричны и возьмем сферически-симметричную меру $d\mu(r)$. Тогда $\tilde{V}_\nu^T = 0$, так как $\bar{n}_2^2 = \frac{1}{3}$, и необходимыми условиями насыщения являются также условия (44)–(48) с

3) Положим $d\mu(\vec{r}) = e^{-2\rho^2 r^2} d\vec{r}$. Тогда (42) и (43) переходят в выражения

$$\tilde{V}_\nu = \int_0^\infty r^2 dr e^{-\rho^2 r^2} V_\nu(r), \quad \nu = 33, 31, 13, 11 \quad (49)$$

$$\tilde{V}_V^T = 0 \quad V = 3,1 \quad (50)$$

где ρ - произвольное число. Возьмем теперь два предельных случая:

а) $\rho = 0$. Тогда $\tilde{V}_V = \int_0^{\infty} r^2 dr V_V(r)$, $V_V^T = 0$ и условия (44)-(48) приобретают весьма простой вид;

б) $\rho \rightarrow \infty$. Если $V_V(0)$ конечно, а именно это предполагалось в условиях теоремы 3-а, то $\tilde{V}_V(\rho \rightarrow \infty) \sim V_V(0)$.

Мы получаем условия (44)-(48) для потенциалов взятых в точке $r = 0$ и эти условия в точности совпадают с условиями, полученными 30 лет назад Финбергом, Брейтом и Вигнером и др. /7/. По существу те же условия выведены в задаче 2 к § II6 "квантовой механики" Ландау и Лифшица /10/. Отметим, что эти условия, во-первых, являются необходимыми, но вовсе не достаточными, т.е. если потенциал удовлетворяет этим условиям насыщения, то это не гарантирует насыщения ядерных сил в системе. В работах /7/ и /10/ этот важный момент никак не подчеркивается. Во-вторых, эти условия представляют собой переупрощенный вариант условий (44)-(48) на случай гладких и медленно меняющихся в нуле потенциалов. Приведенные выше примеры 1 и 2 при всех значениях параметров потенциалов удовлетворяют условиям, выведенным в /7/ и /10/, однако, как было показано, они могут приводить к неустойчивости системы, если выбрать эти параметры надлежащим образом.

4) Рассмотрим несколько частных случаев, в которых играет роль тензорный потенциал. Например, выберем такое $d\mu(\vec{r})$, которое соответствовало бы распределению нуклонов в "блине", перпендикулярном оси квантования Z . Т.е. введем цилиндрические координаты:

$$d\mu(\vec{r}) = \rho d\rho e^{-\rho^2 \rho^2} dZ \delta(z) d\varphi \quad (51)$$

Тогда

$$\tilde{V}_V = \int_0^\infty r dr e^{-\rho^2 r^2} V_V(r), \quad V = 33, 31, 13, 11 \quad (52)$$

$$\tilde{V}_V^T = \int_0^\infty r dr e^{-\rho^2 r^2} V_V^T(r) \quad V = 3, 1 \quad (53)$$

Условия (44)–(48) с $\tilde{V}_V$ и $\tilde{V}_V^T$ из (52), (53) являются необходимыми условиями насыщения ядерных сил.

Вопрос: выведите необходимые условия для распределения, сконцентрированного вдоль оси Z .

5) Возникает вопрос о достаточных условиях для насыщения ядерных сил. Для сил, не зависящих от спина и изоспина (необменных сил), а также для сил, зависящих от сорта частиц, если в системе несколько сортов частиц, справедлива доказанная выше теорема I и ее обобщение, приведенное в работе /1/. Для ядерных сил с их обменным характером прямое обобщение теоремы I невозможно, однако и здесь можно получить некоторые результаты. Пока авторам работы /9/ удалось получить достаточные условия, которые отличаются от необходимых условий теоремы 5 и оказываются менее сграничительными, чем необходимые условия. Мы поэтому не приводим их здесь. В то же время достаточные условия содержатся в теореме 3 и теореме 3-а. Мы могли бы их сформулировать в рамках теоремы 4 следующим образом: если не существует ни одного такого набора положительных интегральных мер $d\mu_\lambda(\vec{r})$, таких что неравенство (39) выполняется, то ядерные силы приводят к насыщению.

Это утверждение пока не доказано, но даже если оно и

было бы доказано, то практической пользы от него немного — легче найти какие-нибудь $d\mu_2(\vec{r})$, для которых (39) выполняется, чем показывать, что это невозможно для любых $d\mu_2(\vec{r})$. Мы думаем (и надеемся подтвердить это конкретными доказательствами), что достаточные условия насыщения типа теоремы I должны существовать для ядерных сил, причем в форме условий (44)–(48), где каждое означает фурье-компоненту от потенциала. Это было бы наиболее естественным обобщением теоремы I на случай ядерных сил.

6) Теперь нам осталось испытать необходимые условия теоремы 5 на деле, т.е. подставить туда какие-нибудь реалистические потенциалы, подогнанные к данным нуклон-нуклонного рассеяния.

Потенциалы, использованные Рыбаченко и Садовым в табл. лекции 3, были подогнаны только к низкоэнергетической области рассеяния. В них присутствует только V_{31} и V_{13} . Легче всего использовать следствие 3-а к теореме 5, т.е. условия

$$\int_0^{\infty} V_{31}(r) r^2 dr < 0 \quad \int_0^{\infty} V_{13}(r) r^2 dr < 0 \quad (54)$$

Для всех этих потенциалов условия (54) не выполняются, что означает отсутствие насыщения и потому энергия должна расти как квадрат числа частиц (при $N \rightarrow \infty$). В таблице наблюдается рост типа $N^{\frac{3}{2}}$. Это, по-видимому, означает, что число частиц недостаточно велико, чтобы выполнялся асимптотический закон N^2 . Характерно, что с увеличением кода начало асимптотической области, где закон N^2 справедлив, отодвигается, как это и следует ожидать; переход от ненасыщающего потенциала к насыщающему может происходить за счет незначительного

изменения формы потенциала; ясно, что для каждого конечного N изменения энергии будет ничтожно малым, однако в асимптотическом пределе $N \rightarrow \infty$ мы получаем при таком переходе катастрофическое изменение не только величины, но даже и функциональной зависимости энергии от N . Практически это может достигаться за счет сдвига асимптотической области в сторону больших N по мере приближения потенциала к насыщающей форме.

Рассмотрим теперь потенциалы с мягким кором, введенные в работах Афнана и Танга /16/, лекция 3 и Волкова /7/, лекция 3, а также Хаккенбройха и Айкемайера /11/. Все они имеют вид суперпозиции потенциалов Гаусса, один из которых отталкивающий и подогнаны к фазам нуклон-нуклонного рассеяния в довольно большой области энергий. Читателю предлагается проверить, удовлетворяют ли эти потенциалы условиям насыщения.

Потенциалы с твердым кором, типа потенциала Хамады-Джонсона, разумеется удовлетворяют условиям насыщения, однако последнее время все большее внимание начинают привлекать реалистические потенциалы с мягким кором и зависящие от скорости, так называемые потенциалы ОВЕР, например, потенциалы Брайана-Скотта. Чтобы выяснить, удовлетворяют ли они условиям насыщения, мы должны обобщить полученные нами теоремы на случай сил, зависящих от скорости. Это обобщение еще не произведено, работа в этом направлении делается. Наконец, в последнее время весьма часто в расчетах трехнуклонных, а также и много-нуклонных систем используют нелокальные сепарабельные потенциалы, либо сочетание локального потенциала с сепарабельным отталкиванием на малых расстояниях (Керман и др. /12/).

Понятно, насколько важно при этом использовать условия насыщения и отбирать только такие потенциалы, которые удов-

летноруют этим условиям. Однако условия насыщения для нелокальных потенциалов до сих пор не сформулированы^{х/}.

Остается еще сказать о многочастичных и кулоновских силах в ядрах. Обобщение полученных теорем на случай многочастичных сил производится непосредственно и соответствующие аналоги теорем 3 и 3-а легко могут быть сформулированы. Однако, поскольку мы не знаем практически величины многочастичных сил и даже не знаем способа их экспериментального обнаружения, а с другой стороны, поскольку насыщение можно обеспечить с помощью одних только парных взаимодействий, вряд ли стоит останавливаться на этом вопросе подробнее.

Кулоновские силы в ядрах играют важную роль для тяжелых ядер и они, разумеется, сильно уменьшают энергию связи, однако вопрос насыщения связан не только с реальными ядрами, имеющими протоны, но также и с существованием нейтронной материи. Трудно представить себе ситуацию, когда насыщение сил в ядрах обеспечивалось бы за счет кулоновских сил — это могло бы быть при отталкивающем или насыщающем V_{33} и V_{11} , но ненасыщающих V_{31} и V_{13} . Однако в этом случае кулон начинает играть роль только для $N \sim 10^3 - 10^4$, т.е. в области далекой от реальных ядер.

х/ *В настоящее время необходимые условия насыщения сформулированы для нелокальных потенциалов, а также локальных сингулярных потенциалов (F. Calogero, Yu. A. Simonov, *lett. Nuovo. S. 4*, 219 (1970)). Кроме того, потенциалы зависящие от скорости должны удовлетворять весьма ограничительным условиям положительности (F. Calogero, Yu. A. Simonov, *Phys. Rev. A*, 25, 881 (1970)). В результате применения этих условий оказалось, что ни одна из существующих моделей не является приемлемой; в частности, потенциал Хамады-Джонстона и его модификации приводят к безданным спектру уже в задаче конечного числа нуклонов^{х/}.

Наконец, несколько замечаний о роли условий насыщения в ядерной физике вообще. Мы видели, что система фермионов со сколь угодно слабым чистым притяжением нестабильна. Поэтому применение многочастичной теории возмущений Бете-Голдстоуна (и любой формы теории возмущений) здесь невозможно. Коллапсирующая система не имеет никакой границы Ферми E_F и ее описание в терминах одночастичных функций Грина и квазичастиц бессмысленно. Между тем и в многочастичной теории возмущений и в методе функций Грина вопрос о насыщении никаких не входит — оба эти метода нечувствительны к условиям насыщения. Кажется довольно очевидным, что свойства основного состояния фермионов существенно зависят от вида ядерных сил и, в частности, от того, удовлетворяют ли они условиям насыщения или нет, т.е. условия насыщения должны формально входить в зависимость энергии основного состояния от N и в распределение по импульсам отдельных частиц в основном состоянии. Точно так же и спектр возбужденных состояний зависит от свойств основного, как это мы знаем из примера сверхтекучих систем, а следовательно и от конкретного вида ядерных сил, в отличие от того, что обычно предполагается в методе квазичастиц (теории Ферми-жидкости). В настоящее время существует единственная теория, пытающаяся объяснить свойства основных состояний ядер при $N \rightarrow \infty$ и одновременно учитывающая отталкивание на малых расстояниях — это теория Бете-Бракнера. Однако не видно, каким образом в этой теории учитываются условия насыщения.

Прежде чем перейти к гравитационным силам, мы остановимся еще на некотором улучшении изложенных результатов. Теоремы 3, 3-а, 4 и 5 при всей своей строгости и простоте обладают следующими недостатками, которые, вероятно, можно снять в са-

мом общем виде. Во-первых, в теоремах мы должны были пользоваться только несингулярными в нуле потенциалами^{x/}; во-вторых, в необходимых условиях насыщения для ненасыщающих потенциалов мы должны были писать $E < CN^2$, $C > 0$ и постоянная C оставалась неопределенной. Мы можем снять эти ограничения, если воспользуемся методом К-гармоник для $N \rightarrow \infty$. Однако замкнутые формулы могут быть получены только для Бозе-частиц, или Больцмановских частиц, в случае фермионов граница для энергии сверху устанавливается с помощью таблиц из работы /4/, лекция 3. Мы сформулируем сейчас несколько результатов, полученных в работе /13/xx/.

Теорема 6. Если потенциал $V(r)$ при $r = 0$ ограничен снизу, то энергия основного состояния системы N бозонов или больцмановских частиц удовлетворяет неравенству:

$$E_N \leq -BN^2, \quad N \rightarrow \infty \quad (55)$$

где

$$B = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \max_{x \geq 0} \left[- \int_0^\infty dy y^2 e^{-y^2} V(xy) \right] \quad (56)$$

x/ См. (первую) сноску на стр.25.

xx/ Замкнутые формулы в пределе $N \rightarrow \infty$ получены в настоящее время и для фермионов методом гиперсферических функций.

см. F. Calogero, Yu. A. Simonov, E.L. Surkov, Preprint

Примечания к теореме.

1) Мы можем ослабить предел, опустив значок *max* в (56) и взяв любое $X \geq 0$;

2) Если $B < 0$, т.е. если преобладает отталкивание, то теорема становится тривиальной, поскольку для несвязанной системы $E = 0$;

3) Если обозначить $V_{min} = \min_{r \geq 0} [V(r)]$, то выполняется двойное неравенство:

$$\frac{N^2}{2} V_{min} \leq E_N \leq -BN^2 \quad (57)$$

В том частном случае, когда V_{min} достигается для $r = 0$, величина B в (56) вычисляется для $X = 0$ и оказывается равной $\frac{N^2}{2} V_{min}$, т.е. оба предела совпадают и мы получаем точный результат;

4) Условие $B > 0$ дает критерий неустойчивости системы, который в точности совпадает со следствием 2 из теоремы 3-а.

Для потенциалов, которые сингулярны и притягивающие в нуле, устанавливается следующая теорема.

Теорема 7. Если потенциал $V(r)$ вблизи нуля имеет вид:

$$V(r) \cong \frac{V_0}{r^g} ; V_0 > 0 ; 0 < g < 2 \quad (58)$$

то энергия основного состояния системы N бозонов или бозе-цимандовских частиц удовлетворяет неравенству:

$$E_N \leq -C N^{\frac{4-q}{2-q}} \quad (59)$$

где

$$C = \left(1 - \frac{q}{2}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3-q}{2}\right)\right]^{\frac{2}{2-q}} \left(\frac{q m}{6 \hbar^2}\right)^{\frac{q}{2-q}} (-V_0)^{\frac{2}{2-q}} \quad (60)$$

Доказательства обоих теорем следуют из выражения для $W_{\text{эфф}}(\rho)$, выведенного в лекции 3, которое при больших ρ имеет вид:

$$W_{\text{эфф}}(\rho) = \frac{9 \hbar^2 N^2}{8 m \rho^2} + \frac{3 \sqrt{3}}{4 \pi} \frac{N^{\frac{3}{2}}}{\rho^3} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr e^{-\frac{3}{4} N \frac{r^2}{\rho^2}} V(r) \quad (61)$$

Как уже говорилось в лекции 3 мы можем с большой точностью (в пределе $N \rightarrow \infty$ это точное утверждение) положить:

$$\bar{E}_N = \min_{\rho \geq 0} [W_{\text{эфф}}(\rho)], \quad E_N \leq \bar{E}_N \quad (62)$$

Для теоремы 6 легко находим минимум, положив

$$\rho = \rho_0 N^{\frac{1}{2}} \quad (63)$$

Для теоремы 7 нужно выделить отдельно вклад в $W_{\text{эфф}}(\rho)$ от

поведения потенциала вблизи нуля (58) и тогда вся остальная часть дает асимптотически пренебрежимый вклад. Для первого вклада минимум в (62) легко находится, если положить

$$\rho = \rho_0 N^{-\frac{q}{2(2-q)}} \quad (64)$$

Заметим, что последнее равенство означает, что линейные размеры системы, связанные со средним значением $\bar{\rho}$ посредством $\bar{\rho} = \sqrt{N} R$, сокращаются с ростом N по закону $N^{-\frac{1}{2-q}}$.

Теперь обратимся к гравитационным силам ($q = 1$). Верхний предел легко установить из теоремы 7, а нижний из формулы лекции 3. В результате получаем для бозонов:

$$-\frac{N^2 G^2 m^5}{16 \hbar^2} \leq E_N \leq -\frac{N^3 G^2 m^5}{6 \pi \hbar^2} \quad (65)$$

Для фермионов соответствующий результат был получен Леви-Леблонем [14]

$$-A N^{\frac{7}{3}} \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \leq E_N^f \leq -B N^{\frac{7}{3}} \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \quad (66)$$

где A и B — положительные постоянные. В [14] дано строгое доказательство этого утверждения. Любопытно, что в отличие от ядерных сил здесь зависимость энергии от числа частиц меняется для фермионов и бозонов. Кроме того, мы видим, что насыщения при $N \rightarrow \infty$ нет и система должна коллапсировать. Однако, если N не слишком велико, кулоновские силы обеспечивают стабильность системы, как это было показано Дайсоном [15]. Поэтому мы должны рассмотреть совокупность кулоновских и гравитационных сил и проследить переход от насыще-

ния к коллапсу. Имеет место теорема /14/:

Для системы, состоящей из N одинаковых фермионов с массой m и зарядом $-e$ и N частиц с массой M , зарядом E и любой статистикой, энергия основного состояния подчиняется неравенствам:

$$-C'N \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(1 + CN^{\frac{2}{3}} \frac{GM^2}{e^2}\right)^2 \leq E_0(N) \leq -DN \frac{mE^4}{2\hbar^2} \times (1 + d N^{\frac{2}{3}} \frac{GM^2}{e^2})^2 \quad (67)$$

где C', c, D, d положительные постоянные.

Отсюда видно, что существует критическое число частиц, когда происходит переход от режима насыщения к режиму гравитационному:

$$N_{кр} \approx \left(\frac{e^2}{GM^2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{(1,23 \cdot 10^{36})^{\frac{3}{2}}}{A^3} \approx \frac{10^{54}}{A^3} \quad (68)$$

где A — массовое число ядер, $M = M_{\text{нукл.}} A$.

$N_{кр}$ представляет собой то число атомов, при котором гравитационная энергия начинает сравниваться с кулоновским взаимодействием, считая при этом, что атомы еще не распались на составные части, а представляют собой однократнозаряженные ионы. В самом деле в среде (пока еще насыщенной и стабильной), где расстояние между ближайшими соседями есть r_0 , среднее расстояние между атомами есть $N^{\frac{1}{3}} r_0$ и гравитационная энергия есть

$$E_G \approx \frac{N^2}{2} \frac{GM^2}{N^{\frac{1}{3}} r_0} \quad (69)$$

Кулоновская энергия, насыщенная за счет самоэкранирования, согласно /15/, по порядку величины равна:

$$E_{\text{кул.}} \cong N \frac{e^2}{r_0} \quad (70)$$

Обе величины (69) и (70) сравниваются при $N = N_{\text{кр}}$.

Следующее критическое число возникает, когда гравитационные силы сравниваются с кулоновскими силами диссоциированных атомов, число заряженных частиц при этом возрастает в Z раз, а кулоновская энергия в $Z^{\frac{7}{2}}$ раза (это есть полная энергия ионизации атома, равная $16 Z^{\frac{7}{2}}$ эв. /10/, стр. 293). Приравнивая эту величину (69), находим второе критическое число:

$$N'_{\text{кр}} = Z^{\frac{7}{2}} N_{\text{кр}}. \quad (71)$$

Рассмотрим численные значения величин $N_{\text{кр}}$ и $N'_{\text{кр}}$ для обычной материи типа нашей планеты, где $Z \cong 25$, $A \cong 60$, так что $M \cong 60 M_{\text{нукл.}} \cong 60 \times 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г} \cong 10^{-22} \text{ г}$

$$N_{\text{кр}} \sim \frac{10^{54}}{(60)^3} \approx 5 \cdot 10^{48}; \quad M_{\text{кр}} \sim 5 \cdot 10^{48} \cdot 10^{-22} \text{ г} \sim$$

$$\sim 5 \cdot 10^{26} \text{ г} \sim 5 \cdot 10^{23} \text{ кг, а}$$

$$M'_{\text{кр}} \sim 5 \cdot 10^{28} \text{ кг.}$$

Интересно заметить, что масса Земли составляет $6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ и поэтому здесь кулоновские и гравитационные эффекты одинаковы, что мы знаем по собственному опыту. Для Юпитера, состоящего из более легких элементов, первая критическая масса больше и он лежит в той же области $M \sim M_{\text{кр}}$. Это утверждение справедливо для всех планет Солнечной системы.

Остается сказать о том, что происходит при еще больших числах частиц N (соответственно, массах NM). Вообще, в системе из N электронов и N протонов кинетическая энер-

гия создается электронами, а гравитационная - протонами, но поскольку кулоновское экранирование требует полной однородности в распределении тех и других, то система ведет себя как N частиц с инертной массой m и гравитационной M , т.е.

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - \sum_{i>j=1}^N \frac{G M^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (72)$$

Поскольку система уменьшается в размерах при $N \rightarrow \infty$, то средний импульс растет. В самом деле, в силу принципа Паули каждая частица занимает область с объемом $\lambda^3 \sim (\frac{\hbar}{p})^3$, так что полный объем системы равен $N\lambda^3 \sim N(\frac{\hbar}{p})^3$ и среднее расстояние пары есть $N^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{p}$, поэтому из (72) получаем:

$$E(N) \sim N \frac{p^2}{2m} - \frac{N^2}{2} \frac{G M^2 p}{N^{\frac{1}{3}} \hbar} \quad (73)$$

минимум этого выражения достигается при

$$p \cong N^{\frac{2}{3}} \frac{G M^2 m}{2 \hbar} \quad (74)$$

Подставляя (74) в (73), мы получаем снова оценку (66), что подтверждает наши рассуждения.

С увеличением Np становится порядка mc и тогда мы должны заменить электронную кинетическую энергию релятивистским выражением, т.е. вместо (72) напомним:

$$H' = \sum_{i=1}^N \sqrt{\vec{p}_i^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{N^{\frac{5}{3}}}{2} \frac{G M^2}{\hbar} p \quad (75)$$

Как и в (73) оценим энергию:

$$E'(N) \cong N \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{N^{5/3}}{2} \frac{GM^2}{\hbar} \rho \quad (76)$$

Минимум достигается при

$$\rho_0 \cong mc \frac{(N/N_r)^{2/3}}{\sqrt{1 - (N/N_r)^{4/3}}} \quad (77)$$

и равен:

$$E'_0(N) \cong N mc^2 \sqrt{1 - (N/N_r)^{4/3}} \quad (78)$$

где

$$N_r = \left(\frac{2 \hbar c}{GM^2} \right)^{3/2} \approx 4,6 \cdot 10^3 N_{kr} = N_{kr} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{3/2} \quad (79)$$

При $N > N_r$ энергия оказывается неограниченной снизу — давление релятивистского электронного газа не может уравновесить гравитационного давления и может возникнуть коллапс. Можно строго показать [14], что гамильтониан (75) не ограничен снизу, т.е. основного состояния такой системы не существует. Предел $N = N_r$ есть так называемый "Чандрасекаровский предел", системы с большим числом частиц не могут существовать в холодном состоянии. Такой эффект возникает, например, для белых карликов. Однако системы с $N > N_r$ существуют. Это возможно потому, что они находятся в возбужденном состоянии и, например, в звездах излучение противодействует дальнейшему гравитационному коллапсу. Другие эффекты, которые мы не принимали во внимание — например, сильные и слабые взаимодействия, су-

ществующие, возможно, для нейтронных звезд и искривление гравитационного поля, т.е. отклонение от простого ньютоновского закона, существенно меняют картину при достаточно большом числе частиц. Тем не менее, существование критических чисел $N_{кр}$, $N'_{кр}$ и N_r , выведенное из фундаментальных принципов и уравнения Шредингера, подтверждается астрофизическими данными и совпадает с выводами, полученными на основе термодинамики.

Литература к лекции 4

- /1/ M.E.Eisher, D. Ruelle J. Math. Phys. 7, 260 (1966).
- /2/ D. Ruelle Lectures in Theoret. Physics, vol. VI, Boulder 1964.
- /3/ G. Dazevich, A.E.S. Green Phys. Rev. 164, 1842 (1967).
- /4/ Б.Ахмаджожаев, В.Б.Беляев, Е.Внеционко, Письма ЖЭТФ, 9, вып. 2 (1969); ЯФ, т.12, вып. 3 (1970).
- /5/ Г.Бете "Квантовая механика" Мир, Москва (1965), стр.68
- /6/ Р.Л.Добрушин. Теор.Вер.Прим. 9, 626 (1964).
- /7/ E. Feenberg Phys. Rev. 42, 667 (1937).
N. Kemmer Nature 140, 192 (1937).
G. Breit, E.P. Wigner Phys. Rev. 53, 998 (1938).
G.M. Volkoff Phys. Rev. 62, 126, 134 (1942).
см. также Дж.Блатт, В.Вайскопф "Теоретическая ядерная физика", гл.Ш, Москва, ИИЛ, 1954.
- /8/ P. Signell Adv. in Nuclear Phys. 228 (1969), Plenum Press, N.Y.
- /9/ F. Calogero, Yu.A. Simonov Preprint Universita' di Roma п.225 (1969).
- /10/ Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц "Квантовая механика" ГИФМЛ, Москва, 1968.
- /11/ Eickemeir, Hackenbroich 195, 412 (1966).
- /12/ Kerman "Nuclear forces and HF calculations" MTI preprint (1969)
- /13/ F. Calogero, Yu.A. Simonov Phys. Rev. 183, 869 (1969).
- /14/ J. M. Lely-Leblond J. Math. Phys. 10, 806 (1969).
- /15/ F.J. Dyson, A. Lenard J. Math. Phys. 8, 423 (1967).

Л-61341. Подписано к печати 25/III.1971 г. Зак.443. Тир.200

Тип. МИФИ, М.Пионерская, 12