

## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассматривается обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера четвертого порядка с четырьмя степенными нелинейностями. Исследуемое уравнение является обобщением некоторых известных моделей и позволяет оценить влияние различных процессов при распространении импульса в оптических волокнах. Задача Коши для изучаемого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому оно не относится к интегрируемым уравнениям в частных производных, однако данное уравнение имеет некоторые аналитические решения. Приведены светлые и вложенные солитоны, соответствующие рассматриваемой математической модели. Найдены законы сохранения дифференциального уравнения в частных производных для распространения импульсов. Вычислены сохраняющиеся величины для светлых и вложенных оптических солитонов.

N.A. KUDRYASHOV, D.R. NIFONTOV

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia

## CONSERVATION LAWS OF THE FOURTH-ORDER NONLINEAR SHRÖDINGER EQUATION FOR THE EMBEDDED SOLITONS

The fourth-order nonlinear Shrödinger equation with four power nonlinearities is considered. The equation studied is the generalization of some well-known models and allows us to evaluate the influence various processes of pulse propagation. The main property of this equation is not integrability because the Cauchy problem for it can not be solved by the inverse scattering transform. However this equation has some analytical solutions. Optical and embedded solitons corresponding to the considered mathematical model are given. Conservation laws of the partial differential equation for propagation pulses are found. Conservative quantities for the bright and embedded optical solitons are calculated.

Законы сохранения являются важнейшей характеристикой нелинейных уравнений в частных производных. С помощью них можно оценить сохраняющиеся характеристики математических моделей. Известно, что законы сохранения соответствуют свойству интегрируемости нелинейных уравнений в частных производных.

В последние десятилетия в связи с необходимостью решения задач нелинейной оптики, в том числе задач передачи информации на большие расстояния, появился большой интерес к исследованию математических моделей распространения импульсов в нелинейно-оптических средах [1–3]. Используемые при описании нелинейные уравнения в частных производных обычно не относятся к классу уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, и, как правило, имеют три и менее закона сохранения.

В докладе представлены законы сохранения, соответствующие обобщенному нелинейному уравнению Шрёдингера четвертого порядка:  $iq_t + \frac{1}{2}q_{xx} + i\chi q_{xxx} + \varepsilon q_{xxxx} + |q|^2q + \gamma_1|q_x|^2q + \gamma_2|q|^2q_{xx} - \gamma_3|q|^4q = 0$ . Известно [4], что для данного уравнения существует две формы оптических солитонов: светлые и вложенные.

Как правило, законы сохранения, соответствующие нелинейным эволюционным уравнениям, находятся с помощью оператора Эйлера и минимизации Лагранжиана [5]. В данной работе для вычисления законов сохранения используются только преобразования. Метод, использованный в данной работе, имеет ряд преимуществ для определенного класса нелинейных эволюционных уравнений, к которым принадлежит рассматриваемое семейство.

Для того, чтобы найти сохраняющиеся величины уравнение приводится к виду  $\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$ ,  $T = T(q, q^*, q_x, q_x^*, q_{xx}, q_{xx}^*, \dots)$ ,  $X = X(q, q^*, q_x, q_x^*, q_{xx}, q_{xx}^*, \dots)$ . Тогда сохраняющиеся величины находятся интегрированием плотности  $T$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} T dx$ . В работе показано, что все уравнения семейства имеют три закона сохранения. Найдены все три плотности для произвольного порядка уравнения с ограничениями на параметры, плотности имеют вид:  $T_1 = |q|^2$ ,  $T_2 = \frac{i}{2}(qq_x^* - q^*q_x)$ ,  $T_3 = -\frac{1}{2}|q_x|^2 + \varepsilon|q_{xx}|^2 + \frac{1}{2}i\chi(q_xq_{xx}^* - q_x^*q_{xx}) + \frac{1}{2}|q|^4 - \frac{\gamma_3}{3}|q|^6$ . По найденным  $T$  вычислены сохраняющиеся величины для двух рассматриваемых решений.

### Список литературы

1. Kivshar Y.S., Agrawal G.P., Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals, Academic Press, 2003
2. Kivshar Yu. S. and Malomed B. A., Dynamics of solitons in nearly integrable systems, Rev. Mod. Phys. (1989) 63, 763 – 915.
3. Kivshar Yu.S. and Pelinovsky D. E., Self - focusing and transversive instabilities of solitary waves, Phys. Reports (2000) 331(4), 117-195.
4. Kudryashov, Nikolay A., Exact solutions of equation for description of embedded solitons, 2022, Optik, 268, 10.1016/j.ijleo.2022.169801.
5. Olver P. J., Applications of Lie groups to differential equations, Springer-Verlag, New York inc, 1986.