

О ПРИМЕНЕНИИ ПОДВИЖНЫХ СЕТОК К ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ СХЕМАМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В работе исследуется применение подвижных сеток при численном решении начально-краевой задачи для уравнения Хопфа. Рассмотрен метод, учитывающий характеристические направления, реализованный на подвижных и неподвижных сетках. Проведено сравнение численных результатов и выполнен анализ сходимости для обоих вариантов. Показано, что использование подвижных сеток позволяет достичь более высокого порядка сходимости при моделировании процесса формирования разрывов.

S.A. LADYGIN, R.N. KARACHURIN, K.E. SHILNIKOV, P.N. RYABOV

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia

ON THE APPLICATION OF MOVING GRIDS TO CHARACTERISTIC SCHEMES FOR HYPERBOLIC PROBLEMS

In this work, the application of moving grids in the numerical solution of an initial-boundary value problem for the Hopf equation is investigated. A method that takes into account characteristic directions is considered, implemented on both moving and fixed grids. A comparison of numerical results is conducted, and a convergence analysis for both approaches is performed. It is shown that the use of moving meshes allows achieving a higher order of convergence when modeling the process of shock formation.

Рассматривается уравнение Хопфа вида $\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = 0$, $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$, $t > 0$ с начальным условием и граничными условиями Дирихле:

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} u_L, & x < x_L, \\ \frac{x_R - x}{x_R - x_L} u_L + \frac{x - x_L}{x_R - x_L} u_R, & x_L \leq x \leq x_R, \\ u_R, & x > x_R, \end{cases} \quad u(x_{\min}, t) = u_L, \quad u(x_{\max}, t) = u_R.$$

Здесь u_L, u_R, x_L, x_R – константы, такие что $u_L > u_R > 0$, $x_{\min} < x_L < x_R < x_{\max}$. Решением данной задачи является образующая со временем ударная волна.

Для использования подвижных сеток был применен метод динамической адаптации, который основан на переходе к новой системе координат. Такой подход позволяет формулировать задачу построения и адаптации расчетных сеток на дифференциальном уровне. В получаемой математической модели часть дифференциальных уравнений описывает физические процессы, а другая — поведение узлов сетки. Преобразование координат имеет вид $x = f(q, \tau)$, $t = \tau$, где q – расчетная координата. При переходе из одной системы координат в другую частные производные зависимых переменных связаны соотношениями $\partial / \partial t = \partial / \partial \tau + (Q/\Psi) \partial / \partial q$ и $\partial / \partial x = (1/\Psi) \partial / \partial q$, где $\Psi = \partial x / \partial q$ – якобиан обратного преобразования, называемый также функцией локальных деформаций, Q – функция, характеризующая скорость движения узлов.

Численное решение полученной задачи осуществляется методом, который учитывает направления численных потоков (конечные разности вперед и назад) в зависимости от направления характеристик. Такой подход обладает хорошей устойчивостью при решении задач с гиперболическими системами, к классу которых относится и рассматриваемая система.

Сходимость оценивается в сеточной норме $\|u\|_{\Delta q, \Delta \tau} = \sum_{i,n} |u_i^n| \Psi_i^n \Delta q \Delta \tau$, через ошибку $E(\Delta q, \Delta \tau) = \|u - u_{\text{exact}}\|_{\Delta q, \Delta \tau}$, где Δq и $\Delta \tau$ – шаги по пространству и времени, u – численное решение, u_{exact} – точное решение.

Численные эксперименты показали, что для подвижных сеток порядок сходимости оказывается лучше, чем для неподвижных сеток.

Работа выполнена в рамках гранта РНФ №25-21-00417

Список литературы

1. Мажукин А. В., Мажукин В. И. Динамическая адаптация в параболических уравнениях. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007. Т. 47. №. 11. С. 1913-1936.