МИФИ
МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

О. Б. Карпов

012-90

# УРАВНЕНИЯ ПАПАПЕТРУ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Москва 1990

Государственный комитет СССР по народному образованию

Московский ордена Трудового Красного Знамени
инженерно-физический институт

О.Б. Карпов

# УРАВНЕНИЯ ПАПАПЕТРУ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Препринт 012-90

Утверждено
редсоветом института



Москва I990

УДК 530.12:531.51

Карпов О.Б. Уравнения Папапетру и дополнительные условия.- М.: Препринт/МИФИ, 012-90, 1990, 24 с.

Исследуется движение вращающихся пробных тел в общей теории относительности. Рассматриваются разные дополнительные условия как уравнения, выделяющие центр масс тела. Изучается постньютоновское гравитационное спин-орбитальное взаимодействие.

## I. Введение

Объектом изучения данной статьи являются уравнения движения вращающихся тел в общей теории относительности, полученные Матиссоном [I] и Папапетру [2] и приведенные Диксоном [3, 4] к виду

$$\dot{p}^{\alpha} = -\frac{1}{2} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} u^{\beta} S^{\mu\nu} , \qquad (I.I)$$

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = 2 p^{[\alpha} u^{\beta]} . \qquad (I.2)$$

Вектор 4-импульса тела

$$p^{\alpha} = \int T^{\alpha\beta} d^3\sigma_{\beta} \qquad (I.3)$$

есть величина, которая в плоском пространстве-времени не зависит от пространственно-подобной гиперповерхности интегрирования. Антисимметричный тензор спина по отношению к событию $z^{\alpha}(s)$, $\xi^{\alpha} = x^{\alpha} - z^{\alpha}$,

$$S^{\alpha\beta} = 2\int \xi^{[\alpha} T^{\beta]\gamma} d^3\sigma_{\gamma} \qquad (I.4)$$

зависит от представляющей мировой линии, определяемой касательным 4-вектором

$$u^{\alpha} = dz^{\alpha}/ds , \quad u^{\alpha}u_{\alpha} = 1 . \qquad (I.5)$$

Точка означает ковариантную производную вдоль $u^{\alpha}$, $D/ds = u^{\alpha}\nabla_{\alpha}$.

Существенной чертой уравнений Папапетру (I.I), (I.2) является свобода конкретизации представляющей мировой линии $u^{\alpha}$. Эта свобода проявляется в том, что система (I.I), (I.2) неполна, число неизвестных превышает на три (количество независимых компонент $u^{\alpha}$) число уравнений. Поэтому мировая линия $u^{\alpha}$, вообще говоря, может определяться произвольно из физических соображений. Например, можно потребовать касательность 4-импульса к мировой линии, представляющей точки [5, 6]

$$p^{\alpha} \sim u^{\alpha} . \qquad (I.6)$$

Тогда тензор спина переносится вдоль $u^{\alpha}$ параллельно,

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = 0 . \qquad (I.7)$$

Обычно к уравнениям (I.I), (I.2) добавляются дополнительные условия, выделяющие в качестве представляющего пути мировую линию центра масс. Тензор спина относительно центра масс, определенного в заданной системе отсчета (с.о.) с касательным вектором конгруенции $\tau^\alpha$, удовлетворяет условию

$$S^{\alpha\beta}\tau_\beta = 0, \tag{I.8}$$

которое замыкает систему (I.I), (I.2). В стационарном пространстве-времени естественно направить $\tau^\alpha$ вдоль временно-подобного вектора Киллинга $\xi^\alpha$

$$S^{\alpha\beta}\xi_\beta = 0. \tag{I.8$'$}$$

Такое задание центра масс (I.8) будем называть дополнительным условием Кориналдези [7].

Дополнительное условие (I.6) тоже замыкает систему уравнений Папапетру. Тогда уравнение $S^{\alpha\beta}\tau_\beta = 0$ полностью определяет с.о. $\tau$, в которой $u^\mu$ есть 4-скорость центра масс. Параллельный перенос тензора спина (I.7) вдоль мировой линии $u^\mu$ центра масс тела в с.о. $\tau$ специфицирует эту с.о. соотношением $S^{\alpha\beta}\dot{\tau}_\beta = 0$.

Для выделения центра масс, определенного в с.о. покоя тела (собственного центра масс), вектор $\tau^\alpha$ следует направить вдоль $P^\alpha$,

$$S^{\alpha\beta}P_\beta = 0. \tag{I.9}$$

Это дополнительное условие Диксона [3, 4]. Вводя наряду с кинематической 4-скоростью $u^\alpha$ динамическую 4-скорость $U^\alpha$

$$U^\alpha = P^\alpha/\sqrt{P^\lambda P_\lambda}\ , \tag{I.I0}$$

можно считать условие (I.9) частным случаем (I.8) при $\tau^\alpha = U^\alpha$. В искривленном пространстве-времени собственный центр масс движется относительно с.о. покоя (5.I2). Центр масс в с.о., в которой он покоится, определяется дополнительным условием Пирани [8] $\tau^\alpha = u^\alpha$

$$S^{\alpha\beta}u_\beta = 0. \tag{I.II}$$

Центр масс Пирани может двигаться в с.о. покоя $U$ даже в плоском пространстве-времени (2.I0).

До последнего времени адекватный выбор дополнительных условий и физические следствия такого выбора являются предметом широкой дискуссии: безоговорочное использование дополнительного условия Пирани[*] [9, гл.40], [I0] и решение уравнений (I.I), (I.2) в ультрарелятивистском случае [II, I2], когда оно сильно отличается от условия Диксона; решительный отказ в физичности условия Пирани [3, 4] и использование условия Диксона [I3]; применение условия Кориналдези даже в нестационарной метрике [I4]; утверждение о нефизичности [5] уравнений Папапетру при нарушении условия (I.6); а в работе [6] полагается, что дополнительные условия играют роль внешних негравитационных сил.

В настоящей статье исследуются уравнения Папапетру и сравниваются выводы, к которым приводят разные дополнительные условия. Для сравнения вводится следующая совокупность обозначений.

Масса тела: в с.о. покоя $U$

$$M_0 = P^\alpha U_\alpha , \tag{I.I2}$$

в сопутствующей центру масс с.о. $u$

$$M = P^\alpha u_\alpha = M_0 U^\alpha u_\alpha , \tag{I.I3}$$

в произвольной с.о.

$$m = P^\alpha \tau_\alpha = M_0 U^\alpha \tau_\alpha = m_0 u^\alpha \tau_\alpha . \tag{I.I4}$$

В с.о. $\tau$ центр масс и с.о. покоя движутся с 3-скоростями $v^\alpha$ и $V^\alpha$,

$$u^\alpha = u^\lambda \tau_\lambda (\tau^\alpha + v^\alpha),\ u^\lambda \tau_\lambda = (1 - v^2)^{-1/2} = m/m_0,\ v^2 = -v^\alpha v_\alpha , \tag{I.I5}$$

$$U^\alpha = U^\lambda \tau_\lambda (\tau^\alpha + V^\alpha),\ U^\lambda \tau_\lambda = (1 - v^2)^{-1/2} = m/M_0,\ V^2 = -V^\alpha V_\alpha . \tag{I.I6}$$

В с.о. покоя $U$ центр масс и с.о. $\tau$ движутся с 3-скоростями $w^\alpha$ и $V_s^\alpha$,

$$u^\alpha = u^\lambda U_\lambda (U^\alpha + w^\alpha),\ \ u^\lambda U_\lambda = (1 - w^2)^{-1/2} = M/M_0 , \tag{I.I7}$$

$$\tau^\alpha = \tau^\lambda U_\lambda (U^\alpha + V_s^\alpha),\ \ V_s^2 = V^2 . \tag{I.I8}$$

Наконец, $w_s^\alpha$ – 3-скорость движения с.о. покоя относительно центра масс

$$U^\alpha = U^\lambda u_\lambda (u^\alpha + w_s^\alpha),\ \ w_s^2 = w^2 . \tag{I.I9}$$

---

[*] Перенос Ферми-Уолкера следует из уравнения (I.2) только при условии Пирани, п. 4.

Используется геометрическая система единиц (скорость света и гравитационная постоянная равны единице). Сигнатура (+---), греческие индексы принимают значения 0,1,2,3, латинские 1,2,3; $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ и $\epsilon_{\beta\mu\nu}$ соответственно 4-тензор и пространственный 3-тензор Леви-Чевиты, в ортонормированном базисе $\varepsilon^{0123} = \epsilon^{123} = 1$. Применяются очевидные упрощающие обозначения [13] по правилу

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} U^{\alpha} u^{\beta} \tau^{\mu} S^{\nu} = \varepsilon_{Uu\tau S} = \varepsilon^{Uu\tau S} \tag{1.20}$$

## 2. Сдвиг центров масс в плоском пространстве-времени

Сохранение энергии-импульса $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ приводит к сохранению 4-импульса (1.3) $\dot{p}^{\alpha} = 0$ и углового момента $\dot{J}^{\alpha\beta} = 0$,

$$J^{\alpha\beta} = 2\int x^{[\alpha} T^{\beta]\gamma} d^3 \sigma_{\gamma} = S^{\alpha\beta} - 2p^{[\alpha} z^{\beta]} . \tag{2.1}$$

Это означает следующий вид уравнений движения вращающихся тел в плоском пространстве времени:

$$\dot{p}^{\alpha} = 0 \tag{2.2}$$

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = 2p^{[\alpha} u^{\beta]} . \tag{2.3}$$

В системе координат, сопутствующей инерциальной с.о. покоя $U$

$$p^{\tau} = 0, \quad \dot{S}^{\tau k} = 0 . \tag{2.4}$$

Применение дополнительного условия позволяет перенести производную с тензора спина в (2.3) на проектирующий вектор 4-скорости с.о. $\tau$

$$p^{\alpha} u^{\lambda} \tau_{\lambda} = m u^{\alpha} - \underset{\tau}{S}^{\alpha\beta} \dot{\tau}_{\beta} . \tag{2.5}$$

Подставим в (2.5) разложения $u^{\alpha}$ (1.17) и $\tau^{\alpha}$ (1.18) в сопутствующей системе координат $U^{\tau} = 0$

$$M_0 w^{\tau} = \underset{\tau}{S}^{\tau}{}_{k} \frac{d}{dt} V_{\tau}^{k} . \tag{2.6}$$

Производная здесь и в (2.5) связаны посредством соотношения

$$ds = \sqrt{1 - w^2}\, dt = \frac{M_0}{M} dt .$$

В векторной записи уравнения (2.6)

$$\vec{w} = \frac{\vec{S}}{M_0} \times \frac{d\vec{V}_1}{dt} \qquad (2.7)$$

$\vec{S} = \underset{v}{S}$ есть постоянный вектор спина, определенного относительно собственного центра масс

$$\underset{v}{S}^{\alpha\tau} = 0, \quad \underset{v}{S}^{\pi\kappa} = \underset{\tau}{S}^{\pi\kappa} .$$

Обозначая $\vec{w} = d\vec{r}/dt$, получаем вектор сдвига $\vec{r}$, проведенный из собственного центра масс к цетру масс в с.о. $\tau$

$$\vec{r} = \frac{\vec{S} \times \vec{V}_1}{M_0} , \qquad (2.8)$$

Центры масс множества инерциальных с.о. образуют диск [I5,гл.6] радиусом $r_{max} = S/M_0$.

Если положить $\tau = u$, сотношение (2.5) при условии Пирани

$$p^\alpha = Mu^\alpha - S^{\alpha\beta}\dot{u}_\beta \qquad (2.9)$$

приводит к уравнениям (2.7), (2.8), где $\vec{V}_1$ надо заменить на $\vec{w}$,

$$\dot{\vec{w}} = \frac{\vec{S}}{M_0} \times \frac{d\vec{w}}{dt}, \qquad \vec{r} = \frac{\vec{S}}{M_0} \times \frac{d\vec{r}}{dt} . \qquad (2.10)$$

Это уравнения кругового движения радиусом $r = wS/M_0$ с угловой скоростью $M_0/S$ против вектора $\vec{S}$, полученные Вейссенхоффом и Раабе [I6]. При условии Кориналдези с.о. $\tau$ задана, центр масс движется в ней со скоростью $\upsilon$ (I.I5) и покоится в с.о. $U$, если с.о. $\tau$ инерциальная. Условие Пирани фиксирует покой центра масс в с.о. $u$, в которой он определен, и это заставляет центр масс Пирани двигаться в с.о. $U$ вокруг собственного центра масс. В плоском пространстве-времени условие Пирани оставляет возможность выделения собственного центра масс $w^\alpha = 0$.

Движение Вейссенхоффа-Раабе (2.I0) отражает тот факт, что уравнения Папапетру при условии Пирани оказываются третьего порядка по производным от координат:

$$\dot{p}^\alpha = M\dot{u}^\alpha - S^{\alpha\beta}\ddot{u}_\beta . \qquad (2.11)$$

Общая связь $\dot{p}^\alpha$ и $\dot{u}^\alpha$ без дополнительных условий включает вторую производную от тензора спина,

$$\dot{p}^{\alpha} = M u^{\alpha} + \ddot{S}^{\alpha\beta} u_{\beta} . \qquad (2.12)$$

Отметим, что сдвиг (2.8), (2.10) может быть получен непосредственно из соответствующих дополнительных условий. Тензоры спина $\underset{v}{S}^{\alpha\beta}$ и $S^{\alpha\beta}$ связаны соотношением

$$\underset{v}{S}^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + r^{\alpha} p^{\beta} - r^{\beta} p^{\alpha} ,$$

следующим из (1.4) при $\underset{v}{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + r^{\alpha}$, и условие (1.8) в с.о. покоя $p^{i} = 0$ приводит к сдвигу (2.8) [9, гл. 5]

$$M_0 r^{k} = \underset{v}{S}^{k}{}_{\tau} V_{s}^{\tau} , \qquad (2.8')$$

а условие (1.11) - к движению Вейссехоффа-Раабе (2.10)

$$M_0 r^{k} = \underset{v}{S}^{k}{}_{\tau} W^{\tau} . \qquad (2.10')$$

При этом уравнения (2.1), (2.2) удовлетворяются автоматически.

## 3. Уравнения Папапетру с дополнительным условием Кориналдези

Введем дуальный тензор спина

$$\overset{*}{S}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} S^{\mu\nu} . \qquad (3.1)$$

Вектор спина

$$\underset{\tau}{S}^{\beta} = \tau_{\alpha} \overset{*}{S}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\tau\beta}{}_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\beta}{}_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \qquad (3.2)$$

удовлетворяет условию $\underset{\tau}{S}^{\beta} \tau_{\beta} = 0$. Если тензор спина подчиняется условию Кориналдези (1.8), тогда

$$\underset{\tau}{S}^{\alpha\beta} = -2 (\tau^{[\alpha} S^{\beta]})^{*} = -\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\tau s} = -\underset{\tau}{\epsilon}^{\alpha\beta}{}_{s} , \quad \underset{\tau}{\overset{*}{S}}{}^{\alpha\beta} = 2 \tau^{[\alpha} \underset{\tau}{S}^{\beta]} . \qquad (3.3)$$

Используя (3.3), уравнение (2.5) можно переписать в виде

$$U^{\alpha} u^{\lambda} \tau_{\lambda} = u^{\alpha} U^{\lambda} \tau_{\lambda} + M_0^{-1} \varepsilon^{\alpha}{}_{t \tau s} . \qquad (3.4)$$

Центр масс и с.о. покоя движутся с относительной скоростью (1.15), (1.16)

$$V^{\alpha} - v^{\alpha} = \frac{U^{\alpha}}{U^{\lambda} \tau_{\lambda}} - \frac{u^{\alpha}}{u^{\lambda} \tau_{\lambda}} = M_0^{-1} \sqrt{(1 - v^2)(1 - V^2)}\, \varepsilon^{\alpha}{}_{t \tau s} = \frac{m_0}{m^2} \underset{\tau}{\epsilon}^{\alpha}{}_{ts} , \qquad (3.5)$$

В уравнении переноса импульса (I.I) выразим тензор спина через вектор (3.3), используя дуальный тензор Римана (ПI),

$$\dot{p}_\alpha = R^*_{\alpha u \tau s} = \frac{m}{m_0}\left(R^*_{\alpha\tau\tau s} + R^*_{\alpha v \tau s}\right), \tag{3.6}$$

$$R^*_{\alpha\tau\tau s} = -\underset{\tau}{B}_{\alpha s}, \quad -\underset{\tau}{h}{}^\beta_\alpha R^*_{\beta v \tau s} = \underset{\tau}{\epsilon}_{v\gamma\alpha} \underset{\tau}{E}{}^\gamma_s, \tag{3.7}$$

$\underset{\tau}{E}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\tau\beta\tau}$ и $\underset{\tau}{B}_{\alpha\beta} = R^*_{\alpha\tau\beta\tau}$ - электрическая и магнитная части тензора Римана (П2) - (П4) в с.о. $\tau$,

$$\underset{\tau}{h}_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \tau_\beta - g_{\alpha\beta} \tag{3.8}$$

метрический тензор локального пространственно-подобного сечения, ортогонального $\tau^\alpha$.

В уравнении переноса (I.2) для вектора спина (3.2)-(3.3)

$$\dot{\underset{\tau}{S}}{}^\alpha + \tau^\alpha S^\lambda \dot{\tau}_\lambda = \underset{\tau}{\epsilon}{}^\alpha{}_{\mu\nu} p^\mu u^\nu \tag{3.9}$$

правую часть можно выразить через $v^\alpha$, $V^\alpha$ (I.I5)-(I.I6), (3.4)

$$\underset{\tau}{\epsilon}{}^\alpha{}_{\mu\nu} p^\mu u^\nu = \frac{m^2}{m_0} \epsilon^\alpha{}_{\mu\nu} V^\mu v^\nu = 2\dot{\tau}^{[\alpha} S^{\lambda]} v_\lambda = 2\dot{\tau}^{[\alpha} S^{\lambda]} V_\lambda . \tag{3.I0}$$

Оператор переноса вектора спина

$$\dot{\underset{\tau}{S}}{}^\alpha + \tau^\alpha \underset{\tau}{S}{}^\lambda \dot{\tau}_\lambda = -\underset{\tau}{h}{}^\alpha_\beta \dot{\underset{\tau}{S}}{}^\beta . \tag{3.II}$$

Уравнения для масс (I.I2)-(I.I4):

$$\dot{M}_0 = R^*_{uu\tau s}, \quad \dot{M} u^\lambda \tau_\lambda = \varepsilon_{\dot{u}\tau\tau s}, \quad m_0 = M + \varepsilon_{\dot{\tau} v \tau s}, \tag{3.I2}$$

$$\dot{m} = R^*_{\tau u \tau s} + p^\alpha \dot{\tau}_\alpha, \quad \dot{m}_0 u^\lambda \tau_\lambda = (\dot{p}^\alpha - m_0 \dot{u}^\alpha)\tau_\alpha . \tag{3.I3}$$

Величина $\dot{\tau}_\alpha = u^\lambda \nabla_\lambda \tau_\alpha$

$$\dot{\tau}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(F_\alpha + v^\beta (A_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta})\right), \tag{3.I4}$$

где [I7, гл.3]

$$F_\alpha = \tau^\nu \nabla_\nu \tau_\alpha, \quad A_{\alpha\beta} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta \tau_{[\mu;\nu]}; \quad D_{\alpha\beta} = -h^\mu_\alpha h^\nu_\beta \tau_{(\mu;\nu)} \tag{3.I5}$$

соответственно вектор ускорения, тензоры угловой скорости вращения и скоростей деформации с.о. $\tau$. С учетом (3.I4) первое уравнение (3.I3) можно записать в виде

$$\frac{dm}{d\tau} = R^*_{\tau v \tau s} + m\left(F_\alpha v^\alpha - D_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta\right) . \tag{3.I6}$$

Если пространство-время обладает вектором Киллинга $\xi_\mu$, $\xi_{(\mu;\nu)}=0$, тогда скаляр

$$K = P^\mu \xi_\mu - \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} \tag{3.17}$$

является интегралом движения, $\dot{K} = 0$ [14]. Для сохранения $K$ не требуется никаких дополнительных условий. Направим $\tau^\mu$ вдоль временноподобного вектора Киллинга

$$\tau^\mu = (\xi^\lambda \xi_\lambda)^{-1/2} \xi^\mu .$$

Тогда при условии Кориналдези сохраняется киллингова масса

$$m_\xi = \sqrt{\xi^\lambda \xi_\lambda}\,(m + S^\alpha A_\alpha) , \tag{3.18}$$

где $A^\alpha = \epsilon^\alpha{}_{\mu\nu} A^{\mu\nu}$ - вектор угловой скорости вращения с.о.

Если принять $P^\alpha = M u^\alpha$ (1.6) и сопоставить тензору спина вектор по правилу (3.1)-(3.3), параллельный перенос тензора спина (1.7) приводит к переносу вектора $\underset{\tau}{h}{}^\alpha_\rho \dot{S}^\rho = 0$. При этом сохраняются длина вектора спина и масса $M = M_0$.

4. Дополнительное условие Пирани.

Аналогично (3.2), или просто полагая $\tau^\alpha = u^\alpha$, тензору спина сопоставляем вектор

$$\underset{u}{S}{}^\rho = u_\alpha \overset{*}{S}{}^{\alpha\rho}, \quad S^\rho u_\rho = 0 . \tag{4.1}$$

Используя условие Пирани (1.11), можно выразить тензор спина через вектор (4.1)

$$\underset{u}{S}{}^{\alpha\rho} = -\varepsilon^{\alpha\rho}{}_{us} , \quad \overset{*}{S}{}^{\alpha\rho} = 2 u^{[\alpha} \underset{u}{S}{}^{\rho]} . \tag{4.2}$$

Уравнение (3.4), (2.9) предстает в виде (1.19)

$$U^\alpha = \frac{M}{M_0}(u^\alpha + w_s^\alpha), \quad w_s^\alpha = \frac{1}{M} \varepsilon^\alpha{}_{\dot{u}us} , \quad \vec{w}_s = \frac{1}{M} \vec{\dot{u}} \times \underset{u}{\vec{S}} . \tag{4.3}$$

Примечательно, что при условии Пирани проекция вектора спина на 4-импульс равна нулю,

$$\underset{u}{S}{}^\alpha U_\alpha = 0 \tag{4.4}$$

как это непосредственно видно из (4.3).

Уравнение переноса импульса (1.1), (3.6)

$$\dot{p}_\alpha = R^*_{\alpha u u s} = -\underset{u}{B}_{\alpha s} , \qquad (4.5)$$

где $B_{\alpha\beta} = R^*_{\alpha u \beta u}$ есть магнитная часть тензора Римана (ПЗ) в с.о. $u$. В уравнение (4.5) входит (2.II) вторая производная $\ddot{u}^\alpha$,

$$\dot{p}^\alpha = M\dot{u}^\alpha + \varepsilon^\alpha{}_{\ddot{u}us} . \qquad (4.6)$$

Вектор спина при условии Пирани переносится по Ферми-Уолкеру

$$\underset{u}{h}{}^\alpha_\beta \underset{u}{\dot{S}}{}^\beta = 0 , \qquad (4.7)$$

где $\underset{u}{h}_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta}$. При этом, в отличие от (3.9),

$$\underset{u}{S}_\alpha \underset{u}{\dot{S}}{}^\alpha = 0, \quad \underset{u}{S} = \sqrt{-\underset{u}{S}{}^\alpha \underset{u}{S}_\alpha} = const . \qquad (4.8)$$

Сохраняется также масса $M$ (I.I3),

$$\dot{M} = \varepsilon_{\dot{u}\dot{u}us} = 0 . \qquad (4.9)$$

Величина $M_0$ (I.I2) не сохраняется:

$$\dot{M}_0 = R^*_{vuus} = M_0^{-1} \varepsilon_{\dot{p}\dot{u}us} . \qquad (4.I0)$$

Несмотря на то, что выполняется соотношение (4.4), похожее на условие Диксона, при условии Пирани в искривленном пространстве-времени нельзя выделить движение собственного центра масс. Ни одна мировая линия центров масс Пирани не удовлетворяет дополнительному условию Диксона:

$$\underset{u}{S}{}^{\alpha\beta} U_\beta = -\varepsilon^\alpha{}_{vus} = -\frac{M}{M_0} \varepsilon^\alpha{}_{w_s us} , \qquad (4.II)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_\alpha \underset{u}{S}{}^{\alpha\beta} P_\beta &= -M_0 \varepsilon_{\dot{u}vus} = M^2 W_s^\alpha W_{s\alpha} = M_0^2 - M^2 = \\ &= (\dot{u}^\alpha \underset{u}{S}_\alpha)^2 - \dot{u}^\lambda \dot{u}_\lambda \underset{u}{S}{}^\beta \underset{u}{S}_\beta = \underset{\dot{u}}{H}_{\alpha\beta} \underset{u}{S}{}^\alpha \underset{u}{S}{}^\beta , \end{aligned} \qquad (4.I2)$$

где $\underset{\dot{u}}{H}_{\alpha\beta} = \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta - \dot{u}^\lambda \dot{u}_\lambda g_{\alpha\beta}$. Отметим, что из уравнений (4.3), (4.4) следует

$$\underset{u}{S}{}^\beta \dot{u}_\beta = \underset{u}{S}{}^\beta \dot{U}_\beta M_0/M = \underset{u}{S}{}^\beta \dot{P}_\beta/M ,$$

поэтому уравнение переноса Ферми-Уолкера с использованием (4.5) можно записать в виде

$$M\underset{u}{\dot{S}}{}^\alpha = u^\alpha R^*_{susu} = u^\alpha \underset{u}{B}_{ss} . \qquad (4.I3)$$

## 5. Дополнительное условие Диксона

Аналогично (3.2), (4.I) вектор спина

$$\underset{\smile}{S}^{\beta} = U_\alpha \overset{*}{S}^{\alpha\beta}, \qquad \underset{\smile}{S}^{\beta} U_\beta = 0 . \qquad (5.I)$$

Используя условие Диксона $\underset{\smile}{S}^{\alpha\beta} U_\beta = 0$, получаем соотношения

$$\underset{\smile}{S}^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{US}, \qquad \overset{*}{\underset{\smile}{S}}^{\alpha\beta} = 2\, U^{[\alpha} \underset{\smile}{S}^{\beta]} . \qquad (5.2)$$

Уравнение связи кинематической и динамической 4-скоростей, получающееся подстановкой в (3.4) $\tau^\alpha = U^\alpha$, предстает в виде (I.I7)

$$u^\alpha = \frac{M}{M_0}(U^\alpha + w^\alpha), \quad w^\alpha = -\frac{1}{M}\varepsilon^\alpha{}_{\dot{U}US}, \quad \vec{w} = -\frac{1}{M}\dot{\vec{U}} \times \vec{\underset{\smile}{S}} , \qquad (5.3)$$

из которого следует, в частности,

$$\underset{\smile}{S}^\alpha u_\alpha = 0 . \qquad (5.4)$$

Уравнение переноса 4-импульса (I.I), (3.6):

$$\dot{P}_\alpha = R^*_{\alpha u U S} = \frac{M}{M_0}\left(R^*_{\alpha U U S} + R^*_{\alpha w U S}\right)$$

$$= -\frac{M}{M_0}\left(\underset{\smile}{B}_{\alpha S} - \epsilon_{w\beta\alpha}\underset{\smile}{E}^{\beta}{}_{S}\right) . \qquad (5.5)$$

Спиновая часть уравнений Папапетру (I.2), (3.9) описывает перенос Диксона

$$\underset{\smile}{h}^\alpha{}_\beta \dot{\underset{\smile}{S}}^\beta = 0 , \qquad (5.6)$$

где $\underset{\smile}{h}_{\alpha\beta} = U_\alpha U_\beta - g_{\alpha\beta}$. Используя соотношение

$$M \underset{\smile}{S}^\beta \dot{U}_\beta = M_0 \underset{\smile}{S}^\beta \dot{u}_\beta , \qquad (5.7)$$

которое получается при помощи (5.3),(5.4), из переноса Диксона (5.6) можно выделить перенос Ферми-Уолкера:

$$\dot{\underset{\smile}{S}}^\alpha = -U^\alpha \underset{\smile}{S}^\lambda \dot{U}_\lambda = -\left(u^\alpha - M^{-1}\varepsilon^\alpha{}_{u\dot{U}S}\right)\underset{\smile}{S}^\lambda \dot{u}_\lambda . \qquad (5.8)$$

Как и перенос Ферми-Уолкера, перенос Диксона сохраняет длину вектора спина

$$\underset{\smile}{S}_\alpha \dot{\underset{\smile}{S}}^\alpha = 0 . \qquad (5.9)$$

Сохраняется также масса $M_0$ (I.I2),

$$\dot{M}_0 = R^{*\cdot}_{UuUS} = \frac{M_0}{M} R^*_{uuUS} + \frac{1}{M}\dot{P}_\alpha \varepsilon^{\alpha \dot{U} U S} = 0 . \qquad (5.I0)$$

Величина $M$ (I.I3) при условии Диксона не сохраняется,

$$\dot{M} = \frac{M_0}{M} \varepsilon_{\dot{u}\dot{u}us} . \qquad (5.\mathrm{II})$$

Скорость движения $w^\alpha$ (5.3) центра масс, определенного по Диксону, в с.о. покоя $U$

$$w^\alpha (M_0^2 + \underset{\smile}{E}_{ss}) = \epsilon^{\alpha s \lambda} \underset{\smile}{B}_{\lambda s} . \qquad (5.\mathrm{I2})$$

На мировой линии центра масс по Диксону условие Пирани не выполняется:

$$\underset{\smile}{S}^{\alpha\beta} u_\beta = - \varepsilon^\alpha{}_{uus} = - \frac{M}{M_0} \varepsilon^\alpha{}_{wus} = \frac{M}{M_0} (M_0^2 + \underset{\smile}{E}_{ss})^{-1} (\underset{\smile}{S}^\lambda \underset{\smile}{S}_\lambda \underset{\smile}{B}^\alpha_s - \underset{\smile}{S}^\alpha \underset{\smile}{B}_{ss}) \qquad (5.\mathrm{I3})$$

$$\dot{P}_\alpha \underset{\smile}{S}^{\alpha\beta} u_\beta = - M^2 w^\alpha w_\alpha = M^2 - M_0^2 = \dot{U}^\alpha \dot{U}_\alpha \underset{\smile}{S}^\beta \underset{\smile}{S}_\beta - (\dot{U}^\alpha \underset{\smile}{S}_\alpha)^2 =$$
$$= M^2 (M_0^2 + \underset{\smile}{E}_{ss})^{-2} (\underset{\smile}{S}^\lambda \underset{\smile}{S}_\lambda \underset{\smile}{B}_{\varkappa s} \underset{\smile}{B}^{\varkappa s} - \underset{\smile}{B}_{ss}^2) . \qquad (5.\mathrm{I4})$$

Дополнительные условия Диксона и Пирани выделяют разные мировые линии.

## 6. Вертикальный спин на круговой орбите в статическом аксиальном поле

В качестве примера рассмотрим движение тела со спином, ортогональным плоскости орбиты постоянного радиуса $u^1 = 0$ при дополнительных условиях Кориналдези, Пирани и Диксона. Такое движение возможно в метрике Шварцшильда, а для экваториальной орбиты в любой аксиально-симметричной стационарной метрике. Ограничиваясь статическим пространством, мы не рассматриваем спин-спинового взаимодействия.

Для упрощения записи будем использовать ортонормированный базис, сопутствующий невращающейся $A_{\alpha\beta} = 0$ жесткой $D_{\alpha\beta} = 0$ (киллинговой) с.о., в которой магнитная часть тензора Римана (П3) статического пространства равна нулю. Например, в метрике Шварцшильда в с.о., покоящейся относительно координат кривизн

$$E^i_\kappa = \frac{m}{r^3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B^i_\kappa = 0 , \qquad (6.\mathrm{I})$$

$m$ – масса источника.

Радиальное уравнение Папапетру в совокупности с условием нормировки 4-скорости полностью определяет движение тела. Уравнение (3.4), (4.3) или (5.3) дает связь кинематической и динамической 4-скоростей. Величины $M_0$ , $M$ , $m$ и $m_0$ (I.I2)-(I.I4) при таком движении сохраняются. Величина $u^3 S^2 < 0$ для вектора спина, параллельного вектору угловой скорости обращения.

Условие Кориналдези в используемом базисе означает просто $S^{0i} = 0$, и система определяющих уравнений выглядит следующим образом[к)]

$$m_0 \dot{u}^1 = -(E^2_2 + \gamma^1_{33} F^1) u^3 S^2 , \qquad (6.2)$$

$$p^3 = m_0 u^3 + F^1 S^2, \quad p^0 = m_0 u^0 , \qquad (6.3)$$

где

$$\dot{u}^1 = \gamma^1_{00} (u^0)^2 + \gamma^1_{33} (u^3)^2, \ (u^0)^2 - (u^3)^2 = 1 . \qquad (6.4)$$

Условие Пирани выделяет другую мировую линию с постоянной радиальной координатой

$$\dot{u}^1 [M + (\gamma^0_{10} - \gamma^3_{13}) u^0 u^3 S^2] = (E^1_1 - E^2_2) u^0 u^3 S^2 , \qquad (6.5)$$

$$p^3 = M u^3 + \dot{u}^1 u^0 S^2, \quad p^0 = M u^0 + \dot{u}^1 u^3 S^2 . \qquad (6.6)$$

Величина $u^3/u^0 = v$ есть скорость обращения по часам киллинговой с.о., которая получается разной из уравнений (6.2) и (6.5) даже в постньютоновском приближении. Разной получается и формула для угловой скорости обращения. Именно, условие Пирани дает угловую скорость $\omega_u$ , отличающуюся от угловой скорости $\Omega$ невращающегося тела [I8],

$$\omega_u = \Omega \left(1 - \frac{3}{2} \Omega S\right) , \qquad (6.7)$$

$S = -S^2$, в то время как при условии Кориналдези центр масс обращается с угловой скоростью невращающегося тела, $\omega_\tau = \Omega$ : правая часть (6.2) обращается в нуль в линейном по $m$ приближении.

---

к) Для последовательности обозначений величины $S^\alpha$, $u^\alpha$, $p^\alpha$ следует снабдить индексами $\tau$ в (6.2)-(6.4), $u$ в (6.4)-(6.6) и $v$ в (6.I2)-(6.I4), имея в виду разные дополнительные условия. В целях упрощения записи мы будем выставлять такие индексы только там, где это будет необходимо для обсуждения различий.

Возникает вопрос: не означает ли это, что центры масс Пирани и Кориналдези расходятся даже в постньютоновском приближении и с течением времени могут оказаться в диаметральном положении, то есть как угодно далеко друг от друга? Дело в том, что в соответствии с (2.8) отличаются радиусы орбит центров масс Пирани и Кориналдези,

$$r_\tau = r_u(1+\Omega S) \ . \tag{6.8}$$

Учитывая, что для невращающегося тела в метрике Шварцшильда координатная угловая скорость $\Omega = \sqrt{m/r^3}$, получаем в постньютоновском приближении

$$\omega_u = \sqrt{\frac{m}{r_u^3}}\left(1-\frac{3}{2}\Omega S\right) = \sqrt{\frac{m}{r_\tau^3}} = \omega_\tau \ , \tag{6.9}$$

то есть угловые скорости на самом деле одинаковые, центры масс сдвинуты в радиальном направлении и не расходятся. Скорости обращения при этом, разумеется, разные

$$(u^3/u^0)_\tau = v_\tau = v_u(1+\Omega S) . \tag{6.10}$$

Динамическая скорость при условии Кориналдези согласно (6.3) такая же, как и при условии Пирани

$$(p^3/p^0)_u = v_u = (p^3/p^0)_\tau \ . \tag{6.11}$$

Сдвиг (2.8) записан относительно собственного центра масс, определяемого условием Диксона. В постньютоновском приближении центры масс Пирани и Диксона на круговой орбите совпадают, так же как и скорости обращения. Точные определяющие уравнения Диксона, получающиеся при условии $dU^1/ds = 0$, которое эквивалентно $du^1/ds = 0$:

$$\dot{U}^1[M_0^2 + (S^2)^2((U^3)^2E_1^1 - (U^0)^2E_2^2)] = M(E_1^1 - E_2^2)U^0U^3S^2 , \tag{6.12}$$

$$M_0u^3 = MU^3 - \dot{U}^1U^0S^2 , \quad M_0u^0 = MU^0 - \dot{U}^1U^3S^2 , \tag{6.13}$$

где

$$\dot{U}^1[M_0 - (\gamma'_{00} + \gamma'_{33})U^0U^3S^2] = M[\gamma'_{00}(U^0)^2 + \gamma'_{33}(U^3)^2] , \ (U^0)^2 - (U^3)^2 = 1 . \tag{6.14}$$

Точные мировые линии центров масс по Диксону и Пирани различны, это сразу видно из (5.13), имея в виду

$$B_s^1 = (E_1^1 - E_2^2)U^0U^3S^2 , \quad S^1 = 0 . \tag{6.15}$$

Движение тела с горизонтальным спином в постньютоновском приближении при условии Пирани-Диксона исследовано в работе [19]. В следующем разделе рассмотрен общий случай спин-орбитального взаимодействия в постньютоновском приближении при разных дополнительных условиях.

## 7. Спин-орбитальная сила в постньютоновском приближении

Основное постньютоновское приближение порядка $c^{-2}$ для спин-орбитальной силы означает линейное приближение по скорости орбитального движения $v$, спину $S$ и массе $\mathfrak{m}$ источника, $M = M_0 = m_c - m$. Отношение спин-орбитального ускорения основного приближения к ньютоновскому ускорению свободного падения $g = \mathfrak{m}/r^2$

$$\frac{F_s}{mg} \sim \frac{vS}{mr} \sim \frac{\mathfrak{m}}{r}\frac{S}{mvr} \quad . \tag{7.1}$$

В ортонормированном базисе киллинговой с.о. (покоящейся относительно источника) статического поля при условии Кориналдези

$$\underset{\tau}{B}^{ik} = 0, \quad \dot{P}^{i}_{\tau} = \epsilon^{vki} E^{s}_{k} \; . \tag{7.2}$$

В отсутствие поворота пространственных осей согласно (П8)

$$\underset{u}{B}^{ij} = -2\epsilon^{vkj} E^{s}_{k} \; . \tag{7.3}$$

Спин-орбитальная сила при условии Диксона и Пирани в основном приближении одинакова

$$F^{i}_{su} = F^{i}_{su} = \dot{P}^{i}_{u} = 2\epsilon^{vki} E^{s)}_{k} \; . \tag{7.4}$$

В (7.I)-(7.3) и далее $v$ есть скорость орбитального движения центра масс тела $m$ относительно источника $\mathfrak{m}$.

Спин-орбитальная сила при условии Кориналдези отличается от $\dot{P}^{i}$ (7.2):

$$F^{i}_{s\tau} = m\dot{u}^{i}_{\tau} = \dot{P}^{i}_{\tau} - \epsilon^{i\dot{\tau}s} = -2\epsilon^{ik s} E^{v)}_{k} \; . \tag{7.5}$$

Формулы спин-орбитальной силы (7.4), (7.5) существенно разные, как это ясно видно из векторной записи в случае сферической симметрии источника (6.I) [20, 2I]

$$\vec{F}_{s\tau} = -3\frac{\mathfrak{m}}{r^3}\left\{(\vec{v}\times\hat{r})(\vec{S}\hat{r}) + (\vec{S}\times\hat{r})(\vec{v}\hat{r})\right\} , \tag{7.6}$$

$$\vec{F}_{su} = 3\frac{m}{r^3}\{\vec{S}\times\vec{v} + 2\hat{r}(\vec{S}(\hat{r}\times\vec{v})) - (\vec{v}\hat{r})(\vec{S}\times\hat{r})\} \qquad (7.7)$$

где $\hat{r} = \vec{r}/r$. Запишем общее выражение для силы (7.4)-(7.7):

$$F_s^i = F_{su}^i + \lambda(F_{sr}^i - F_{su}^i), \qquad (7.8)$$

$$\vec{F}_s = 3\frac{m}{r^3}\{\vec{S}\times\vec{v} + (2-\lambda)\hat{r}(\vec{S}(\hat{r}\times\vec{v})) - (1+\lambda)(\vec{v}\hat{r})(\vec{S}\times\hat{r})\}, \qquad (7.8')$$

$\lambda = 0$ соответствует условию Диксона-Пирани, $\lambda = 1$ условию Кориналдези, а $\lambda = 1/2$ - результатам, полученным Фоком [22, 23]. Дополнительные условия Кориналдези, Диксона-Пирани и Фока в используемом приближении можно записать в виде

$$S^{0i} = (\lambda - 1)v_k S^{ki}. \qquad (7.9)$$

Покажем, что разные выражения для силы приводят к разным движениям представляющей точки, но к одинаковому движению тела как целого: зависимостьот $\lambda$ в левой и правой частях уравнения $m\dot{u}^i = F_s^i$ взаимно уничтожается. Все различия сводятся к сдвигу центров масс при разных дополнительных условиях в соответствии с (2.8), (6.8),

$$\vec{r} = \vec{r}_u + \lambda\vec{v}\times\vec{S}/m. \qquad (7.10)$$

Учитывая также следующие из (7.10) разные выражения для производной от скорости тела и ускорения свободного падения

$$m\frac{dv^i}{d\tau} = m\frac{dv_u^i}{d\tau} + \lambda\epsilon^{ski}E_k^v, \quad m m\frac{\hat{r}^i}{r^2} = m m\frac{r_u^i}{r_u^3} + \lambda\epsilon^{sk\sigma}E_k^i, \qquad (7.11)$$

получаем, что величина

$$m\left(\frac{dv^i}{d\tau} + m\frac{r^i}{r^2}\right) - F_s^i, \qquad (7.12)$$

равная общерелятивистской силе типа EIH (см. напр. [10]), не зависит от $\lambda$.

Сравним (7.8) с силой, действующей на невращающееся тело $m$ при движении его со скоростью $(-v)$ в поле вращающейся массы $\vec{S}$ (гравимагнитная кориолисова сила)

$$\vec{F}_m = -2mv\times\frac{\vec{S} - 3\hat{r}(\vec{S}\hat{r})}{r^3}. \qquad (7.13)$$

Видно, что (7.8) несводимо к виду (7.13). Иначе дело обстоит в электродинамике. Сила $\vec{F}_\mathfrak{I}$, действующая на магнитный диполь $\vec{\mathfrak{I}}$ при движении его со скоростью $\vec{v}$ в поле заряда $Q$ [24] в линейном по $v$ приближении [20]

$$\vec{F}_\mathfrak{I} = (\vec{\mathfrak{I}}\vec{\nabla})\vec{H} = -\frac{Q}{r^3}\, v\times(\vec{\mathfrak{I}} - 3\hat{r}(\vec{\mathfrak{I}}\hat{r})), \qquad (7.14)$$

где $\vec{H}$ - магнитное поле в с.о. покоя диполя, $\vec{H} = -v\times\vec{E}, \vec{E} = Q\hat{r}/r^2$. Сила Лоренца $F_Q$, действующая на заряд $Q$ в магнитном поле диполя $\vec{\mathfrak{I}}$

$$\vec{F}_Q = Q\vec{v}\times\frac{\vec{\mathfrak{I}} - 3\hat{r}(\vec{\mathfrak{I}}\hat{r})}{r^3} = -\vec{F}_\mathfrak{I}. \qquad (7.15)$$

В выражениях (7.14), (7.15) $v$ есть <u>относительная</u> скорость диполя $\mathfrak{I}$ и заряда $Q$.

Выпишем соответствующий (7.14), (7.15) результат задачи двух тел в общей теории относительности [25]. Первое тело обладает спином $\vec{S}$ и скоростью $\vec{v}_1$; масса второго тела $m$, скорость $\vec{v}_2$; $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; с.о. произвольна.

$$\vec{F}_1 = \frac{m}{r^3}\{3\vec{S}\times\vec{v}_1 - (3+\lambda)\vec{S}\times\vec{v}_2 + (6-3\lambda)\hat{r}(\vec{S}(\hat{r}\times\vec{v}_1)) -$$

$$- 6\hat{r}(\vec{S}(\hat{r}\times\vec{v}_2)) - (3+3\lambda)(\vec{v}\hat{r})(\vec{S}\times\hat{r})\} \qquad (7.16)$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{m}{r^3}\{(4-\lambda)\vec{S}\times\vec{v}_1 - 4\vec{S}\times\vec{v}_2 + (6-3\lambda)\hat{r}(\vec{S}(\hat{r}\times\vec{v}_1))$$

$$-6\hat{r}(\vec{S}(\hat{r}\times\vec{v}_2)) - 6(\vec{v}\hat{r})(\vec{S}\times\hat{r})\}. \qquad (7.17)$$

Для сравнения $\vec{F}_2$ (7.17) и $\vec{F}_m$ (7.13), (7.8′) и (7.6) следует иметь в виду векторное тождество

$$2\vec{S}\times\vec{v} + 3\hat{r}(\vec{S}(\hat{r}\times\vec{v})) - 3(\vec{v}\hat{r})(\vec{S}\times\hat{r}) = \vec{v}\times(\vec{S} - 3\hat{r}(\vec{v}\hat{r}) \qquad (7.18)$$

При $\lambda = 0$ (Пирани) в выражения для сил $F_1$, $F_2$ входит только относительная скорость $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, в то время как для выполнения третьего закона Ньютона $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ требуется $\lambda = 1$ (Кориналдези). Подчеркнем, что величины (7.12)

$$m\left(\frac{d\vec{v}_1}{d\tau} + m\frac{\hat{r}}{r^2}\right) - \vec{F}_1, \quad m\left(\frac{d\vec{v}_2}{d\tau} - m\frac{\hat{r}}{r^2}\right) - \vec{F}_2 \qquad (7.19)$$

не зависят от $\lambda$, и уравнения

$$m\dot{u}_1^i = F_1^i\,, \qquad \mathfrak{m}\,\dot{u}_2^i = F_2^i \qquad (7.20)$$

приводят к движениям тел $m$ и $\mathfrak{m}$, не зависящим от дополнительных условий. Однако $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_{\mathfrak{m}}$ при любом $\lambda$ не обладают электродинамической (7.14)-(7.15) симметрией, что означает невозможность удовлетворения совокупности третьего закона Ньютона и относительности движений в теории гравитации.

## 8. Заключение

Неполнота системы уравнений Папапетру отражает свободу выбора мировой линии точки, представляющей тело. Разные дополнительные условия выделяют разные представляющие точки как центры масс в том или ином контексте. Различны уравнения переноса векторов спина и 4-импульса, выражения для спин-орбитальной силы отличаются в первом неисчезающем постньютоновском приближении. В частности, перенос Ферми-Уолкера и сохранение массы в с.о. покоя центра масс получаются при условии Пирани. Условие Диксона приводит к переносу Диксона, отличающемуся от Ферми-Уолкера, и сохранению массы в с.о. покоя тела как целого. Условие сонаправленности 4-импульса и 4-скорости представляющей точки сохраняет единую массу покоя, параллельный перенос тензора спина приводит к другому переносу вектора спина. Условие Кориналдези сохраняет киллингову массу и оставляет возможность изменения длины вектора спина. Постньютоновское дополнительное условие Фока оказывается промежуточным между условиями Диксона-Пирани и Кориналдези.

Различие движений представляющих точек одного и того же тела сводится к сдвигу центров масс в разных с.о.. Например, для кругового движения тела со спином, ортогональным плоскости орбиты, различные выражения для угловых скоростей орбитального движения совпадают при учете сдвига центров масс. Никакое дополнительное условие не приводит к выполнению совокупности третьего закона Ньютона и относительности движений в общей теории относительности.

Приложение. Электрическая и магнитная части тензора Римана

Сопоставим тензору Римана $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ дуальные тензоры

$$R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}R_{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\lambda\sigma}{}_{\mu\nu}\,,\quad {}^{*}R_{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\varkappa\rho}R_{\varkappa\rho\mu\nu}\,,\qquad \text{(П1)}$$
$$ {}^{*}R^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\varkappa\rho}R_{\varkappa\rho\lambda\sigma}\varepsilon^{\lambda\sigma}{}_{\mu\nu}\,.$$

В ортонормированном базисе $\varepsilon_{0ijk}=\epsilon_{ijk}$ тензор Римана пустого пространства расщепляется на электрическую и магнитную части [26]

$$E^{i}_{k}=R^{i0}{}_{k0}=-{}^{*}R^{*\,i0}{}_{k0}\,,\qquad E=E^{T},\quad E^{i}_{i}=0, \qquad \text{(П2)}$$

$$B^{i}_{n}=R^{*i0}{}_{k0}={}^{*}R^{i0}{}_{k0}=-\frac{1}{2}R^{i0}{}_{mn}\epsilon^{mn}{}_{k}\,,\ B=B^{T},\ B^{i}_{i}=0. \qquad \text{(П3)}$$

Матрица 6×6 тензора Римана имеет вид

$$R^{M}{}_{N}=\left(\begin{array}{c|c} R^{i0}{}_{k0} & R^{*i0}{}_{k0}\\ \hline -{}^{*}R^{i0}{}_{k0} & -{}^{*}R^{*i0}{}_{k0}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} E & B\\ \hline -B & E\end{array}\right), \qquad \text{(П4)}$$

где $M$, $N$ - собирательные индексы по Петрову [27]; $N$ =(I0, 20,30, 23,3I,I2). При переходе к новому базису $\tilde{e}^{\nu}$

$$e^{\mu}=L^{\mu}{}_{\nu}\tilde{e}^{\nu}$$

электрическая и магнитная матрицы преобразуются по закону

$$\tilde{E}_{ij}=4E_{ke}L^{[k}{}_{i}u^{0]}L^{[e}{}_{j}u^{0]}-E_{pq}\epsilon^{p}{}_{km}\epsilon^{q}{}_{en}L^{k}{}_{i}u^{m}L^{e}{}_{j}u^{n}+$$
$$+4B_{km}\epsilon^{m}{}_{en}L^{[k}{}_{(i}u^{0]}L^{e}{}_{j)}u^{n}, \qquad \text{(П5)}$$

$$\tilde{B}_{ij}=4B_{ke}L^{[k}{}_{i}u^{0]}L^{[e}{}_{j}u^{0]}-E_{pq}\epsilon^{p}{}_{km}\epsilon^{q}{}_{en}L^{k}{}_{i}u^{m}L^{e}{}_{j}u^{n}-$$
$$-4E_{km}\epsilon^{m}{}_{en}L^{[k}{}_{(i}u^{0]}L^{e}{}_{j)}u^{n}\,, \qquad \text{(П6)}$$

где $u^{\mu}=L^{\mu}_{0}$ - компоненты 4-скорости в базисе $e^{\mu}$. Если нет поворота пространственных осей, в линейном по скорости $v^{i}=u^{i}$ приближении

$$\tilde{E}_{ij}=E_{ij}+2v^{e}\epsilon_{ek(i}B^{k}_{j)}\,, \qquad \text{(П7)}$$

$$\tilde{B}_{ij}=B_{ij}-2v^{e}\epsilon_{ek(i}E^{k}_{j)}\,. \qquad \text{(П8)}$$

Список литературы


I. Mathisson M. Acta Phys. Polon., 1937, 6, 218.
2. Papapetrou A. Proc. Roy. Soc. Lond., 1951, A209, 248
3. Dixon W.G. Nuovo Cim., 1964, 34, 317.
4. Dixon W.G. Proc. Roy. Soc. Lond., 1970, A314, 499
5. Храпко Р.И. ЖЭТФ, I986, 90, 40I.
6. Svirskas K., Pyragas K., Lozdiene A. Astrophys. Space Sci., 1988, 149, 39
7. Corinaldesi E., Papapetrou A. Proc. Roy. Soc. Lond., 1951, A209, 259.
8. Pirani F. Acta Phys. Polon., 1956, 15, 389
9. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.:Мир, I977.
I0. Thorne K.S., Hartle J.B. Phys. Rev., 1985, D31, 1815.
II. Пляцко Р.М., Вынар А.Л. ДАН СССР, I982, 263, II25.
I2. Пляцко Р.М. Препр. Инст. прикл. пробл. мех. мат. № 2-89. Львов, I989.
I3. Ehlers J., Rudolph E. Gen. Relat. Grav., 1977, 8, 197
I4. Carmeli M., Charach Ch., Kaye M. Phys. Rev., 1977, D15, 1501.
I5. Меллер К. Теория относительности. М.: Атомиздат, I975.
I6. Weyssenhoff J., Raabe A. Acta Phys. Polon., 1947, 9, 7.
I7. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, I982.
I8. Епихин Е.Н., Пулидо Г.И., Мицкевич Н.В. Тез. докл. третьей Советской гравитационной конференции. Ереван, I972 С. 380.
I9. Карпов О.Б. // Экспериментальные тесты в теории гравитации. М.: МГУ, I989. С.200.
20. Wald R. Phys. Rev., 1972 D6, 406
2I. Barker B.M., O'Connel R.F. Gen. Relat. Grav., 1974, 5, 539.
22. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, I96I.
23. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, I979.
24. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, I976.
25. Barker B.M., O'Connel R.F. J. Math. Phys., 1987, 28, 661.
26. Карпов О.Б. Препринт/МИФИ, 029-89. М, I989.
27. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, I966.

Содержание


I. Введение ........................................................ 3
2. Сдвиг центров масс в плоском пространстве- времени ....... 6
3. Уравнения Папапетру с дополнительным условием Кориналдези 8
4. Дополнительное условие Пирани ........................... I0
5. Дополнительное условие Диксона .......................... I2
6. Вертикальный спин
на круговой орбите в статическом аксиальном поле ........ I3
7. Спин-орбитальная сила в постньютоновском приближении .... I6
8. Заключение ...................................................... I9
Приложение. Электрическая и магнитная части тензора Римана 20
Список литературы ............................................. 2I

Олег Борисович Карпов

Уравнения Папапетру и дополнительные условия

Рукопись поступила в издательский отдел 07. 02. 90г.

Ответственный за выпуск О.Б.Карпов

Редактор Т.В.Волвенкова

Л.-21127 Подписано в печать 22.02.90 Формат 60х84 I/I6
П.л. I,5 Уч.-изд.л. 1,5 Тираж I20 экз.
Изд. № 012 - 90 Заказ 666 Цена 10 коп.

Типография МИФИ. II5409, Москва, Каширское шоссе, 3I.
Московский инженерно-физический институт