

621.039
К 49

23

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. Н. Климов

**ПОГРЕШНОСТИ
ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН**

МОСКВА 1977

620,039
К49

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. Н. Климов

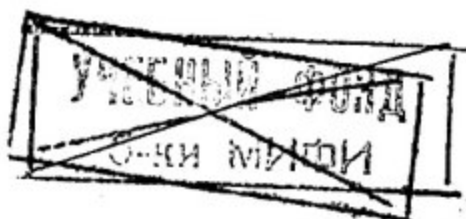
ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН

кнхр - 1/20

Утверждено
в качестве учебного пособия
редсоветом института

зверная техника
физика реакторов

58.33



МОСКВА 1977

Библиотечный
фонд
НИЯУ МИФИ
г. Москва

14

621.039.51(075)

К л и м о в А. Н. Погрешности измеряемых величин.
Учебное пособие. М., Изд. МИФИ, 68 с.

В учебном пособии излагаются выводы, обосновывающие методы обработки экспериментальных данных. Приводятся расчетные формулы для вычисления средних и их дисперсий для случаев однопараметрической, многопараметрической линейной и нелинейной зависимостей. Специально рассматриваются величины с распределением по закону Пуассона. Для этих величин указываются случаи возможной оптимизации измерений.

Пособие предназначено для студентов, выполняющих лабораторные работы в практикуме по физике реакторов, но может быть полезно всем, кто занимается обработкой экспериментальных данных.

Рисунков - 2, таблиц - 2, список литературы - 12 названий.

И. Т Е О Р И Я

1. Распределение вероятностей

Обработка опытных данных состоит в вычислении экспериментального среднего и погрешности его измерения. Методы обработки обосновываются теорией вероятностей, которая оперирует понятием случайной величины X , способной принимать различные значения x_i с вероятностями $p(x_i)$. Функция $p(x)$ называется законом распределения вероятностей случайной величины X . В зависимости от природы X закон ее распределения имеет тот или иной вид, который может быть либо предсказан теоретически, либо получен опытным путем. Случайная величина полностью определена, если закон ее распределения известен.

Через закон распределения $p(x)$ выражаются параметры центра распределения и его ширины. Параметром центра является математическое ожидание m величины X

$$M(X) = m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i), \quad (1)$$

$$M(X) = m = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, \quad (2)$$

где выражение (1) относится к дискретной случайной величине, (2) — к непрерывной и M — обозначает операцию вычисления математического ожидания. Параметром ширины является математическое ожидание квадрата отклонения x_i от m , называемое дисперсией, δ^2 :

$$M[(X-m)^2] = \delta^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^2 p(x_i), \quad (3)$$

$$M[(X-m)^2] = \delta = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p(x) dx. \quad (4)$$

Из формул (1) – (4) следует, что вычисление математического ожидания есть усреднение случайных значений x_i величины X , или функции от ее значений x_i , по вероятностям x_i . Следовательно, m есть среднее значение величины X , а дисперсия δ – среднее квадратичное отклонение x_i от среднего значения X . Математическое ожидание m и дисперсия δ называются числовыми характеристиками распределений.

2. Свертка распределений

Сложение случайных величин $Z = X + Y$ сопровождается наложением распределений X и Y , или их сверткой. При этом сумма Z является также величиной случайной с некоторым новым законом распределения. Однако всегда математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$m_z = m_x + m_y. \quad (5)$$

Если величины X и Y независимы, то и дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

$$\delta_z = \delta_x + \delta_y. \quad (6)$$

В случае зависимости X и Y (см. п. 3) в правой части выражения (6) появляется еще одно слагаемое δ_{xy} , величина которого определяется обоими распределениями $p(x)$ и $p(y)$.

Соотношения (5), (6) представляют собой важнейшие теоремы о числовых характеристиках распределений вероятностей. Они сохраняют силу вне зависимости от того, изменился или нет вид закона распределения Z в сравнении с законами X и Y . При свертке вид закона обычно изменяется. Лишь

несколько законов, например законы Гаусса и Пуассона, устойчивы к свертке.

Операции более сложные, чем сложение, для случайных величин обычно не определяются, поскольку соответствующие изменения законов распределения сложны или неизвестны. При необходимости же вычислять математические ожидания и дисперсии произвольных функций f от нескольких случайных величин X_k соответствующие выражения линеаризуют и поступают с ними, как с суммами. Такой подход оправдан, так как дисперсии случайных величин обычно малы, а в малом интервале изменения аргументов вблизи их математических ожиданий любая функция с хорошей точностью может быть представлена линейной зависимостью от аргументов:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \approx f(m_1, m_2, \dots, m_n) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_k} \right)_m (X_k - m_k), \quad (7)$$

где m_k — математические ожидания величин X_k , а индекс m при производных означает, что они взяты в точках $X_k = m_k$. Для линеаризованного выражения (7) математическое ожидание Y

$$m_y = M(Y) = f(m_1, m_2, \dots, m_n), \quad (8)$$

поскольку $M[f(m_k)] = f(m_k)$ ($f(m_k)$ — постоянное число) и $M[(X_k - m_k)] = 0$ — это также теоремы о числовых характеристиках. Если все X_k независимы, что всегда предполагается, то дисперсия Y получается в виде

$$\delta_y = M\{[f(X_k) - f(m_k)]^2\} = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_m^2 \delta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_m^2 \delta_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_m^2 \delta_n. \quad (9)$$

Постоянные коэффициенты перед случайными величинами обращаются в их квадраты перед дисперсиями (см. определение дисперсии (3) или (4)), а математические ожидания двойных произведений равны нулю, если все X_k независимые,

$$M[(X_j - m_j)(X_\ell - m_\ell)] = M(X_j - m_j) M(X_\ell - m_\ell) = 0.$$

3. Зависимость

Обычно в экспериментальной практике приходится иметь дело с независимыми случайными величинами. Тем не менее, случаи зависимости встречаются, и под зависимостью понимается следующее.

Зависимость может быть однозначной, когда каждому случайному значению x_i величины X строго соответствует одно случайное значение y_i величины Y . В этом случае распределением Y просто является распределение X . Для таких величин дисперсия суммы не равна сумме дисперсий, а примером может служить игральная кость, на каждой грани которой имеется две цифры X и Y .

Зависимость называется стохастической, если каждому случайному значению x_i соответствует свое распределение y_i , т.е. характеристики распределения Y зависят от x_i . Верно и обратное, так как зависимость всегда взаимная. В случае стохастической зависимости дисперсия суммы также не равна сумме дисперсий слагаемых, хотя случайно может быть и равна. Пример стохастической зависимости дают температуры почвы и воздуха у поверхности земли, которые взаимосвязаны, но из-за ряда причин существенно различаются. Частным случаем стохастической зависимости является зависимость функциональная, когда математические ожидания m_x и m_y связаны строгим математическим соотношением $m_y = f(m_x)$, что обычно представляется как $y = f(x)$.

Однозначная зависимость представляет один из предельных случаев стохастической, когда с x_i связано не распределение y_i , а только одно значение y_i . Другой предельный случай — независимость, когда любому x_i соответствует одно и то же распределение y_i , т.е. характеристики распределения Y не зависят от x_i . При этом получение на опыте x_i не предопределяет преимущественного получения какого-либо y_i .

Зависимость может проистекать от нелинейных эффектов. Например, благодаря мертвому времени счетчика частиц скорость счета может зависеть от числа проходящих частиц, так как при большом их числе какая-то доля попадает в мертвое время и не регистрируется. В этом случае не справедлива не только теорема сложения дисперсий (6), но и теорема сложения математических ожиданий (5). Такого характера зависи-

мость должна быть изучена опытным путем и введены поправки к теоремам сложения числовых характеристик.

4. Основные распределения

Если в некоторый момент времени t_0 образовалось n радиоактивных атомов, то вероятность того что в течение интервала $\Delta t = t - t_0$ распадется N атомов дает биномиальное распределение

$$B(N) = C_n^N p^N (1-p)^{n-N}, \quad (10)$$

где C_n^N — число сочетаний из n по N , а вероятность p определяется константой распада радиоактивного вещества и интервалом Δt . Математическое ожидание распределения (10) $m = np$, дисперсия $\delta^2 = np(1-p)$. Если интервал Δt мал в сравнении с периодом полураспада, то p мало и распределение чисел распадающихся атомов становится предельным — распределением Пуассона:

$$P(N) = e^{-a} \frac{a^N}{N!}. \quad (11)$$

Математическое ожидание распределения Пуассона $m = a$, т.е. смысл параметра a — среднее число событий за Δt , дисперсия (δ^2) также равна a . При радиоактивном распаде число атомов все время уменьшается, поэтому изменяется и распределение Пуассона, описывающее числа распадов, поскольку снижается параметр a . В других случаях наблюдения дискретных событий a неизменно, что фактически означает бесконечно большое число возможных событий. В таком случае распределение чисел событий по любому временному интервалу всегда предельное, т.е. распределение Пуассона. Последнее часто встречается в задачах математической статистики, в том числе физических.

Особое место занимает нормальное распределение, или распределение Гаусса, поскольку оно описывает результаты сверток большинства других распределений:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

Распределение Гаусса непрерывное, т.е. возможные значения случайной величины с вероятностями (12) принадлежат всей числовой оси. Единственный параметр распределения σ называется стандартным. Математическое ожидание $m=0$, дисперсия $\delta=\sigma^2$. Таким образом, стандарт нормального закона есть квадратный корень из его дисперсии. Математическое ожидание выражения (12) равно нулю, потому, что распределение записано в координатах x , отсчитываемых от m . В таком случае распределение называется центрированным. В любых координатах при $x=m$ распределение Гаусса имеет максимум вероятности (рис. 1).

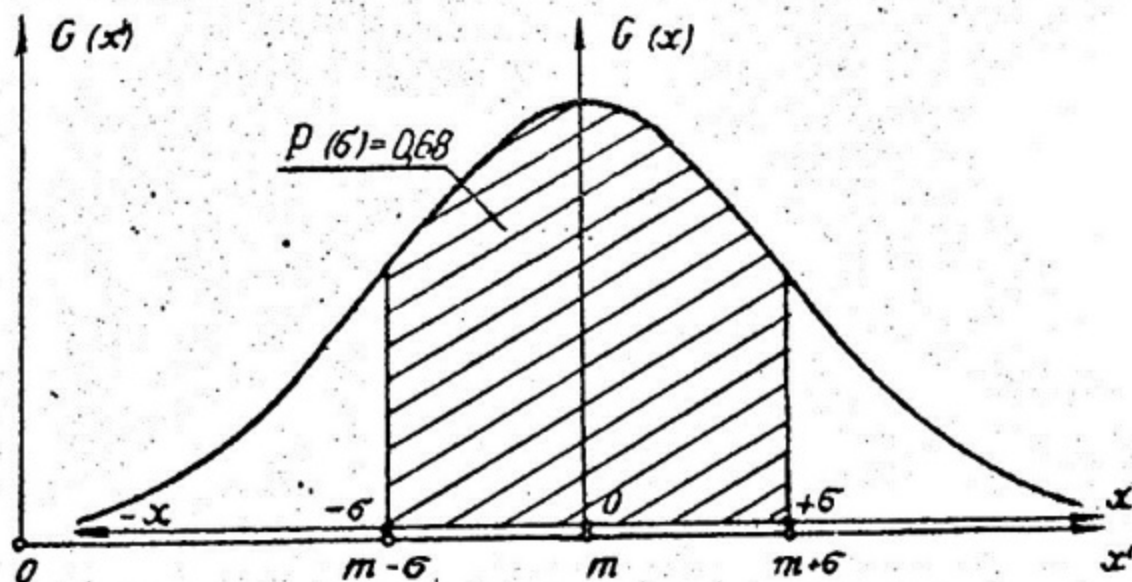


Рис. 1. Распределение Гаусса

Распределения вероятностей нормируются на единицу, т.е. сумма вероятностей всех случайных значений равна единице. Интервал изменения x с заданной суммарной вероятностью P , обычно симметричный относительно центра распределения m , называется доверительным интервалом. Поскольку стандарт нормального закона имеет ту же размерность,

что сама величина X , в единицах стандарта можно определять доверительные интервалы. Например,

$$P(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(1) = 0,68269(13)$$

где

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (14)$$

— интеграл вероятности Гаусса. Его некоторые значения приведены в табл. 1.

Таблица 1

x	t	$\Phi(t)$
σ	1	0,68269
2σ	2	0,95450
3σ	3	0,99730
4σ	4	0,99994

Следовательно, в пределах $m \pm \sigma$ находится 68% всех случайных значений X_i , т.е. интервал $m \pm \sigma$ является 68-процентным доверительным интервалом. Следует, однако, указать, что в каждом распределении интервалу $m \pm \sqrt{\sigma}$ соответствует своя величина суммарной вероятности $P(\sqrt{\sigma})$, которая может быть и больше и меньше $P(\sigma) = 0,68$.

5. Предельные теоремы

Из предельных теорем теории вероятностей для практики измерений и обработки экспериментальных данных особенно важны две — теорема Бернулли и теорема Ляпунова. Первая из них обосновывает метод измерения вероятностей: если проведено n измерений и в k_i случаях получено случайное значение x_i , то доля случаев k_i/n и есть примерно вероятность $p(x_i)$;

$$p(x_i) \approx \frac{k_i}{n}, \quad (15)$$

поскольку предельным значением доли является точное значение вероятности. Соотношение (15) называется законом больших чисел Бернулли (1713 г.). Следовательно, проводя большое число измерений, можно найти все $p(x_i)$, т.е. получить на опыте закон распределения вероятностей любой случайной величины X .

Предельная теорема Ляпунова (1900 г.) утверждает, что при бесконечном числе сверток любого центрированного распределения в пределе получается нормальное распределение. И, как всегда, практическая ценность предельной теоремы состоит в том, что ее вывод справедлив и для конечного числа сверток. Уже несколько сверток приводят к распределению, мало отличающемуся от нормального, а если число сверток не менее десяти, то результат свертки фактически точно нормален. Определяемые по результатам опытов средние значения измеряемых величин выражаются через суммы случайных значений x_i . Значит, распределения средних представляют собой многократные свертки исходных распределений. И если вычислять дисперсии распределений не измеряемых величин, а их средних, то это будут дисперсии нормальных законов, для которых $\sqrt{\sigma} = \sigma$ и $P(\sigma) = 0,68$, т.е. дисперсия среднего не зависит от вида исходного распределения всегда определяет один и тот же доверительный интервал, и оценка погрешности измерения по дисперсии среднего оказывается универсальной.

В огромном числе случаев теорема Ляпунова обосновывает предположение о нормальном законе распределения самих измеряемых величин X , а не только их средних. На результат отдельного измерения влияют очень многие причины, каж-

дая из которых, может быть, привела бы к закону, отличному от нормального, но в результате свертки распределений, порождаемых разными причинами суммарное распределение оказывается нормальным. Поэтому закон распределения измеряемых на опыте непрерывных физических величин, таких, как длина, масса, время, электрический заряд и другие, а также любых, выражаемых через них физических констант, нормальный.

Однако нормальный закон не является единственным предельным. Математик Леви поставил задачу найти семейство всех предельных законов. Эта задача была решена им и другими в 1925-1940 гг. Оказалось, что предельными законами нецентрируемых распределений являются законы Пуассона. Это — дискретные распределения, описывающие счет случайных событий, у которых даже при предельных переходах сохраняется абсолютное начало отсчета в нуле. Правда, многократная свертка любого закона Пуассона, т.е. с любым параметром a , приводит к закону Пуассона (поскольку законы Пуассона устойчивы к свертке), как угодно мало отличающемуся от нормального, т.е. нормальный закон является предельным и по отношению к законам Пуассона. Этим определяется центральное место закона Гаусса.

Вместе с тем, не следует забывать, что свертка некоторых распределений не приводит к закону Гаусса и, следовательно, доверительный интервал $m \pm \sqrt{\delta}$ не будет стандартным 68-процентным, где δ — дисперсия распределения средних. Однако такие величины фактически интереса не представляют, поскольку крайне редко встречаются. В самом деле, при наименьшем целочисленном a , т.е. $a = 1$, в распределении Пуассона $P(\sqrt{\delta}) = 0,7358$, что существенно отличается от стандартной суммарной вероятности по доверительному интервалу $\pm \sigma$ в распределении Гаусса, $P(\sigma) = 0,68269$. Но уже при $a = 9$, для которого $\sqrt{\delta} = \sqrt{a} = 3$ — целое число, $P(\sqrt{\delta}) = 0,6874$, т.е. отличается от принимаемого за стандарт числа лишь на 0,7%. Для больших a указанное различие совсем не существенно. Это происходит потому, что распределение Пуассона с $a = 10$ представляет собой свертку десяти распределений Пуассона с $a = 1$, а результат такого числа сверток практически нормален, поскольку нормальное распределение является предельным и по отношению к распределениям Пуассона. Следовательно, лишь те распределения, кото-

рые при свертке сходятся к распределениям Пуассона с $a < 10$, или сами распределения Пуассона с $a < 10$, выпадают из общего правила. А такие случаи крайне редки. Ведь если распределение Пуассона имеет $a = 10$, то это значит, что на опыте было зарегистрировано лишь десять событий (см. 1У). При этом точность регистрации величины математического ожидания столь низка, т.е. относительная погрешность измерения столь велика, $\alpha = \sqrt{\delta}/m = \sqrt{a}/a = 1/\sqrt{10} = 0,32$, что может удовлетворить лишь при невозможности зарегистрировать более 10 событий. Но распределение Пуассона — предельное и, следовательно, число регистрируемых событий не ограничено. Поэтому обычно "набирают статистику", ожидая появления хотя бы нескольких сотен, а лучше многих тысяч событий. А свертка сотен или тысяч распределений Пуассона с $a = 1$ уже не отличается от нормального, так что интервал $a \pm \sqrt{a}$ оказывается стандартным 68-процентным доверительным интервалом.

Других исключений из правила нет. И теорема Ляпунова образует фундамент, на который опирается фактически вся практика обработки результатов измерений [1-6].

II. О П Ы Т

1. Экспериментальное среднее

Характеристики распределений вероятностей, определяемые по опытными данным, могут быть найдены лишь приближенно в силу приближенного равенства (15) при конечном числе измерений n . При этом наилучшим приближением к математическому ожиданию m является арифметическое среднее \bar{x} измеренных значений x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (16)$$

Приближение (16) наилучшее в том смысле, что дисперсия x наименьшая (см. Ш, п. 1). Кроме того, $M(x) = M(X) = m$, т.е. математическое ожидание арифметического среднего измеренных значений есть математическое ожидание величины X . Математическое ожидание определяется через все случайные значения величины X , а если число случайных значений конечно, то x должно быть приближенно равно m . В самом деле, если измерений много, то многие значения x_i в ряду x_1, x_2, \dots, x_n повторяются, и число ν разных значений X меньше n . Если индексами j отметить разные значения X , а число значений с данными j обозначить k_j , то x представится как

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{k_j}{n} x_j \approx \sum_{j=1}^{\nu} x_j p(x_j) \approx M(X) = m, \quad (17)$$

где первое приближение основано на (15), а второе — на (1).

2. Дисперсия измеряемой величины

Дисперсия распределения измеряемой величины X , которая для отличия от ее экспериментального значения δ_x будет иметь дополнительный индекс δ_x^o , в соответствии с выражениями (3), (4), есть среднее квадратичное отклонение случайных значений x_i относительно математического ожидания m , или при конечном числе x_i

$$\delta_x^o = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{n} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{k_j}{n} (x_j - m)^2 \approx \sum_{j=1}^{\nu} (x_j - m)^2 p(x_j) \approx M[(X - m)^2] = \delta_x^o, \quad (18)$$

где приближения те же, что и в (17). Но m неизвестно, и по опытным данным может быть вычислена лишь величина δ_x' , похожая на дисперсию,

$$\delta'_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x)^2}{n}, \quad (19)$$

или среднее квадратичное отклонение измеренных значений x_i относительно экспериментального среднего x . Однако δ'_x можно так преобразовать, что математическое ожидание δ'_x окажется представимым через дисперсию δ_x^0 :

$$\begin{aligned} \delta'_x &= \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - m) - (x - m)]^2}{n} = \\ &= \frac{\sum (x_i - m)^2}{n} - 2 \frac{(x - m) \sum (x_i - m)}{n} + \frac{(x - m)^2 \cdot n}{n} = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n} - (x - m)^2, \quad (20) \end{aligned}$$

где $\sum (x_i - m)/n = x - m$. В правой части равенства (20) первый член есть δ_x^0 , его математическое ожидание δ_x^0 (см. выражение (18)), а второй — квадратичное отклонение относительно m экспериментального среднего x , полученного из n измерений. Математическое ожидание этой величины есть дисперсия среднего, которая в последующем обозначается δ^0 , а ее экспериментальное приближение — δ (без индексов). Ведь если сделать две серии по n измерений и в каждой определить свое арифметическое среднее, $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, то второй член в выражении (20) представится как $[(x^{(1)} - m)^2 + (x^{(2)} - m)^2]/2$.

при k сериях это будет $[\sum_{j=1}^k (x^{(j)} - m)^2]/k$, т.е. в пределе это есть дисперсия распределения средних x . Дисперсия среднего также выражается через δ_x^0 , $\delta^0 = \delta_x^0/n$ (см. следующий п. 3). Следовательно, в том же приближении (15), которое использовалось в (17)–(18),

$$\delta'_x \approx \delta_x^0 - \delta^0 = \delta_x^0 - \frac{\delta_x^0}{n} = \frac{n-1}{n} \delta_x^0 \approx \frac{n-1}{n} \delta_x = \delta'_x. \quad (21)$$

Отсюда экспериментальная дисперсия δ_x получается в виде

$$\delta_x = \frac{n}{n-1} \delta'_x = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (22)$$

Квадратный корень из δ_x является стандартом σ_x лишь тогда, когда закон распределения измеряемой величины X нормальный. Однако это обстоятельство не представляет интереса, поскольку по выполнению n измерений всегда можно найти числовые характеристики другого распределения — распределения средних, и по его дисперсии δ указать гораздо более узкий диапазон вероятного расположения искомого m , чем по дисперсии δ_x распределения измеряемой величины X .

3. Дисперсия среднего

Вычисление среднего (16) есть вычисление одного из случайных значений другой случайной величины $\bar{X} = (1/n) \sum X_i$.

Деление $\sum X_i$ на n приводит математическое ожидание новой величины \bar{X} к m исходной, поскольку все X_i под знаком суммы — одна и та же величина X . Так что экспериментальное приближение (16) к математическому ожиданию одно и то же у X и \bar{X} , но дисперсии их распределений различны. По теореме сложения дисперсий (9)

$$\delta^{\circ} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \delta_{ix}^{\circ} = \frac{n \delta_x^{\circ}}{n^2} = \frac{\delta_x^{\circ}}{n} \approx \frac{\delta_x}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} = \delta, \quad (23)$$

поскольку все δ_{ix}° — одна и та же дисперсия δ_x° распределения X . А в соответствии с теоремой Ляпунова δ° или ее приближенное значение δ является дисперсией нормального закона, так как распределение средних \bar{X} получено в результате свертки n распределений X . Следовательно,

стандарт распределения средних

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (24)$$

Итак, дисперсия среднего в n раз меньше дисперсии распределения измеряемой величины X , а стандарт среднего в \sqrt{n} раз меньше стандарта, или просто корня из дисперсии распределения X .

4. Квадратичная погрешность

Поскольку законом распределения средних является нормальный закон, то найденное по опытными данным среднее \bar{x} лежит в пределах $m \pm \sigma$ с вероятностью 0,68, (см. 1, п. 4). Верно и обратное: искомое m со стандартной вероятностью 0,68 лежит в пределах $\bar{x} \pm \sigma$. В этом и состоит смысл определения погрешности измерения, окончательный результат которого представляется в виде

$$\text{искомая величина} = \bar{x} \pm \sigma, \quad (25)$$

где стандарт среднего σ и есть квадратичная погрешность.

Относительной погрешностью измерения называется отношение

$$\alpha = \frac{\sigma}{\bar{x}}, \quad (26)$$

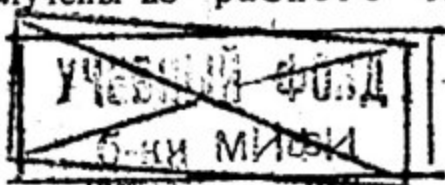
которое часто выражается в процентах. Например, при $\alpha = 0,05$ точность измерения 5%. Относительная погрешность тем меньше и точность измерения тем выше, чем меньше стандарт среднего. Дисперсия δ_x или стандарт σ_x регулярной зависимости от числа измерений не имеют, а лишь уточняются при возрастании n благодаря все лучшему приближению (15). Стандарт же среднего σ меньше σ_x в \sqrt{n} раз. Следовательно,

с ростом n точность измерения математического ожидания случайной величины возрастает пропорционально \sqrt{n} , т.е. при увеличении числа исходных измерений в 4 раза Δ уменьшается в 2 раза и т.д.

5. Статистический вес

Математическое ожидание случайной величины (1) представляет собой усреднение всех ее возможных значений по вероятностям. Это означает, что в общую сумму каждое значение входит некоторой своей частью, определяемой вероятностью. Другими словами, вероятность указывает вес данного значения при образовании среднего. В этом частном случае вероятности и являются весами значений случайной величины. Но обычно веса величин определяются более широко и на единицу не нормируются. Веса — просто числа, пропорциональные вероятностям, одно из которых, обычно наименьшее, часто принимается за единицу. В последнем случае для весов устанавливается шкала отсчета, хотя она может быть произвольной, так как веса определяются с точностью до коэффициента пропорциональности. Важно лишь, чтобы отношение весов двух величин было отношением их вероятностей.

Поскольку частоты появления отдельных значений случайной величины пропорциональны вероятностям, то они могут быть приняты за веса. Тогда весом среднего будет полное число измерений n . Это следует, например, из выражения (17): умножив правую и левую части на n , получим, что если k_j — веса x_j , то n — вес среднего \bar{x} . Правда, полное число измерений является весом среднего лишь при условии, что все измерения, определяющие среднее, равнозначны. Это означает, что стандарт σ_x распределения всех x_j один и тот же. Обычно так и есть, если измерения повторяются в одинаковых условиях и относятся к получению того же среднего. Однако часто приходится усреднять не результаты опыта, а имеющие разные σ средние разных опытов, или находить параметры зависимости для нескольких неравных средних, т.е. усреднять неравнозначные величины. Средние оказываются неравнозначными, если получены из разного числа измерений и,



тем более, если получены разными методами с применением разных приборов, инструментов и т.д., когда различны и σ_x , входящие в стандарты средних \bar{x} . Очевидно, что при получении общего среднего предпочтение следует отдать тем промежуточным средним, точность измерения которых выше, т.е. стандарты которых меньше. Этим промежуточным средним следует приписать большие веса. И поскольку вся информация о точности измерения промежуточных средних представлена величинами их стандартов, веса средних следует определять через стандарты.

Если средние получены из разного числа измерений, но одним методом и в одинаковых условиях, так что стандарты σ_x исходных распределений одинаковы, то отношение весов w любых двух таких средних будет отношением чисел измерений

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{n_i}{n_j}, \quad (27)$$

так как веса таких средних и есть числа исходных измерений. С другой стороны, стандарты этих средних обратно пропорциональны корням из чисел измерений (см. выражение (24)), и непротиворечивым определением веса через стандарт является следующее

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2}, \quad (28)$$

т.е. веса величин обратно пропорциональны квадратам их стандартов. Определение (28) является общим, относящимся ко всем величинам с известными стандартами, т.е. к измеренным на опыте или полученным путем расчета из измеренных на опыте величинам. Поскольку веса определяются до произвольной константы, то всегда вес одной из величин можно принять за единицу. И если положить $w_j = 1$, то вес любой другой величины

$$w_i = \frac{\sigma_I^2}{\sigma_i^2} = \frac{\delta_I}{\delta_i}, \quad (29)$$

где σ_I и δ_I стандарт и дисперсия величины с единичным весом.

Экспериментальные средние регулярной зависимости от числа измерений не имеют, они лишь уточняются при возрастании n , вследствие все лучшего приближения (15). Поэтому, когда измеряется одно и то же математическое ожидание, то разные средние примерно равны между собой и подстановка выражения (26) в (27) дает

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\alpha_j^2}{\alpha_i^2}, \quad (30)$$

т.е. веса могут быть выражены и через относительные погрешности. Однако определение (30) непригодно для весов неодинаковых средних, т.е. когда $x_i \neq x_j$. Разные средние получаются в опытах по изучению зависимости случайной величины от какого-либо аргумента (времени, пространственной координаты, энергии и др.).

6. Среднее взвешенное

Если веса w_i n усредняемых величин x_i известны, то поскольку нормированные на единицу веса $w_i / \sum_{j=1}^n w_j$ есть вероятности, в соответствии с выражениями (1) и (17), среднее взвешенное

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (31)$$

Формула (31) переходит в (16) в случае равнозначных измерений, когда все w_i одинаковы.

7. Дисперсия среднего взвешенного

По аналогии с формулой (23) дисперсия среднего взвешенного получается из (31) на основании теоремы сложения дисперсий (9)

$$\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j^2}{(\sum \omega_i)^2} \delta_j = \frac{1}{(\sum \omega_i)^2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \frac{\delta_i}{\omega_i} = \frac{\delta_i}{(\sum \omega_i)^2} \sum \omega_i = \frac{\delta_i}{\sum \omega_i}, \quad (32)$$

где использована зависимость (29). Остается получить выражение δ_i .

Квадрат разности $(x_i - x)^2$, где x — среднее (16), не есть дисперсия распределения всех x_i . Но если измеренных

x_i много, то $(1/n) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$ — дисперсия X (см. выражение (19)). Поэтому отношение $(x_i - x)^2 / \delta_i'$, вообще говоря, не есть единица, но будучи просуммированным по многим x_i (и поделенным на n) равно единице с точностью до приближения (15). В данном случае неравноточных величин все δ_i' различны. Однако отношение i -го квадрата разности к i -й дисперсии даст единицу после суммирования по многим i (и деления на n), поскольку отношение квадрата разности к своей дисперсии уравнивает все такие выражения. Поэтому с точностью до обычного приближения (15)

$$1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x)^2}{\delta_i'} = \frac{1}{\delta_i'} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (x_i - x)^2}{n} \quad (33)$$

или

$$\delta_i' = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (x_i - x)^2}{n}, \quad (34)$$

где x — среднее взвешенное, δ_i' выражено через δ_i из выражения (29) и у δ_i' поставлен штрих, означающий, что дис-

персия δ'_I вычислена не относительно математического ожидания m , а относительно среднего \bar{x} . Поправка на этот недостаток уже обсуждалась, и по аналогии с (22) дисперсия величины с единичным весом равна

$$\delta_I = \delta'_I \frac{n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (35)$$

Тогда дисперсия отдельного взвешиваемого x_i (см. выражение (29))

$$\delta_i = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot w_i}, \quad (36)$$

дисперсия среднего взвешенного (см. формулу (32)):

$$\delta = \frac{\delta_I}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n w_i} \quad (37)$$

и стандарт нормального распределения средних взвешенных

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n w_i}} = \frac{\sigma_I}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}} \quad (38)$$

Окончательный результат представляется в виде

$$\text{среднее взвешенное} = \bar{x} \pm \sigma, \quad (39)$$

где \bar{x} находится по формуле (31), а σ по (38) (либо по (40) (см. п. 8).

8. Прямое вычисление σ

Приведенная процедура вычисления стандарта среднего взвешенного может показаться излишней, хотя ее всегда можно выполнить, если известны n промежуточных средних с их весами. Ведь величины δ_i , полученные по формуле (36) на самом деле заранее известны, так как δ_i есть σ_i^2 , которые по условию заданы вместе с x_i (через σ_i^2 определяются w_i). Следовательно, стандарт среднего взвешенного можно получить без промежуточных выкладок, используя соотношения (32) и (29)

$$\sigma = \frac{\sigma_I}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}} = \frac{\sigma_I}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}, \quad (40)$$

или

$$\frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (41)$$

Из выражений (40) или (41) вытекает, что стандарт среднего взвешенного меньше самого малого из σ_i , что естественно. Точность среднего не может быть хуже самой точной из усредняемых величин. Если из многих усредняемых величин одна имеет высокую точность по сравнению с остальными, то точность среднего взвешенного есть точность этой величины. Если же, напротив, точности всех x_i одинаковы, т.е. все σ_i равны, то точность среднего взвешенного в \sqrt{n} раз больше точности x_i , а σ в \sqrt{n} раз меньше любого σ_i , что находится в соответствии с формулой (24). В общем случае точность среднего взвешенного выше точности x_i в $[(\sum w_i/w_i)]^{1/2}$ раз, а стандарт среднего взвешенного σ в такое же число раз меньше σ_i (см. выражения (36) и (38)).

Вычисление стандарта среднего взвешенного по формулам (40) или (38) должно приводить к одному результату, по

крайней мере, с точностью до приближения (15). Однако это возможно лишь в том случае, если усредняемые средние не представляют собой маловероятный набор значений в распределении промежуточных средних. А последнее можно ожидать тем чаще, чем меньше n . При этом σ по формуле (38) может быть и меньше и больше σ по (40).

Кроме того, промежуточные средние могут содержать систематические погрешности, которые процедура получения средних (см. выражения (16) и (24)) учесть не может. При усреднении же средних эти систематические погрешности являются случайными, так как появление одинаковых систематических погрешностей в экспериментах, выполняемых разными методами, весьма маловероятно. И если систематические погрешности действительно есть, то формула (38) их учтет, поскольку она основана на реальном распределении промежуточных средних, тогда как формула (40) оставит их незамеченными, так как оперирует только стандартами усредняемых величин, которые не включают систематических погрешностей каждого отдельного метода измерения. При этом σ по формуле (38) должно быть больше σ по (40). Правда, влияние систематических погрешностей может привести к тому, что (38) даст результат более низкий, чем (40), если систематические погрешности случайно занижали как раз большие промежуточные средние, а завышали меньшие. Это также возможно при малом n .

Если σ по формулам (40) и (38) не совпадают, то значит не совпадают и заданные σ_i с $\sigma_i = \sqrt{\delta_i}$ по формуле (36). Точно также не равны σ_r в зависимостях $w_i = \sigma_r^2 / \sigma_i^2$ для весов усредняемых средних и $\sigma_r = \sqrt{\delta_r}$ по формуле (35). Если, например, в формуле для весов σ_r принято за единицу, то (35) будет больше или меньше единицы в зависимости от того, σ по формуле (38) больше или меньше σ по (40). Но все эти величины в пределах приближения (15) попарно равны, если нет систематических погрешностей и средние не представляют собой маловероятную выборку из распределения средних.

В связи с изложенным, стандарт среднего взвешенного следует вычислять по формулам (40) и (38). Поскольку формула (38) основана на реальном распределении усредняемых величин и учитывает систематические погрешности средних, то ей должно быть отдано предпочтение. Однако стандарт среднего

взвешенного не может быть меньше σ по формуле (40), так как (40) дает наименьшую величину стандарта среднего взвешенного в том случае, когда усредняемые величины не содержат систематических погрешностей и представляют собой типичный набор значений случайной величины. Формула (40) определяет теоретический минимум стандарта среднего взвешенного. И если σ по формуле (38) оказывается меньше σ по (40), то малое значение не может быть использовано для оценки погрешности среднего взвешенного, и за его стандарт должно быть принято σ по (40). Итак, за стандарт среднего взвешенного следует взять тот результат по формулам (38) и (40), который больше. Правда, если σ по (38) больше σ по (40) в полтора или более раз, то следует перейти к обработке без весов, т.е. положить все $w_i = 1$.

9. Распределение Стьюдента

Некоторый интервал изменения случайной величины будет заданным доверительным интервалом, например, интервал $x_0 \pm \sigma^0$ будет 68-процентным доверительным интервалом (см. выражение (13)), лишь при условии, что x_0 и σ^0 являются собственно параметрами нормального закона. Однако параметры закона распределения не известны и определяются по опытным данным в приближениях (17), (18). Получаемые из измерений экспериментальное среднее (16) или (31) и экспериментальный стандарт (24) или (38) являются просто какими-то случайными значениями параметров распределения x_0 и σ^0 . Поэтому утверждать, что интервал $x \pm \sigma$, где σ — экспериментальный стандарт, является 68-процентным доверительным интервалом, можно, в свою очередь, лишь с некоторой вероятностью. Но если найти закон распределения экспериментальных дисперсий и получить свертку нормального распределения средних с распределением экспериментальных дисперсий, то новое распределение средних окажется свободным от приближений, связанных с малым числом измерений, поскольку недостоверность положения среднего относительно математического ожидания из-за случайного значения стандарта учтется в самом распределении. Это и есть распределение Стьюдента, или t -распределение.

Распределением случайных значений экспериментальной дисперсии δ_x (22) является χ^2 - распределение с $n-1$ степенями свободы, т.е. с $n-1$ независимыми измерениями. И хотя все отдельные измерения считаются независимыми в смысле раздела 1, п.3, вычисление среднего и стандарта возможно лишь при двух и более измерениях. Из одного измерения можно получить только какое-то случайное значение измеряемой величины. Если измеряемая величина представляется двухпараметрической зависимостью $y = a + bx$, то для определения самих параметров a и b нужно, по крайней мере, два измерения, а для получения их дисперсий - обязательно более двух измерений, т.е. независимыми из n будут $n-2$ измерений и т.д. Вид χ^2 -распределения определяется не числом измерений, а числом степеней свободы. Математическим ожиданием распределения экспериментальных дисперсий является собственно дисперсия нормального закона δ_x^0 , а само распределение показывает вероятность получения в n измерениях данного значения дисперсии δ_x .

На основании χ^2 -распределения можно рассчитывать доверительные интервалы для экспериментальных дисперсий, и поскольку такие расчеты не связаны с какими-либо приближениями, эти доверительные интервалы широко используются на практике. Для их определения составлены соответствующие таблицы. Однако более важно находить доверительные интервалы средних значений, так как целью измерения обычно является вычисление среднего, а не дисперсии, которая нужна лишь для вычисления доверительного интервала среднего.

Независимой переменной в распределении Стьюдента является величина t , которая строится так, чтобы упростить вычисление доверительных интервалов экспериментальных средних, $t = (x - m) / \sigma$, где x - среднее (16) или (31), а σ - экспериментальный стандарт среднего (24) или (38). Распределение Стьюдента позволяет вычислить суммарную вероятность для любого интервала $\pm t$ или, наоборот, для любой суммарной вероятности указать доверительный интервал $\pm t$. Этот t - интервал является доверительным интервалом отклонения экспериментального среднего x от неизвестного m в единицах экспериментального стандарта σ . И поскольку доверительный интервал определяется через известное из опыта σ , его значение точно. Параметром распределения Стьюдента, как и в χ^2 -распределении, является число степеней свободы.

В соответствии с теоремой Ляпунова распределение Гаусса является предельным для распределения Стьюдента. Однако при малых числах измерений различие в величинах доверительных интервалов, вычисляемых по распределениям Гаусса и Стьюдента, оказывается весьма существенным, особенно для больших суммарных вероятностей, например, 0,95, 0,99 и т.д., которые используются в задачах математической статистики. Поэтому столь важно распределение Стьюдента как раз для математической статистики. Фактически лишь после получения распределения Стьюдента в 1908 г. математическая статистика стала на твердую почву, освободившись от недостоверных определений доверительных интервалов на основании нормального закона. В обычной же экспериментальной практике распределение Стьюдента не играет такой роли.

Во-первых, вычисление погрешностей измерений связано с нахождением только одного доверительного интервала, стандартного 68-процентного. Отличие же достоверных определений этого интервала на основании распределения Стьюдента от недостоверного определения на основе закона Гаусса, где всегда $P(\sigma) = 0,68$, приведено в табл. 2.

Таблица 2

Число степеней свободы k	Число измерений однопараметрической зависимости $n = k + 1$	$P_k(t)$ распределения Стьюдента, т.е. при $t = \pm 1$	Доверительный интервал $\pm t$ для $P_k(t) = 0,68$ в распределении Стьюдента
1	2	0,500	1,8
2	3	0,577	1,3
3	4	0,609	1,2
4	5	0,626	1,1
9	10	0,657	1,06
19	20	0,670	1,03

И если для $n = 2$ суммарная вероятность при $t = \pm 1$, т.е. при $x - m = \pm \sigma$, или для всех $x = m \pm \sigma$, будет не 0,68, а только 0,5, и 68-процентный интервал для $n = 2$ есть $t = \pm 1,81$, т.е. $m \pm 1,86\sigma$, то уже при $n = 20$ расхождения практически нет.

Во-вторых, определяемая по опытным данным величина обычно является функцией нескольких других, непосредственно

измеряемых в опытах, $Y=f(X_1, X_2, \dots)$. Вообще говоря, свертка нескольких распределений Стюдента со степенями свободы k_i приводит к распределению Стюдента со степенью свободы $\sum k_i$. И поскольку полное число измерений всех X_i обычно велико, то уточнение величины стандартного 68-процентного интервала по распределению Стюдента обычно не представляет интереса. Правда, число степеней свободы свертки разных распределений X_i не обязательно равно $\sum k_i$ и может быть меньше $\sum k_i$, вплоть до наименьшего из всех k_i . При этом интерпретация числа степеней свободы свертки становится затруднительной, а поправка по распределению Стюдента в конце концов оказывается несущественной.

Вычислять же 68-процентные доверительные интервалы по распределению Стюдента для величин X_i , через которые затем будет вычисляться погрешность величины Y , недопустимо. В соответствии с теоремами о числовых характеристиках и предельными теоремами, дисперсией предельного нормального закона является сумма дисперсий свертываемых распределений без каких бы то ни было поправок к суммируемым дисперсиям. Поэтому t -поправка к σ , если она существенна, может быть введена лишь для стандарта конечной расчетной величины Y , чтобы гарантировать интервал, в котором со стандартной вероятностью 0,68 лежит искомое математическое ожидание величины Y . Но такая поправка должна быть обязательно оговорена, так как исправленные дисперсии нельзя использовать в возможной последующей обработке экспериментальных данных. Исправленные дисперсии дадут завышенное значение дисперсии предельного нормального закона, т.е., в свою очередь, приведут к ошибке.

III. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

1. Условие минимума

Арифметическое среднее результатов измерения (16)
 есть примерно математическое ожидание случайной величины.

Вместе с тем, арифметическое среднее \bar{x} является наилучшим для данной выборки в том смысле, что обращает в минимум сумму $L(x')$ квадратов отклонений измеренных значений от какого-то среднего x' . Именно, при $x' = \bar{x}$

$$L(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min, \quad (42)$$

так как из

$$\frac{dL(x')}{dx'} = \sum_{i=1}^n -2(x_i - x') = 0 \quad (43)$$

следует $x' = (\sum x_i)/n = \bar{x}$, т.е. арифметическое среднее (16). А значит экспериментальная дисперсия (19) или (22) есть наименьшее из всех возможных $(1/n) \cdot L(x')$ или $[1/(n-1)] \cdot L(x')$.

В случае неравноточных измерений среднее взвешенное (31) составляет условие минимума суммы квадратов отклонений относительно произвольного среднего x' измеренных значений, взятых со своими весами w_i , т.е. при $x' = \bar{x}$

$$L(x) = \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})^2 = \min, \quad (44)$$

так как из

$$\frac{dL(x')}{dx'} = \sum_{i=1}^n -2w_i (x_i - x') = 0 \quad (45)$$

следует, что x' равно среднему взвешенному \bar{x} (формула (31)). Поскольку условия минимума (42), (44) или (43), (45) определяют в приближении (15) математическое ожидание случайной величины, на них основан метод наименьших квадратов, см. [7, 8, 9]. Правда, при измерении единственного математического ожидания условия минимума не используются, так как эквивалентными им являются выражения для арифметических средних (16) или (31). Но при изучении зависимости случайной величины от некоторой переменной, $Y(x)$, аналогичные выражения для математических ожиданий более сложны и находятся из условий минимума.

2. Выбор зависимости

Метод наименьших квадратов не дает вида зависимости $Y(x)$. Вид зависимости либо предполагается на основании теоретических соображений, либо выбирается, как наиболее соответствующий экспериментальным данным (см. [8, 9, 10]). И чтобы сделать такой выбор или подтвердить справедливость ожидаемой зависимости, результаты опыта следует прежде всего представить графически, как y_i в функции x_i . Графическое представление тем более важно, что часто предполагаемая зависимость выполняется не для всех значений x_i . На графике легко выделить область ее применимости и таким образом избежать грубой ошибки. Ведь метод наименьших квадратов позволяет найти наилучшие параметры любой зависимости, которая приписывается какому угодно набору значений случайной величины.

3. Линейная зависимость

Простейшая зависимость величин — линейная

$$y(x) = a + bx, \quad (46)$$

которая, вообще говоря, непрерывная. Сама же случайная величина Y может быть как непрерывной, так и дискретной, поскольку формула (46) представляет собой зависимость не величин $Y(x)$, а их математических ожиданий.

Получение выражения (46) на опыте состоит в измерении средних значений $y^{(i)}$ в некотором числе точек x_i , взятых в представляющем интерес диапазоне изменения независимой переменной x , и определении по этим $y^{(i)}$ параметров a и b , а также погрешностей их измерения σ_a и σ_b . Если есть основания считать измерения y_i равноточными, т.е. стандарт распределения всех $Y(x_i)$ одним и тем же, то нет необходимости предварительно определять средние значения $y^{(i)}$. Достаточно в каждой x_i провести одно измерение и получить единственное случайное значение y_i . А по многим y_i ,

хотя и относящимся к разным точкам x_i , можно найти числовые характеристики сразу всех распределений $Y(x_i)$, т.е. их средние значения, определяемые через параметры a и b , и дисперсию, по условию, одинаковую во всех точках x_i . Через дисперсию распределений $Y(x_i)$ можно выразить дисперсии средних значений a и b , которые уже будут дисперсиями нормальных распределений. Следовательно, квадратные корни из дисперсий дадут стандарты σ_a и σ_b , т.е. квадратичные погрешности измерения a и b .

Не только функция Y , но и аргумент X , является величиной случайной. Однако погрешность измерения X не определяется, за исключением лишь случаев, когда она представляет интерес сама по себе. Ведь в силу функциональной связи между Y и X , неточность регистрации x_i просто увеличивает дисперсию измеряемых y_i , так что неточность x_i всегда представлена в стандартах σ_a и σ_b , хотя последние выражаются только через дисперсию Y . Поэтому при интерпретации опытных данных некоторой зависимостью, значения аргумента x_i следует принимать за точные.

4. Равноточные измерения

Зависимость (46) определяет $y(x_i)$ в каждой точке x_i . Эта зависимость будет наилучшей, если сумма квадратов отклонений измеренных значений y_i от значений вычисленных $y(x_i) = a + bx_i$ окажется минимальной:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 = \min. \quad (47)$$

Поскольку ход зависимости (46) определяется двумя параметрами, то условие минимума должно выполняться по каждому из них, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n (y_i - a - \beta x_i)^2 &= -\sum_{i=1}^n 2(y_i - a - \beta x_i) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^n (y_i - a - \beta x_i)^2 &= -\sum_{i=1}^n 2x_i (y_i - a - \beta x_i) = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

После преобразований получается система уравнений, называемая нормальной

$$\begin{cases} a \cdot n + \beta \sum x_i = \sum y_i, \\ a \cdot \sum x_i + \beta \sum x_i^2 = \sum x_i y_i, \end{cases} \quad (49)$$

решение которой таково:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (A_{11} + A_{21} \cdot x_i) y_i}{D}, \quad (50)$$

$$\beta = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (A_{12} + A_{22} \cdot x_i) y_i}{D}. \quad (51)$$

Здесь D — детерминант системы (49), а $A_{11} = \sum x_i^2$, $A_{12} = -\sum x_i$, $A_{21} = -\sum x_i$, $A_{22} = n$ — алгебраические дополнения элементов детерминанта D , которые в случае детерминанта второго порядка сами являются с точностью до знака соответствующими элементами детерминанта. Найденные параметры выражений (50) и (51) определяют наилучшие для данного набора y_i средние значения величины $Y(x)$ в любой точке x .

5. Дисперсия измеряемых величин

В равноточных измерениях дисперсия распределения всех $Y(x_i)$ одна и та же. В соответствии с разделом II, п. 2 и п. 1 данного раздела, она равна

$$\delta_y = \frac{\sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a - \beta x_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (y_i - a - \beta x_i)}{n-2}. \quad (52)$$

В выражение для дисперсии введена поправка, связанная с тем, что математические ожидания $m_y(x_i)$ неизвестны, а известны лишь экспериментальные средние $y(x_i)$. В случае двухпараметрической зависимости эта поправка вводится дважды, по каждому параметру и по числу оставшихся независимых измерений, т.е. сначала как $n/(n-1)$, а затем как $(n-1)/(n-2)$. В результате, в знаменателе выражения (52) оказывается не n , а $(n-2)$ — число степеней свободы (см. раздел II, п. 9).

Кроме того, сделано упрощение под знаком суммы, поскольку $\sum (y_i - a - \beta x_i) = 0$ и $\sum x_i (y_i - a - \beta x_i) = 0$ (см. формулы (48)). От выражений, которые являются нулями по своей природе, всегда следует избавляться, чтобы не затрачивать усилий на их вычисление и чтобы не получать не равных нулю добавок вследствие округлений при счете.

Если закон распределения $Y(x_i)$ нормальный, то его стандарт равен

$$\sigma_y = \sqrt{\delta_y} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i (y_i - a - \beta x_i)}{n-2}}. \quad (53)$$

6. Стандарты параметров

Параметры a и β выражаются через суммы всех случайных значений величин $Y(x)$ (см. формулы (50), (51)). Следовательно, закон их распределения, получающийся в ре-

зультате свертки n законов распределения $Y(x)$, нормальный независимо от вида закона распределения $Y(x)$. Значит, корень из дисперсии распределения a или b , определяемой соотношением (9), является стандартом соответствующего параметра:

$$\sigma_a = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(A_{11} + A_{21} x_i)^2}{D^2}} \delta_{yi} = \sigma_y \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D}}, \quad (54)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(A_{12} + A_{22} x_i)^2}{D^2}} \delta_{yi} = \sigma_y \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}}, \quad (55)$$

где все $\delta_{yi} = \delta_y$, поскольку измерения равноточные, а σ_y есть стандарт, или просто корень из дисперсии распределений измеряемых величин $Y(x_i)$ (53).

7. Упрощение формул

Выбор начала отсчета координат x , вообще говоря, произволен, и часто определяется удобствами регистрации x при проведении опытов. Однако от этого выбора зависят абсолютные величины произведений сумм в выражениях (50), (51). И если они очень велики, то как числители, так и знаменатели этих выражений могут оказаться малыми разностями больших величин. В этом случае округления при вычислениях сумм нужно делать с большой осторожностью, чтобы погрешности

округлений не составляли существенную часть самих разностей. Поэтому целесообразно вести расчеты в такой системе координат, где значения сумм наименьшие. Начало отсчета такой системы определяется соотношением

$$x_H = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (56)$$

где x_i и x_H — координаты исходной системы. В новых координатах $x'_i = x_i - x_H$, $\sum x'_i = 0$, и все расчетные формулы упрощаются:

$$a = \frac{\sum y_i}{n}; \quad b = \frac{\sum x'_i y_i}{\sum (x'_i)^2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}; \quad \sigma_b = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum (x'_i)^2}}. \quad (57)$$

Правда, определение x_H включает действие деление и поэтому x_H не обязательно будет найдено точно. А тогда и формулы (57) будут лишь приблизительно упрощенными. Тем не менее, чем ближе начало отсчета к x_H (56), тем ближе к нулю $\sum x_i$ и надежнее расчеты по общим формулам (50), (51).

Если же при проведении измерений точки x_i взяты на одинаковых расстояниях друг от друга, что обычно и делается, то x_H обязательно определяется точно, так как совпадает с серединой интервала измерений, $x_H = (\sum x_i)/n = (x_1 + x_n)/2$. В этом случае следует либо сразу взять начало отсчета в середине интервала измерений, либо перед вычислениями пересчитать координаты $x' = x - x_H$. При этом параметры линейной зависимости и их стандарты представляются формулами (57) и, кроме того, при равных $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

$$\sum_{i=1}^n (x'_i)^2 = \Delta x^2 \frac{n(n^2-1)}{12}, \quad (58)$$

$$D = n \sum (x'_i)^2 = \Delta x^2 \frac{n^2(n^2-1)}{12} = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2. \quad (59)$$

Последнее равенство в выражении (59) добавлено потому, что значение детерминанта D вообще не зависит от выбора координат x , а при равных Δx выражается через Δx и n как в (59) в любой системе отсчета.

8. Неравноточные измерения

Условие минимума (44) в данном случае имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \omega_i (y_i - a - \beta x_i)^2 = \min. \quad (60)$$

Решение нормальных уравнений, получающихся после взятия производных по a и β , отличается от выражений (50) - (51) только сомножителями веса под знаками сумм:

$$a = \frac{\sum \omega_i x_i^2 \sum \omega_i y_i - \sum \omega_i x_i \sum \omega_i x_i y_i}{\sum \omega_i \sum \omega_i x_i^2 - (\sum \omega_i x_i)^2} = \frac{\sum (A_{11} + A_{21} x_i) \omega_i y_i}{D}, \quad (61)$$

$$\beta = \frac{\sum \omega_i \sum \omega_i x_i y_i - \sum \omega_i x_i \sum \omega_i y_i}{\sum \omega_i \sum \omega_i x_i^2 - (\sum \omega_i x_i)^2} = \frac{\sum (A_{12} + A_{22} x_i) \omega_i y_i}{D}, \quad (62)$$

где $A_{11} = \sum \omega_i x_i^2$; $A_{12} = A_{21} = -\sum \omega_i x_i$; $A_{22} = \sum \omega_i$; $D = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2$.

Стандарты параметров a и β вычисляются на основании формулы (9), но только теперь дисперсия δy_i всех $Y(x_i)$ различны. Но если воспользоваться стандартом σ_Y величины с единичным весом (29), то выражения упрощаются:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_{11} + A_{21} x_i)^2 \omega_i \delta y_i^2}{D^2}} = \sigma_Y \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = \sigma_Y \sqrt{\frac{\sum \omega_i x_i^2}{D}}, \quad (63)$$

$$\sigma_{\delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_{12} + A_{22}x_i)^2 \omega_i^2 \delta y_i}{D^2}} = \sigma_I \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = \sigma_I \sqrt{\frac{\sum \omega_i}{D}} \quad (64)$$

Поскольку измерения неравноточные, предполагается, что в каждой точке x_i найдено среднее y_i со своим стандартом σ_i . Через эти стандарты и определяются веса ω_i по (29), где σ_I — произвольная константа. Вообще говоря, абсолютное значение этой константы не существенно, так как в формулах (61) — (64) она фигурирует лишь формально, входя в числители и знаменатели всех выражений в одинаковой степени. Но при вычислении весов в явном виде неизбежно приходится придавать σ_I какое-то значение. И удобнее всего положить $\sigma_I = 1$.

Обычная процедура вычисления дисперсии среднего взвешенного дает дисперсию реального распределения взвешиваемых величин около их общего среднего. При этом (см. формулу (35)):

$$\sigma_I = \sqrt{\delta_I} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (y_i - a - bx_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i y_i (y_i - a - bx_i)}{n-2}}, \quad (65)$$

где фактор $(n-2)$ и преобразование под знаком суммы прокомментированы у формулы (52). Если средние y_i не представляют маловероятную выборку из распределения средних, и при измерениях y_i не дали вклад систематические погрешности, то, как отмечалось в разделе II, п. 8, выражение (65) в приближении (15) должно дать единицу, если при вычислении весов было положено $\sigma_I = 1$. Точнее, в единицу должно обратиться близкое выражение

$$\sigma'_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (y_i - a - bx_i)^2}{n}}, \quad (66)$$

поскольку при возрастании n и $\sigma_I = 1$, сумма $\sum w_i (y_i - a - bx_i)^2$ приближается как раз к n (см. формулу (33)). Но если измерению y_i сопутствовали систематические погрешности, то формула (65) даст $\sigma_I > 1$, и эта величина σ_I должна быть использована в расчетах σ_a и σ_b по (63) - (64). Если же σ_I по (65) окажется меньше единицы, т.е. меньше того σ_I , которое было использовано при расчете весов, то в формулах (63) - (64) следует положить $\sigma_I = 1$. Эта ситуация уже обсуждалась в разделе II подраздела 8. Величина σ_I по формуле (65) может быть меньше единицы только в силу фактора случайности, когда y_i представляют маловероятную выборку из своего распределения. И эта случайность должна быть отвергнута. С такой же случайностью можно столкнуться и при измерении каждого y_i . Но там нет критерия для квалификации данного набора измеренных значений, как маловероятного. Когда же усредняются средние, то такой критерий есть: по стандартам промежуточных, средних можно найти минимум стандарта общего среднего, который в данном случае равен единице $(\sigma_I)_{min} = 1$. Если $\sigma_I > 1,5$, то, строго говоря, следует перейти к равноточной задаче.

Как и в случае равноточных измерений, формулы для расчета параметров a и b и их стандартов будут упрощены, если воспользоваться системой координат с началом в точке

$$x_H = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_1^n w_i} \quad (67)$$

Тогда в координатах $x'_i = x_i - x_H$ $\sum w_i x'_i = 0$, и формулы (61) - (64) переходят в выражения

$$a = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w'_i}; \quad b = \frac{\sum w_i x'_i y_i}{\sum w_i (x'_i)^2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_I}{\sqrt{\sum w_i}}; \quad \sigma_b = \frac{\sigma_I}{\sqrt{\sum w_i (x'_i)^2}} \quad (68)$$

При неравноточных измерениях формула (67) только случайно может дать точное значение x_H , даже при равных $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

А при приближенных значениях x'_i формулы (61) - (64) только примерно переходят в (68). И если по этой причине отказаться от формул (68), то, по крайней мере, целесообразно разместить начало координат в x_i , ближайшей к x_H .

9. Нелинейная зависимость

Случай нелинейной зависимости функции от определяемых по методу наименьших квадратов параметров принципиально ничем не отличается от случая линейной зависимости. Только для определения параметров исходную функцию следует линеаризовать и применить метод итераций при вычислениях. Произвольную трехпараметрическую зависимость можно представить как

$$y = C f(a, b, x), \quad (69)$$

где C , a , b - параметры. От параметра C y зависит линейно, так как правая часть (69) должна иметь размерность физической величины y . Условие минимума идентично (47):

$$\sum_{i=1}^n [y_i - C f(a, b, x_i)]^2 = \min. \quad (70)$$

Приравнивание нулю производных по параметрам приводит к нелинейным относительно a и b уравнениям

$$\begin{cases} C \sum f_i^2 = \sum y_i f_i, \\ C \sum f_i f_{ai} = \sum y_i f_{ai}, \\ C \sum f_i f_{bi} = \sum y_i f_{bi}. \end{cases} \quad (71)$$

где f_{ai} и f_{bi} - значения производных по параметрам a и b в точках x_i . Представляя искомые параметры как

$$C = C_0 + \zeta, \quad a = a_0 + \alpha, \quad \beta = \beta_0 + \beta, \quad (72)$$

где C_0, a_0, β_0 - нулевые приближения параметров, линеаризованную систему уравнений можно получить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} C \sum f_i f_i + \alpha C_0 \sum f_{ai} f_i + \beta C_0 \sum f_{bi} f_i = \sum y_i f_i, \\ C \sum f_i f_{ai} + \alpha C_0 \sum f_{ai} f_{ai} + \beta C_0 \sum f_{bi} f_{ai} = \sum y_i f_{ai}, \\ C \sum f_i f_{bi} + \alpha C_0 \sum f_{ai} f_{bi} + \beta C_0 \sum f_{bi} f_{bi} = \sum y_i f_{bi}. \end{array} \right. \quad (73)$$

Здесь неизвестными являются C, α, β , а все значения функции f_i и ее производных f_{ai}, f_{bi} взяты при $C = C_0, a = a_0, \beta = \beta_0$. Задав точность вычислений C, α, β и применив итерационный процесс, можно получить по аналогии с выражениями (50), (51).

$$C_k = \frac{D_C}{D}; \quad \alpha_k = \frac{D_\alpha}{C_k D}; \quad \beta_k = \frac{D_\beta}{C_k D}, \quad (74)$$

где индекс k обозначает последние в итерационном процессе значения C, α, β . D - это детерминант системы (73), а D_C, D_α, D_β - детерминанты, получаемые заменой соответственно первого, второго или третьего столбцов детерминанта D столбцом элементов правой части системы (73). Все детерминанты соотношений (74) не содержат множитель C_0 во втором и третьем столбцах, который вынесен за знак детерминанта. Теперь параметры зависимости (69) равны:

$$C_k = C_k; \quad a_k = a_{k-1} + \alpha_k; \quad \beta_k = \beta_{k-1} + \beta_k. \quad (75)$$

Поскольку a_k и β_k зависят линейно от α_k и β_k , а a_{k-1} и β_{k-1} есть константы, то дисперсии σ_α и σ_β являются

дисперсиями σ_a и σ_b . По аналогии с выражениями (54) и (55)

$$\sigma_c = \sigma_y \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}; \sigma_a = \sigma_\alpha = \frac{\sigma_y}{c_k} \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}; \sigma_b = \sigma_\beta = \frac{\sigma_y}{c_k} \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}. \quad (76)$$

Здесь A_{11} , A_{22} , A_{33} — алгебраические дополнения диагональных элементов детерминанта D , а

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - C \cdot f(a_k, b_k, x_i)]^2}{n-3}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i [y_i - C \cdot f(a_k, b_k, x_i)]}{n-3}}. \quad (77)$$

10. Стандарты интегралов

Если параметры зависимости $y = C \cdot f(a, b, x)$ определены, то можно утверждать, что в любой точке x определено экспериментальное среднее величины y , а также любой функции y , например, интеграла

$$I = C \int_{x_H}^{x_B} f(a, b, x) dx = C F(a, b, x_B) - C F(a, b, x_H) = Y_B - Y_H, \quad (78)$$

где x_H и x_B — координаты нижней и верхней границ интервала интегрирования, а $F(x)$ — первообразная $f(x)$ по переменной x . Стандарт же интеграла может быть получен лишь при условии, что известен стандарт среднего в любой точке x . Стандарт среднего в произвольной точке x , лежащей как между экспериментальными точками, так и за пределами интервала измерений, может быть представлен в виде [11]:

$$\sigma^2[y(x)] = -\frac{\sigma_y^2}{D} \begin{vmatrix} 0 & f(a_k, b_k, x) & f_a(a_k, b_k, x) & f_b(a_k, b_k, x) \\ f(a_k, b_k, x) & \sum f_i f_i & \sum f_{ai} f_i & \sum f_{bi} f_i \\ f_a(a_k, b_k, x) & \sum f_i f_{ai} & \sum f_{ai} f_{ai} & \sum f_{bi} f_{ai} \\ f_b(a_k, b_k, x) & \sum f_i f_{bi} & \sum f_{ai} f_{bi} & \sum f_{bi} f_{bi} \end{vmatrix} \quad (79)$$

где зависимость от x представлена первой строкой и первым столбцом детерминанта (79), а зависимость от экспериментальных точек x_i — алгебраическим дополнением к элементу $a_{11} = 0$, которое является детерминантом D системы (73). Перед детерминантом стоит отношение σ_y^2 , выражаемого соотношением (77), к величине детерминанта D системы (73).

По получении дисперсии y в произвольной точке x , может быть найдена дисперсия любой функции y , например дисперсия интеграла (78):

$$\sigma^2(I) = -\frac{\sigma_y^2}{D} \begin{vmatrix} 0 & F_B - F_H & F_{aB} - F_{aH} & F_{bB} - F_{bH} \\ F_B - F_H & \sum f_i f_i & \sum f_{ai} f_i & \sum f_{bi} f_i \\ F_{aB} - F_{aH} & \sum f_i f_{ai} & \sum f_{ai} f_{ai} & \sum f_{bi} f_{ai} \\ F_{bB} - F_{bH} & \sum f_i f_{bi} & \sum f_{ai} f_{bi} & \sum f_{bi} f_{bi} \end{vmatrix} \quad (80)$$

где F_a и F_b — производные F по параметрам a и b .

В случае неравноточных измерений формулы пп. 9 — 10 останутся без изменений, только под всеми знаками сумм появятся сомножители веса ω_i , например, сумма $\sum f_i f_i$ перейдет в $\sum \omega_i f_i f_i$ и т.д., а стандарт величины с единичным весом

$$\sigma_y = \sigma_f = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i y_i [y_i - C_f(a_k, b_k, x_i)]^2}{n-3}} \quad (81)$$

Веса y_i , в соответствии с формулой (29), $\omega_i = 1/\sigma^2(y_i)$, и могут быть использованы, если все y_i заданы с их стандартами $\sigma(y_i)$.

Расчеты нелинейных зависимостей очень громоздки и фактически могут быть выполнены только на ЭВМ. Если же обрабатывать экспериментальные результаты без ЭВМ, то можно использовать графический метод усреднения, а дисперсию интеграла вычислять по формуле трапеций, раздел 1У, п. 9. При этом следует иметь в виду, что формула трапеций дает не стандарт площади, а стандарт собранных в одну точку x и просуммированных y_i , поскольку площадь, по крайней мере, — двухпараметрическая функция, а по формуле трапеций она представляется как однопараметрическая.

1У. ПОГРЕШНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

1. Отдельное измерение

Дискретные случайные величины часто называют статистическими. Распределения статистических величин в последующем изложении всегда будут считаться предельными, т.е. распределениями Пуассона (11):

$$P(N) = e^{-a} \frac{a^N}{N!}. \quad (82)$$

Здесь a есть математическое ожидание, или среднее значение, (см. формулу (1)), дисперсией распределения (82) также является a (раздел I, п. 4). И если $a \gtrsim 10$, то \sqrt{a} с большой точностью является стандартом нормального распределения, предельного по отношению к данному пуассоновскому. Следовательно, зарегистрировав в процессе измерения какое-то число событий N , можно утверждать, по крайней мере, при $N \gtrsim 10$, что со стандартной вероятностью 0,68 в пределах $N \pm \sqrt{a}$ лежит математическое ожидание (раздел I, п. 5). Правда, величина a неизвестна, но с точностью до приближения (15) $N \approx a$. Поэтому за стандарт непосредственно измеренной величины N принимают \sqrt{N}

$$\sigma = \sqrt{N}. \quad (83)$$

Таким образом, по одному измерению статистической величины определяется и экспериментальное среднее N , и его стандарт \sqrt{N} . Фактически это измерение представляет собой N измерений.

2. Повторные измерения

Повторные измерения сравнимы между собой лишь в том случае, когда они относятся к одному и тому же распределению Пуассона, т.е. представляют собой многократные попытки измерения одного и того же математического ожидания a . Например, если a не зависит от времени, то числа событий N_i , зарегистрированные в одинаковые интервалы времени τ , распределены по закону Пуассона с некоторым фиксированным a . При многих измерениях экспериментальным приближением к математическому ожиданию является арифметическое среднее (16):

$$N = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n}, \quad (84)$$

где n — число отдельных измерений. Поскольку стандарты исходных измерений известны — это (83), стандарт σ среднего (84) на основании (9)

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{\sum N_i}{n^2}} = \sqrt{\frac{N}{n}} \quad (85)$$

Стандарт любого отдельного измерения N_i есть $\sqrt{N_i}$. Если же проведено n измерений, то лучшим приближением к стандарту распределения измеряемой величины уже будет \sqrt{N} , где N — среднее (84). Чем больше число повторяющихся измерений, тем ближе арифметическое среднее N к математическому ожиданию a , и тем ближе экспериментальный стандарт \sqrt{N} к собственно стандарту распределения \sqrt{a} . Стандарт же среднего (85) в \sqrt{n} раз меньше стандарта распределения измеряемой величины, что находится в согласии с (24).

3. Приведение произвольных измерений

Результаты измерения статистической величины в течение разных интервалов времени описываются разными распределениями Пуассона, поскольку при этом различны параметры a распределений, приближениями к которым являются измеренные значения. Однако результаты произвольных измерений могут быть приведены к одному a при условии, что a не зависит от времени. Так, если за время τ_1 зарегистрировано N_1 событий, а за время $\tau_2 = n\tau_1$ — N_2 событий и математическим ожиданием распределения величин N_1 является a , то математическим ожиданием N_2 будет na . Очевидно, что второе распределение можно привести к тому же математическому ожиданию a , умножив все распределение на константу $1/n$. Тогда величиной, сравнимой с N_1 , будет

$$N_2' = \frac{N_2}{n} \quad (86)$$

Однако распределения N_1 и N_2' по-прежнему останутся разными. Стандарт величины N_1 есть $\sqrt{N_1}$, стандарт N_2 — это $\sqrt{N_2}$, а стандарт приведенной величины N_2' получается из выражения (86)

$$\sigma(N_2') = \frac{\sigma(N_2)}{n} = \frac{\sqrt{N_2}}{n} = \sqrt{\frac{N_2'}{n}}. \quad (87)$$

И хотя $N_2' \approx N_1$, стандарт N_2' в \sqrt{n} раз меньше стандарта N_1 , т.е. N_2' по отношению к N_1 является средним из n измерений. (см. выражение (85)).

Следовательно, получается одно и то же распределение независимо от того, найдено ли среднее из n повторных измерений каждый раз за время τ_1 , или сделано одно измерение за время $n\tau_1$ и затем приведено к интервалу τ_1 . Этим всегда пользуются при вычислении средних по многим произвольным измерениям (см. п.5).

4. Скорость счета

Если измерения выполняются в произвольные промежутки времени, то их удобно приводить к единице времени (хотя за такую единицу может быть принят любой интервал времени, например τ_1 в п. 3). В этом случае величина

$$N_i = \frac{N_{oi}}{\tau_i} \quad (88)$$

называется скоростью счета. В ее выражении через N_{oi} обозначено полное число отсчетов за время τ_i . Скорости счета сравнимы между собой, поскольку приведены к одному временному интервалу. Однако стандарты их различны, так как зависят от времени измерения полного числа событий:

$$\sigma_i = \sigma(N_i) = \frac{1}{\tau_i} \cdot \sigma(N_{oi}) = \frac{\sqrt{N_{oi}}}{\tau_i} = \sqrt{\frac{N_{oi}}{\tau_i^2}} = \sqrt{\frac{N_i}{\tau_i}}, \quad (89)$$

где $\sigma(N_{oi}) = \sqrt{N_{oi}}$, как стандарт непосредственно измеренной на опыте величины (см. выражение (83)). Фактор τ_i в выражении $(N_i / \tau_i)^{1/2}$ играет роль числа измерений, каждое из которых проведено в единицу времени (сравни с (87)). Таким образом, вычисление (88) представляет собой получение неравноточных случайных значений величины скорости счета. Неравноточность N_i должна учитываться при вычислении средней скорости счета.

5. Средняя скорость счета

Поскольку стандарты (89) случайных значений скорости счета известны, то через них могут быть выражены веса (см. выражение (29) и замечание в разделе III, п. 8: о выборе σ_i) и найдено среднее взвешенное (31). Вес каждого N_i есть $w_i = 1/\sigma_i^2 = \tau_i / N_i$, или точнее $w_i = \tau_i / a$, где a — собственно скорость счета. Ведь веса обратно пропорциональны квадратам истинных стандартов распределений; и лишь приближенно — квадратам экспериментальных стандартов. Правда, a всегда неизвестно, но в данном случае это несущественно, так как веса определяются с точностью до произвольной константы, которая не входит в окончательные выражения. Поскольку неизвестное a не делает результат вычисления неопределенным, для нахождения веса, конечно, следует воспользоваться точным выражением, а не приближенным. Следовательно, среднее взвешенное скорости счета

$$N = \frac{\sum \frac{\tau_i}{a} N_i}{\sum \frac{\tau_i}{a}} = \frac{\sum \tau_i N_i}{\sum \tau_i} = \frac{\sum N_{oi}}{\sum \tau_i} = \frac{N_o}{\tau}, \quad (90)$$

где $\tau_i N_i = N_{oi}$ (см. выражение (88)); N_o — полное число событий, зарегистрированных за все измерения в течение полного времени $\tau = \sum \tau_i$. В результате роль весов при скоростях счета N_i сыграли времена τ_i , в соответствии с трактовкой (89).

Таким образом, средняя скорость счета равна отношению полного числа отсчетов к полному времени измерения, на что уже указывалось в конце п. 3, т.е. для ее вычисления формулу среднего взвешенного (31) даже не приходится применять. Поскольку $N_o = \sum N_{oi}$, а стандарты $\sigma(N_{oi}) = \sqrt{N_{oi}}$, как стандарты величин, непосредственно измеренных на опыте (см. выражение (83)), то стандарт N_o

$$\sigma(N_o) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma^2(N_{oi})} = \sqrt{\sum N_{oi}} = \sqrt{N_o}, \quad (91)$$

т.е. получается, как стандарт зарегистрированной на опыте величины. Другими словами, сумма измеренных на опыте величин также является измеренной на опыте величиной. Из выражений (90) и (91) вытекает выражение для стандарта средней скорости счета

$$\sigma = \frac{\sigma(N_o)}{\tau} = \frac{\sqrt{N_o}}{\tau} = \sqrt{\frac{N_o}{\tau^2}} = \sqrt{\frac{N}{\tau}}. \quad (92)$$

Так как $N \approx a$, то при увеличении полного времени измерения τ , не важно, в одном измерении или в прерывающихся измерениях, стандарт средней скорости счета снижается как $1/\sqrt{\tau}$. Фактор τ по-прежнему представляет число измерений, каждое из которых имеет длительность в единицу времени. И, наконец, выражение (92) находится в согласии с (24): стандарт распределения средних, полученных из измерений за время τ , в $\sqrt{\tau}$ раз меньше стандарта распределения величины, измеренной в течение единицы времени.

Выражения для скорости счета (88), полученной из одного измерения, и средней скорости счета (90), а также выражения их стандартов (89) и (92) абсолютно одинаковы. Отсюда следует, что скорость счета всегда есть средняя скорость счета. По скоростям счета и различают дискретные случайные величины, значения которых каким-либо способом связаны со временем. Собственно такие величины и называются статистическими, и они играют большую роль во многих прикладных задачах, в частности в физике.

Относительная погрешность скорости счета N равна

$$\alpha = \frac{\sigma}{N} = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{N}{\tau}} = \sqrt{\frac{1}{N\tau}} = \sqrt{\frac{1}{N_o}} \quad (93)$$

и совпадает с относительной погрешностью величины N_0 , полученной непосредственно на опыте,

$$\alpha_0 = \frac{\sigma(N_0)}{N_0} = \frac{\sqrt{N_0}}{N_0} = \sqrt{\frac{1}{N_0}}, \quad (94)$$

т.е. относительная погрешность прежде всего определяется полным числом зарегистрированных событий. Правда, если рассчитываемая на основе опытных данных величина является функцией нескольких статистических величин с разными скоростями счета, то ее относительная погрешность зависит как от полного числа зарегистрированных событий, так и от времени измерения каждой величины. В этом случае возможна оптимизация постановки эксперимента, приводящая к минимальным затратам времени при получении той же относительной погрешности.

6. Погрешность разности

При работе с регистраторами микрочастиц — счетчиками, ионизационными камерами, практически всегда приходится вводить поправку на фон прибора, который проистекает от посторонних источников, например космического излучения. Для исключения побочных влияний проводится два измерения. В одном регистрируется сумма изучаемого эффекта и фона, а во втором — фон. Если скорость счета суммарного эффекта N , а измерялся он в течение времени τ , скорость счета фона Φ , а время его измерения τ_Φ , то полезный эффект A есть

$$A = N - \Phi, \quad (95)$$

и погрешность его измерения в соответствии с формулой (6)

$$\Delta A = \sqrt{\Delta N^2 + \Delta \Phi^2} = \sqrt{\frac{N}{\tau} + \frac{\Phi}{\tau_\Phi}}, \quad (96)$$

где под величинами погрешностей измерения $\Delta A, \Delta N, \Delta \Phi$ подразумеваются стандарты соответствующих распределений. По-

сколько N и Φ – скорости счета, их погрешности вычисляются по формуле (92). Следует обратить внимание на то, что под корнем в (96) стоят N и Φ – скорости счета, т.е. величины уже отнесенные ко времени τ и τ_{Φ} соответственно. В выражении для ΔA они еще раз делятся на время измерения.

7. Погрешность частного

В сравнительных измерениях определяемая на опыте величина находится как частное двух измеренных величин A_1 и A_2 :

$$U = C \frac{A_1}{A_2}, \quad (97)$$

где C – коэффициент пропорциональности. Если величины A_i образуют частное (или произведение), то формулы для расчета относительной погрешности U несколько проще формул абсолютной погрешности. Поэтому для частного или произведения нескольких A_i целесообразно сначала рассчитывать относительную погрешность. Для выражения (97) в соответствии с (9), она равна

$$\alpha = \frac{\Delta U}{U} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A_2}{A_2}\right)^2}, \quad (98)$$

т.е. относительная погрешность частного (или произведения) равна корню квадратному из суммы квадратов относительных погрешностей делимого и делителя (или любого числа сомножителей). Здесь A_1 и A_2 определяются формулой (95), а ΔA_1 , ΔA_2 – формулой (96). Абсолютная погрешность измерения U , естественно, равна

$$\Delta U = \alpha U = C \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\left(\frac{\Delta A_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A_2}{A_2}\right)^2}. \quad (99)$$

8. Погрешность произвольной зависимости

Если искомая величина U связана с определяемыми на опыте A_1, A_2, \dots произвольной зависимостью, $U = f(A_1, A_2, \dots)$, включая неявную, $f(U, A_1, A_2, \dots) = 0$, то погрешность измерения U определяется в приближении (9). Средние значения статистических величин A_i и их погрешности определяются формулами (95), (96). Если среди A_i есть непрерывные случайные величины, то их средние и погрешности определяются по формулам (16) и (24) или по (31) и (38). При вычислении погрешности U все A_i являются равноправными, так как это средние величины, а законы распределения средних — нормальные законы, для которых критерий оценки погрешности через стандарты распределений универсален (см. раздел I, п.5).

9. Погрешность интеграла

Конечный результат эксперимента может выражаться через интеграл от измеряемой величины A

$$J = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} A(x) dx. \quad (100)$$

На опыте A измеряется в некотором числе точек x_i , значения A_i в которых и определяют интеграл. Применяя метод наименьших квадратов, можно найти соответствующую экспериментальным данным зависимость $A(x)$, вычислить по ней интеграл (100) и его погрешность (раздел III, п. 10). Однако такой путь сложен и задачу целесообразно упростить, воспользовавшись представлением интеграла суммой.

Прежде всего, сам интеграл (100) следует получить графическим усреднением, для чего в координатах (x, A) отложить значения A_i со своими погрешностями ΔA_i и провести через них плавную кривую (рис. 2). При этом каждой абсциссе x_i будет соответствовать некоторое значение \bar{A}_i , расположенное на кривой, которое следует принять за значение A

в точке x_i , полученное при усреднении экспериментальных данных по многим точкам x_i . Как и всегда, средние \bar{A}_i не совпадают с экспериментальными A_i . Интеграл (100) равен площади под кривой $\bar{A}(x_i)$. При минимальном опыте в графическом усреднении величина интеграла будет с очень хорошей точностью совпадать с величиной J , найденной по методу наименьших квадратов.

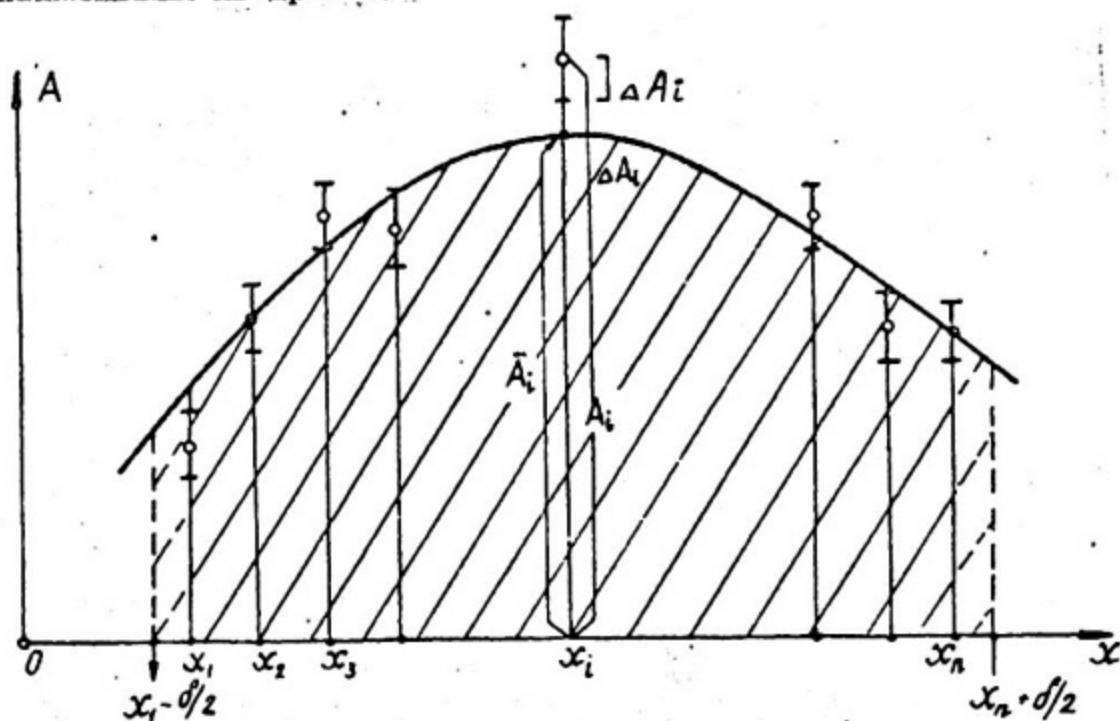


Рис. 2. Графическое усреднение при вычислении интеграла
Заштрихованная площадь — среднее значение интеграла

Для вычисления погрешности интеграл следует представить в виде суммы, например, по формуле трапеций:

$$\begin{aligned}
 J &\approx \frac{\bar{A}_1 + \bar{A}_2}{2} \delta x_1 + \frac{\bar{A}_2 + \bar{A}_3}{2} \delta x_2 + \dots + \frac{\bar{A}_{n-1} + \bar{A}_n}{2} \delta x_{n-1} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\bar{A}_1 \delta x_1 + \bar{A}_n \delta x_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1} \bar{A}_i (\delta x_{i-1} + \delta x_i) \right],
 \end{aligned}
 \tag{101}$$

или при равных интервалах $\delta x = x_{i+1} - x_i$

$$J \approx \delta x \left(\frac{\bar{A}_1 + \bar{A}_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} \bar{A}_i \right). \quad (102)$$

Приближения (101), (102) вполне пригодны для вычисления самого J (вместо измерения площади под кривой) и, тем более, могут быть использованы для нахождения ΔJ . В соответствии с формулой (9) погрешность интеграла (101)

$$\Delta J = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta A_1^2 \delta x_1^2 + \Delta A_n^2 \delta x_{n-1}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \Delta A_i^2 (\delta x_{i-1} + \delta x_i)^2}, \quad (103)$$

где в качестве стандартов экспериментальных распределений использованы известные ΔA_i , а погрешность интеграла (102) с равными δx есть

$$\Delta J = \delta x \sqrt{\frac{\Delta A_1^2 + \Delta A_n^2}{4} + \sum_{i=2}^{n-1} \Delta A_i^2}. \quad (104)$$

Определение ΔJ через погрешности ΔA_i идентично определению стандарта среднего взвешенного через экспериментальные стандарты (см. выражение (40)), но последнее применимо лишь в отсутствие систематических погрешностей измерения A_i . При графическом представлении экспериментальных данных влияние систематических погрешностей легко обнаружить. Если, как это сделано на рис. 2, на график нанести A_i вместе с их ΔA_i и отрезки $\pm \Delta A_i$, отложенные от каждого A_i , пересекут менее чем в 68% случаев плавную кривую, и окажутся такие A_i , которые будут отстоять от кривой на два-три ΔA_i , то это укажет на влияние систематических погрешностей на распределение A_i . Например, если бы на рис. 2 все ΔA_i были в два раза меньше, то характер распределения тех же A_i не мог бы определяться только случайными причинами, присущими измерению каждого A_i . В этом случае формулы (103) или (104) занижат погрешность интеграла, и, чтобы учесть систематические погрешности, в формулы (103), (104) следует подставить не эксперимен-

тальные ΔA_i , а $\Delta \bar{A}_i = A_i - \bar{A}_i$. Величины $\Delta \bar{A}_i$ учтут реальный разброс A_i около средней кривой, тогда как ΔA_i определяют лишь ожидаемую погрешность интеграла в отсутствие систематических погрешностей измерения A_i (раздел II, п.8).

Если интервалы δx равны, то интеграл по формуле трапеций можно представить так

$$J' = \bar{A}_1 \delta x + \bar{A}_2 \delta x + \dots + \bar{A}_n \delta x = \delta x \sum_{i=1}^n \bar{A}_i \quad (105)$$

Здесь каждое \bar{A}_i является средней линией трапеции, и интеграл J' определяется по несколько более широкому интервалу, от $x_1 - \delta x/2$ до $x_n + \delta x/2$ (см. рис. 2). Такие пределы интегрирования более оправданы, чем от x_1 до x_n . Ведь интеграл определяется по нескольким A_i , каждое из которых гарантирует ход кривой как справа, так и слева от x_i . Поэтому по n точкам интеграл определяется как раз в пределах от $x_1 - \delta x/2$ до $x_n + \delta x/2$. Тогда погрешность интеграла

$$\Delta J' = \delta x \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta A_i^2}, \quad (106)$$

где ΔA_i — экспериментальные, если нет указаний на влияние систематических погрешностей, или $\Delta \bar{A}_i$, если такие указания есть. При равных интервалах δx формулам (105) — (106) следует отдать предпочтение перед (102), (104).

1.0. Погрешность коэффициента релаксации

В экспоненциальных опытах скорость счета A детектора нейтронов в функции пространственной координаты z выражается зависимостью

$$A(z) = A_0 e^{-\gamma z}, \quad (107)$$

где A_0 — скорость счета при $z=0$, а γ — коэффициент релаксации. Экспоненциальная зависимость приводится к линей-

ной в полулогарифмических координатах, A — в логарифмическом масштабе, Z — в обычном:

$$\ln A(z) = \ln A_0 - \gamma z. \quad (108)$$

В силу экспоненциальной зависимости, скорость счета A быстро снижается с ростом Z и веса измеряемых величин сильно меняются. Поэтому расчет по методу наименьших квадратов должен проводиться с учетом статистических весов. В данном случае будут использоваться веса не самих измеряемых значений A_i , а их логарифмов. Но так как веса выражаются через стандарты (раздел II, п. 5)

$$w_i = \frac{1}{\sigma^2(\ln A_i)}, \quad (109)$$

где коэффициент пропорциональности σ_x^2 принят за единицу (раздел III, п. 8), а стандарт логарифма в обычном приближении (9) равен

$$\sigma(\ln A) = \frac{d \ln A}{dA} \sigma(A) = \frac{\sigma(A)}{A}, \quad (110)$$

то вес логарифма A_i есть

$$w_i = \frac{A_i^2}{\Delta A_i^2}, \quad (111)$$

где A_i и ΔA_i находятся по формулам (95) и (96). И если веса определены, то параметры $\ln A_0$ и γ выражаются по формулам (61) и (62):

$$\ln A_0 = \frac{\sum w_i z_i^2 \sum w_i \ln A_i - \sum w_i z_i \sum w_i z_i \ln A_i}{\sum w_i \sum w_i z_i^2 - (\sum w_i z_i)^2}, \quad (112)$$

$$\gamma = \frac{\sum w_i z_i \sum w_i \ln A_i - \sum w_i \sum w_i z_i \ln A_i}{\sum w_i \sum w_i z_i^2 - (\sum w_i z_i)^2}, \quad (113)$$

где в числителе формулы (113) по сравнению с (62) знак заменен на обратный, так как в (108) перед γ стоит знак минус. Если ввести такие же обозначения, как в формулах (61), (62), $A_{11} = \sum \omega_i z_i$, $A_{12} = A_{21} = -\sum \omega_i z_i$, $A_{22} = \sum \omega_i$, $D = A_{11} A_{22} - (A_{12})^2$, то погрешности параметров экспоненциальной зависимости представятся как в формулах (63), (64)

$$\Delta \ln A_0 = \sigma_I \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad (114)$$

$$\Delta \gamma = \sigma_I \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad (115)$$

где σ_I — стандарт величины с единичным весом в реальном распределении экспериментальных $\ln A_i$ около средней прямой (см. формулу (65))

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (\ln A_i - \ln A_0 + \gamma z_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \ln A_i (\ln A_i - \ln A_0 + \gamma z_i)}{n-2}}. \quad (116)$$

Как и в формуле (65) здесь сделано упрощение под знаком суммы. В отсутствие систематических погрешностей при измерениях A_i и при условии, что набор $\ln A_i$ не маловероятный, σ_I по (116) будет примерно единицей, поскольку в (109) σ_I принято за единицу. Точнее, в единицу должно обращаться σ_I' (66), у которого в знаменателе не $(n-2)$, а n . Если же σ_I по формуле (116) больше единицы, то это скорее всего свидетельствует о систематических погрешностях в измерениях A_i , и, чтобы их учесть, найденное σ_I следует подставить в формулы для расчета погрешностей параметров (114) и (115). Поскольку σ_I по своей природе не может быть меньше единицы, то при получении по (116) $\sigma_I < 1$ в выражения для погрешностей параметров должно быть подставлено $\sigma_I = 1$ (раздел III, п. 8).

Расчет параметров $\ln A_0$ и γ удобно проводить с использованием таблицы, в которую предварительно заносятся исходные данные z_i , A_i , полученные по формуле (95) и

Таблица 2

Z_i	A_i	ΔA_i	$\ell n A_i$	$w_i = \left(\frac{A_i}{\Delta A_i}\right)^2$	$w_i Z_i$	$w_i Z_i^2$	$w_i \ell n A_i$	$w_i Z_i \ell n A_i$	$w_i (\ell n A_i)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z_1	A_1	ΔA_1
Z_2	A_2	ΔA_2
Z_n	A_n	ΔA_n
				$\sum w_i = A_{22}$	$\sum w_i Z_i = -A_{12}$	$\sum w_i Z_i^2 = A_{11}$	$\sum w_i \ell n A_i$	$\sum w_i Z_i \ell n A_i$	$\sum w_i (\ell n A_i)^2$

ΔA_i — по (96). Затем последовательно заполняются все строчки, а необходимые суммы получаются при сложении данных в соответствующих колонках (табл. 2). Суммы колонок 5–9 дают $\lg A_0$ и γ . Затем вычисляется сумма в формуле (116) для σ_T с использованием $\lg A_0$, γ и сумм колонок 8, 9, 10. Если эта сумма больше n — числа точек Z_i , то σ_T вычисляется по (116) и подставляется в (114) и (115). Если же она меньше n , то вычисление σ_T не выполняется, а сразу рассчитываются погрешности параметров $\Delta \lg A_0$ и $\Delta \gamma$ по формулам (114) и (115), в которых $\sigma_T = 1$.

Если воспользоваться системой координат (67), то расчетными формулами будут (68). Правда, и при пересчете координат фактически все суммы табл. 2 должны быть вычислены, так что выигрыша в счетной работе не получится. Но разместить начало отсчета в Z_i , ближайшей к Z_n , полезно с точки зрения уменьшения возможных ошибок при округлениях в промежуточных выкладках (раздел III, п. 8).

Веса, найденные по формуле (111), обычно большие числа. И поскольку веса определяются с точностью до произвольной константы, то их можно перенормировать, например, взяв наименьший вес ω_n за единицу. Для этого все веса следует разделить на ω_n . Но такая перенормировка означает, что в формуле (109) за коэффициент пропорциональности взята уже не единица, а $1/\omega_n$. Поэтому при расчете σ_T по формуле (116) следует не забыть, что сумма под корнем не должна быть меньше n , а n/ω_n . И если сумма меньше n/ω_n , то в формулы (114), (115) вместо σ_T следует подставить его теоретическое минимальное значение, в данном случае $1/\omega_n$.

У. ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Условие связи

Относительные погрешности статистических величин зависят от времени измерения (формула (93)). И если регистриру-

ется несколько величин с разными скоростями счета, то возможно такое распределение полного времени T по измерениям каждой из них τ_i , что относительная погрешность рассчитываемой на основе опытных данных величины оказывается минимальной. Правда, минимум существует лишь при условии связи

$$T = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n, \quad (117)$$

которое означает, что время T затрачивается только на измерения, т.е. нет пропусков времени, или T не больше $\sum \tau_i$, что любая величина все время доступна измерению, т.е. каждое τ_i может принять любое значение от нуля до T , и что измерение сразу двух величин невозможно, т.е. нет перекрытий τ_i и τ_j , или T не меньше $\sum \tau_i$. Такая ситуация часто возникает на практике, например, при выделении искомого эффекта на постороннем фоне одним регистратором. Но если измерение фона возможно тогда, когда основной эффект не доступен измерению, например, пока активизируемый образец находится на облучении, то, конечно, никаких ограничений на время измерения фона быть не может, так как это время не связано с другими временами измерения условием (117).

Оптимальная временная процедура представляет собой условие минимума функции $\alpha(\tau_i) = \Delta A/A$, например, формулы (98) и (96), при соотношении между τ_i (117), или, что то же самое, условие минимума функции $T(\tau_i)$ (117) при соотношении между τ_i типа выражения (96).

2. Измерение фона

Если измеряемый эффект определяется по формуле (95), а его погрешность по (96), то условием минимума относительной погрешности $\alpha = \Delta A/A$ при заданном полном времени измерения T

$$T = \tau + \tau_\phi = \text{const} \quad (118)$$

является следующее соотношение между временами измерения суммарного эффекта τ и фона τ_ϕ :

$$\frac{\tau}{\tau_{\phi}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\phi}}, \quad (119)$$

где N и ϕ — скорости счета. Это же условие определяет наименьшее T , необходимое для получения заданной относительной погрешности α .

Поскольку $N = A + \phi$ (см. формулу (95)), то всегда $N > \phi$ и, следовательно, $\tau > \tau_{\phi}$. Значит, при рациональном распределении времени время измерения суммарного эффекта всегда больше времени измерения фона. Лишь в самом неблагоприятном случае выделения очень малого эффекта на большом фоне оптимальные времена измерения примерно равны. Если оба измерения делать в течение одинаковых интервалов, $\tau = \tau_{\phi}$, то для получения заданной относительной погрешности в предельном случае очень малого фона нужно затратить времени в два раза больше, чем по условию (119). "Набирать же статистику" при измерении фона, т.е. делать $\tau_{\phi} > \tau$ — значит бесполезно растрчивать время. Но все это справедливо лишь при условии связи (118) (см. п. 1).

Минимальное полное время, необходимое для получения заданной относительной погрешности α , определяется соотношением

$$T_{\text{мин}} = (\tau + \tau_{\phi})_{\text{мин}} = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\sqrt{N} + \sqrt{\phi}}{A} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\sqrt{N} - \sqrt{\phi}} \right)^2, \quad (120)$$

которое также дает наименьшее значение относительной погрешности, достижимое при заданном T . Эти $T_{\text{мин}}$ или $\alpha_{\text{мин}}$ получаются при условии (119). Чтобы использовать соотношения (119) или (120) для практических целей, необходимо сделать предварительные грубые замеры N и ϕ , либо оценить измеряемые эффекты теоретически.

3. Измерение частного

Относительная погрешность частного (98) в случае измерений с учетом фона принимает вид

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{N_1}{\tau_1} + \frac{\Phi_1}{\tau_{1\varphi}} \right) + \frac{1}{A_2^2} \left(\frac{N_2}{\tau_2} + \frac{\Phi_2}{\tau_{2\varphi}} \right)}, \quad (121)$$

а условие (117)

$$T = (\tau_1 + \tau_{1\varphi}) + (\tau_2 + \tau_{2\varphi}) = t_1 + t_2, \quad (122)$$

где t_1 и t_2 — суммарные времена измерения величин A_1 и A_2 соответственно. Минимум α при условии (122) определяется соотношениями

$$\frac{\tau_1}{\tau_{1\varphi}} = \frac{\sqrt{N_1}}{\sqrt{\Phi_1}}, \quad (123)$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_{2\varphi}} = \frac{\sqrt{N_2}}{\sqrt{\Phi_2}}, \quad (124)$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\sqrt{N_1} + \sqrt{\Phi_1}}{\sqrt{N_2} + \sqrt{\Phi_2}} = \frac{\sqrt{N_2} - \sqrt{\Phi_2}}{\sqrt{N_1} - \sqrt{\Phi_1}}, \quad (125)$$

которые также определяют минимум T при заданном α . Связь между минимальными T и α выражается формулой

$$T_{\text{мин}} = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\sqrt{N_1} + \sqrt{\Phi_1}}{A_1} + \frac{\sqrt{N_2} + \sqrt{\Phi_2}}{A_2} \right]^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{\sqrt{N_1} - \sqrt{\Phi_1}} + \frac{1}{\sqrt{N_2} - \sqrt{\Phi_2}} \right]^2, \quad (126)$$

которая при условиях (123) — (125) и заданном α дает $T_{\text{мин}}$, а при заданном T — $\alpha_{\text{мин}}$.

Соотношения (123) — (124) те же, что выражение (119); так как они относятся к случаю измерения разности. Соответ-

ственно, каждый член в скобках (126) такой же, как в скобках (120), но если $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$, то

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{N_2}}{\sqrt{N_1}} = \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}}, \quad (127)$$

и в отличие от измерения разности, при измерении частного, времена измерения обратно пропорциональны корням из измеряемых эффектов. Значит, на измерение меньшей скорости счета должно быть затрачено больше времени в соответствии с формулой (127) или (125), если есть фон.

4. Измерение коэффициента релаксации

Погрешность измерения коэффициента релаксации зависит не только от времени, но и от числа точек n (раздел 1У, п.10) в работе [12] рассмотрена зависимость относительной погрешности $\alpha = \Delta \gamma / \gamma$ от времени измерения в трех точках без фона. В этом случае условие связи (117) сводится к

$$T = t_1 + t_2 + t_3. \quad (128)$$

Оказалось, что функция $\alpha(t_i)$ в области положительных значений t_i (128) минимума не имеет. Значит минимальное значение α лежит на границе области, т.е. при $t_1 = 0$, либо $t_2 = 0$, либо $t_3 = 0$, или, другими словами, достигается при измерениях в двух точках. На указанной границе, т.е. уже при условии связи

$$T = t_1 + t_2, \quad (129)$$

функция α имеет минимум, значение в котором зависит от расстояния ΔZ между точками, $\Delta Z = Z_2 - Z_1$. В результате, наименьшее значение α определяется соотношением

$$e^{\frac{\gamma \Delta Z}{2}} \left(\frac{\gamma \Delta Z}{2} - 1 \right) = 1 \quad (130)$$

или

$$\gamma \Delta z = 2,557. \quad (131)$$

Поскольку параметр γ находится из опыта и заранее может быть не известен даже приближенно, то для определения оптимального расстояния между двумя точками лучше воспользоваться соотношением между скоростями счета в Z_1 и Z_2 (см. формулу (107)), которое становится эквивалентным (130) при подстановке $\gamma \Delta z$ из (131):

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{\gamma \Delta z} = 12,9 \approx 13. \quad (132)$$

Само минимальное значение $\alpha_{\text{мин}}$ при заданном T равно

$$\alpha_{\text{мин}} = \frac{1}{\sqrt{N_1 T}} \left[\frac{e^{\frac{\gamma \Delta z}{2}} + 1}{\gamma \Delta z} \right] = \frac{1,795}{\sqrt{N_1 T}}, \quad (133)$$

т.е. зависит от скорости счета в точке Z_1 . Это естественно, поскольку при фиксированном $\Delta z = Z_2 - Z_1$ полное число зарегистрированных событий тем больше, чем больше скорость счета в Z_1 . При этом времена измерения в Z_1 и Z_2 должны распределяться в соответствии с соотношением

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{N_1}}{\sqrt{N_2}} = e^{\frac{\gamma \Delta z}{2}} = 3,59. \quad (134)$$

Те же условия (130), (129), (134) определяют минимальное время T , необходимое для достижения заданной относительной погрешности α

$$T_{\text{мин}} = \frac{3,222}{N_1 \alpha^2}. \quad (135)$$

Соотношение (134) совпадает с (127) для измерения частного, поскольку в случае измерения в двух точ-

как коэффициент релаксации γ определяется формулой (см. (108)):

$$\gamma = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{z_2 - z_1} = \frac{\ln \frac{N_1}{N_2}}{z_2 - z_1} \quad (136)$$

и его погрешность в соответствии с формулами (9) и (110) есть погрешность частного (98),

$$\alpha = \frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{1}{\gamma \Delta z} \sqrt{(\Delta \ln N_1)^2 + (\Delta \ln N_2)^2} = \frac{1}{\gamma \Delta z} \sqrt{\left(\frac{\Delta N_1}{N_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N_2}{N_2}\right)^2} \quad (137)$$

Если учитывается фон, то формула (136) превращается в

$$\gamma = \frac{\ln A_1 - \ln A_2}{z_2 - z_1} = \frac{\ln \frac{A_1}{A_2}}{z_2 - z_1}, \quad (138)$$

где $A_1 = N_1 - \Phi_1$ и $A_2 = N_2 - \Phi_2$, а (137) с точностью до коэффициента становится такой, как формула (121):

$$\alpha = \frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{1}{\gamma \Delta z} \sqrt{\left(\frac{\Delta A_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A_2}{A_2}\right)^2} = \frac{1}{\gamma \Delta z} \sqrt{\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{N_1}{\tau_1} + \frac{\Phi_1}{\tau_{\text{ф}}}\right)^2 + \frac{1}{A_2^2} \left(\frac{N_2}{\tau_2} + \frac{\Phi_2}{\tau_{\text{ф}}}\right)^2} \quad (139)$$

Поэтому условиями оптимальных измерений γ по двум точкам с учетом фона также остаются формулы (122) – (125), а выражение для минимального времени $T_{\text{мин}}$ (или минимальной относительной погрешности $\alpha_{\text{мин}}$) отличается от формулы (126) только константой:

$$T_{\text{мин}} = \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2 \Delta z^2} \left[\frac{1}{\sqrt{N_1} - \sqrt{\Phi_1}} + \frac{1}{\sqrt{N_2} - \sqrt{\Phi_2}} \right]^2 \quad (140)$$

Формулы (136) - (140) относятся к случаю измерения коэффициента релаксации γ в любых двух точках Z_1 и Z_2 , не обязательно с оптимальным расстоянием $\Delta Z_{\text{опт}}$ между ними. Но, конечно, наименьшее время на все измерения при заданном α будет затрачено в том случае, если при фиксированном Z_1 , $Z_2 = Z_1 + \Delta Z_{\text{опт}}$. При этом формула (140) обратится в (135), если $\phi_1 = \phi_2 = 0$. В присутствии фона соотношения (130) - (132) для $\Delta Z_{\text{опт}}$ несколько изменяются, и это изменение будет зависеть как от абсолютной величины ϕ_1 и ϕ_2 , так и от возможной зависимости $\phi(Z)$. Но если фон мал, соотношения (130) - (132) останутся справедливыми.

Итак, измерения коэффициента релаксации наиболее рациональны в двух точках, первая из которых Z_1 выбирается так, чтобы скорость счета в ней была возможно большей, а вторая берется там, где скорость счета примерно в 13 раз меньше, чем в первой. Полное время измерений T при этом распределяется по отдельным замерам в соответствии с формулами (134) или (123) - (125), если учитывается фон. Расчет γ и его погрешности ведется по упрощенным формулам (136) - (139). Однако на практике такая процедура не может быть применена, если нет уверенности, что в том диапазоне измерения Z , где взяты Z_1 и Z_2 , действительно существует экспоненциальная зависимость (107).

В устройствах для экспоненциальных опытов нейтронный поток следует этой зависимости лишь на достаточном удалении от источника, и слепое применение описанной процедуры приведет к грубейшей ошибке. Измерение скорости счета в нескольких точках здесь оказывается неизбежным, так как представляет собою поиск области экспоненциальной зависимости. Однако много точек брать нецелесообразно. Следует взять пять-шесть точек в диапазоне изменения скорости счета в 50-60 раз. Расстояние между первыми точками можно взять меньше, чем между последними, чтобы с лучшей точностью найти начало экспоненциальной зависимости. Ведь чем больше N_1 , тем меньше α , как в оптимальных измерениях (см. формулу (133)), так и в любых других; в том числе в измерениях со многими точками.

Распределение времени T между многими точками в отличие от оптимального (134) или (127) лучше взять равномерным, т.е.

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n. \quad (141)$$

Дело в том, что в области изменения t_i , связанных соотношением (117), вблизи точки (141) функция $\alpha(t)$ имеет седловину. И хотя в граничных точках $\alpha(t_i)$ имеет значения несколько меньшие, чем в точке (141), но искать лучшую процедуру, чем (141), нет смысла, поскольку лучшая относится к двум точкам. А формула (141), не очень сильно загрубляя результат, является простейшей рекомендацией. Она даже лучше распределения времени между соседними точками по формуле (134) или, точнее, по формуле (127) (см. [12]).

В присутствии фона каждое t_i следует распределить между τ_i и $\tau_{i\phi}$, $t_i = \tau_i + \tau_{i\phi}$, в соответствии с формулой (119), или, что то же самое, (123) - (124).

5. Активация

С точки зрения минимума относительной погрешности суммарного числа отсчетов, регистрируемого счетчиком от активированного детектора, времена облучения и счета должны быть равны. Продолжительность же каждого из этих оптимальных интервалов t , представленных как $t = x \tau$, где τ - среднее время жизни радиоактивного вещества, а x - коэффициент, выражающий t в долях τ , определяется уравнением

$$e^x = 1 + 2x, \quad (142)$$

решение которого $x = 1,256$. Отсюда следует, что облучение и счет целесообразно вести в течение времени

$$t = 1,256 \frac{T}{\ln 2} = 1,813 T \approx 1,8 T, \quad (143)$$

где T - период полураспада радиоактивного вещества.

Естественно, что имеющееся в распоряжении для активационных измерений полное время не обязательно будет кратно $2t$, или t , если активацию следующего детектора проводить во время обсчета предшествующего. Однако, его целесо-

образно разбить так, чтобы интервалы облучения и счета, равные между собой, не сильно отличались от (143). Эта рекомендация относится к случаю, когда измеряемый эффект много больше фона счетчика. Если фон дает вклад очень большой, то задачу следует рассмотреть для конкретных условий.

Список литературы

1. Смирнов Н.В., Дуциш-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., "Наука", 1969.
2. Лоэв М. Теория вероятностей. Перев. с англ. М., Изд. иностран. лит., 1962.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., "Наука", 1964.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., "Наука", 1969.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Перев. с англ. Т. 1 - 2, М., "Мир", 1967.
6. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. Перев. с англ. М., "Мир", 1968.
7. Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. Перев. с англ. Л.-М., ГТТИ, 1933.
8. Гутер Р.С., Орчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М., "Наука", 1970.
9. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное руководство. М., "Наука", 1971.
10. Бронштейн И.Н., Семонднов К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М., "Наука", 1967.
11. Климов А.И. Погрешности интерполяции и интегралов. - В сб.: Физика ядерных реакторов. Вып. 1У. Атомиздат, 1975.

12. Климов А. Н. Рациональные измерения с пропорциональным счетчиком или ионизационной камерой при проведении экспоненциальных опытов. — В сб.: Некоторые вопросы инженерной физики. Вып. 13. Госатомиздат, 1963.

О Г Л А В Л Е Н И Е

1. Теория	3
П. Опыт	12
Ш. Метод наименьших квадратов	27
1У. Погрешности статистических величин	42
У. Оптимизация измерений	57
Список литературы	66

А. Н. Климов

Погрешности измеряемых величин

Редактор Н. Н. Пospelова

Техн. редактор Н. М. Генкина

Корректор Н. Н. Смолина

Л-80338 Подл. в печать 27/IX-1977 г.
Формат 60x84 1/16 Объем 4,25 п.л. 3,97 у.из.л.
Тираж 200 экз. Цена 17 коп. Изд. № 025-1
Заказ 1485

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 1.