

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ФОКАСА-ЛЕНЕЛЛСА

Рассматривается обобщённое уравнение Фокаса–Ленеллса, описывающее распространение сверхкоротких импульсов в нелинейных оптических средах, с учетом дополнительного частотного изменения, самоострения и межмодовых эффектов. Исследуемое уравнение является обобщением нелинейного уравнения Шрёдингера. Модифицированным методом множителей построены два закона сохранения исследуемого уравнения без ограничений на параметры. Найдены первые интегралы изучаемого уравнения в переменных бегущей волны. Получены точные решения обобщённого уравнения Фокаса–Ленеллса. Вычислены сохраняющиеся величины для оптических солитонов рассматриваемого уравнения.

D.R. NIFONTOV, N.A. KUDRYASHOV

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia

CONSERVATION LAWS, EXACT SOLUTIONS AND CONSERVED QUANTITIES FOR THE GENERALIZED FOKAS–LENELLS EQUATION

The generalized Fokas–Lenells equation, which describes the propagation of ultrashort pulses in nonlinear optical media, is considered, taking into account higher-order dispersion, self-sharpening, and intermodal effects. This equation is a generalization of the nonlinear Schrödinger equation. Using a modified multiplier method, two conservation laws for this equation are constructed without restrictions on the parameters. The corresponding first integrals in the traveling-wave variables of this equation are found. Some exact solutions of the Fokas–Lenells equation are obtained. The conserved quantities for the constructed optical solitons of this equation are calculated.

Исследовательский интерес к математическим моделям, описывающим динамику импульсов в нелинейных оптических средах, существенно возрос в последние десятилетия под влиянием технологических вызовов, связанных с созданием эффективных систем передачи информации [1,2]. Основой для подобных математических моделей в большинстве случаев служат уравнения, обобщающие классическое нелинейное уравнение Шрёдингера. Одним из таких является уравнение Фокаса–Ленеллса [3, 4]. Это уравнение было предложено для описания процессов в оптических волокнах и других нелинейных средах, где стандартные модели оказываются недостаточными и необходимо учитывать дополнительное частотное изменение.

Рассмотрим обобщённое нелинейное уравнение Фокаса–Ленеллса в виде

$$iq_t + aq_{xx} + b|q|^2q + cq_{xt} + i\sigma|q|^2q_x = i(\alpha q_x + \lambda(|q|^{2n}q)_x) + \mu(|q|^{2n})_x q.$$

Уравнение имеет два закона сохранения без ограничений на параметры. Законы сохранения построены модифицированным методом множителей [5].

Первый закон сохранения имеет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0,$$

$$\text{где } T_1 = |q|^2 - i\frac{c}{2}(q^*q_x - qq_x^*), \quad X_1 = ia(qq_x^* - q^*q_x) - i\frac{c}{2}(q^*q_t - qq_t^*) + \frac{\sigma}{2}|q|^4 - \alpha|q|^2 - \frac{\lambda(2n+1)+2\mu n}{n+1}|q|^{2(n+1)}.$$

Второй закон сохранения имеет вид

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial X_2}{\partial x} = 0,$$

$$\text{где } T_2 = \frac{bc}{2}|q|^4 + \frac{ic\sigma}{4}|q|^2(q^*q_x - qq_x^*) - \frac{\lambda+\mu}{n+1}|q|^{2(n+1)} - \frac{i(ac+a)}{2}(q^*q_x - qq_x^*) + \frac{ic\mu}{2(n+1)}|q|^{2n}(q^*q_x - qq_x^*),$$

$$X_2 = ac(q_xq_t^* + q_x^*q_t) + c^2|q_t|^2 + \frac{ic\sigma}{4}|q|^2(qq_t^* - q^*q_t) - \frac{i(ac+a)}{2}(qq_t^* - q^*q_t) + a^2|q_x|^2 + \frac{ab}{2}|q|^4 - \frac{\sigma(\lambda+\mu)}{n+2}|q|^{2(n+1)} - ia(\lambda+\mu)|q|^{2n}(qq_x^* - q^*q_x) + \frac{\alpha(\lambda+\mu)}{n+1}|q|^{2(n+1)} + \frac{(\lambda(2n+1)+2\mu n)(\lambda+\mu)}{2n+1}|q|^{2(2n+1)} - ic\frac{2\lambda(n+1)+\mu(2n+1)}{2(n+1)}|q|^{2n}(qq_t^* - q^*q_t).$$

Из полученных выражений найдены первые интегралы исходного уравнения в переменных бегущей волны. Они используются для построения точных решений уравнения. Для уравнения найдены периодические и уединенные волны. Для оптических солитонов рассчитаны сохраняющиеся величины.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект государственного задания № FSWU-2026-0006).

Список литературы

1. Kivshar Y. S., Agrawal G. P., Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals, Academic Press, 2003.
2. Kivshar Yu. S. and Malomed B. A., Dynamics of solitons in nearly integrable systems, Rev.Mod.Phys.(1989) 63, 763-915.
3. J. Lenells, A.S. Fokas, An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons. Inverse Prob. **25**(11), 115006 (2009).
4. N.A. Kudryashov, First integrals and general solution of the Fokas-Lenells equation. Optika **195**, 163135 (2019).
5. Nifontov, D.R., Kudryashov, N.A. & Lavrova, S.F. Conservation laws and exact solutions of the generalized Fokas–Lenells equation. J Opt (2025). <https://doi.org/10.1007/s12596-025-02898-y>