ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА И ИНЖИНИРИНГ, 2023, том 14, № 2, с. 109–118

ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ

УДК 534.222.2

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОТНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЫ ЛЬДА В МИШЕНИЯХ ЛТС

© 2023 г. К. Е. Городничев[a], *, С. И. Глазырин[a], Д. К. Ильницкий[a], С. Е. Куратов[a]

[a]*ФГУП ВНИИА им. Н.Л. Духова, Москва, 127055 Россия*

**E-mail: cyrgo85@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.09.2022 г.
После доработки 27.09.2022 г.
Принята к публикации 05.10.2022 г.

На текущий день не удается получить зажигание мишени лазерного термоядерного синтеза. Причины этого явления до конца не изучены. Один из наиболее важных факторов, влияющих на снижение выхода, – развитие гидродинамических неустойчивостей, обусловленных геометрическими неоднородностями (шероховатость, присутствие элементов, нарушающих симметрию, и т.п.). В результате их наличия возникает объемное поле возмущения плотности. В данной работе представлены результаты теоретического исследования задачи о влиянии возмущений плотности на устойчивость границы области при ее ускоренном движении. Проведено сравнение с результатами численного анализа.

Ключевые слова: гидродинамическая неустойчивость, ЛТС, возмущение плотности, ускоренное движение, устойчивость границы

DOI: 10.56304/S2079562922030162

1. ВВЕДЕНИЕ

Создание источника энергии, в основе которого лежит процесс энерговыделения при протекании термоядерных реакций, до сих пор остается одной из наиболее актуальных мировых задач. В схемах инерциального удержания наибольший успех достигнут на установке лазерного термоядерного синтеза NIF [1], где большинство экспериментов вплотную подошли к порогу зажигания, а один даже превысил критерий Лоусена [2], где суммарное энерговыделение приблизилось, но пока не превзошло лазерную энергию.

Зажигание должно происходить за счет сферического сжатия газовой смеси (DT), окруженной DT льдом. Считается, что сложности с достижением условий зажигания связаны с неконтролируемым ростом гидродинамических неустойчивостей [3], которые усиливают начальные возмущения от поверхности термоядерной капсулы, ее креплений, трубки для закачки DT-газа, а также асимметрии облучения, вызываемой развитием лазер-плазменных неустойчивостей.

В итоге, при сжатии возмущения многократно вырастают, что сказывается на итоговой форме горячей области, а также параметрах плазмы в ней. Во многих работах [4–10], посвященных моделированию гидродинамических процессов в мишенях, все геометрические факторы и неоднородности учитываются в едином расчете, что не позволяет сказать о роли отдельных источников возмущений. Отдельный интерес представляет исследование вопроса о влиянии начальных возмущений плотности в слое льда на искривление границы газовой полости в процессе сжатия. Такие возмущения могут быть обусловлены как технологией изготовления мишени, так и наличием шероховатостей контактных границ внутри мишени.

Действительно, наличие возмущений на границе лед – аблятор приводит к возникновению объемного поля возмущений плотности в слое льда за фронтом ударной волны, возникающей при лазерном облучении. То есть возмущения переносятся с поверхности в объем, что связано с образованием сложной структуры разрывов (см., например, [11–15]). В работе [10] представлены результаты численного исследования влияния шероховатости или разноплотности внешней границы аблятора на форму газовой полости при сжатии мишени. Из них следует, что наличие шероховатости и разноплотности оказывают схожее влияние на процесс развития искривления границы газовой полости. Исследование процесса возникновения поля возмущений плотности за фронтом ударной волны после прохождения через искривленную границу является самостоятельной задачей и выходит за рамки данной работы. Сосредоточимся на задаче о влиянии возму-

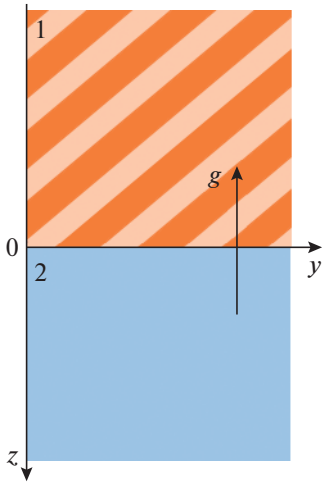


Рис. 1. Начальная постановка задачи.

щений плотности на устойчивость контактной границы при сжатии, учитывая, что все элементы мишени движутся ускоренно.

Исследования устойчивости границы среды, движущейся с ускорением, широко представлены в литературе [16, 17]. Чаще всего данная задача рассматривается с целью изучения неустойчивости Рэлея–Тейлора [18, 19], гравитационных поверхностных волн [20] и т.п. В качестве начальной неоднородности рассматривается возмущение границы раздела сред и, далее, исследуется ее эволюция. В данной работе контактная граница в начальный момент времени гладкая, а в объеме среды присутствуют возмущения плотности. Рассмотрен вопрос эволюции такой начальной конфигурации со временем.

Анализ проводится в двумерной плоской постановке. Также будем считать, что начальное значение давления достаточно для того, чтобы можно было ограничиться рассмотрением гидродинамического приближения и не учитывать упруго-пластические свойства вещества. Наличием поверхностного натяжения также пренебрегаем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мишени, используемые для лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), имеют многослойную структуру: центральная область заполнена DT–газом, снаружи он окружен DT–льдом, следующим идет аблятор [21, 22]. Высокое абляционное давление, возникающее при поглощение лазерного излучения или рентгена (в случая непрямого облучения) внешними слоями мишени инициирует распространение ударной волны, бегущей в центр мишени.

При прохождении ударной волны через искривленную контактную границу за ее фронтом образуется поле возмущений плотности. Причем геометрические размеры области возмущений заметно превышают характерную длину волны начального искривления [11–15]. Следовательно, наличие шероховатости границы аблятор – лед приведет к появлению неоднородности плотности в слое льда с самого начала стадии сжатия. В исследуемой системе сжатие сопровождается ускоренным движением. Поэтому можно говорить об неустойчивости контактной границы по типу Рэлея–Тейлора, но с начальной затравкой не в виде искривления границы, а посредством наличия объемного возмущения плотности. По аналогии с ранее описанной неустойчивостью, обозначенной нами Рихтмайера–Мешкова–подобная неустойчивость [23], введем обозначение Рэлея–Тейлора–подобная неустойчивость.

При проведении теоретического анализа исследуем упрощенную систему. Рассмотрим две граничащие полубесконечные среды, движущиеся с ускорением g, что эквивалентно наличию силы “тяжести” в системе отсчета, связанной с контактным разрывом (см. рис. 1). В одной из них (для определенности будем считать, что в первой) в начальный момент времени задано поле неоднородности плотности $\delta\rho_1$ и давления δP_1 по закону:

$$\begin{aligned} \delta\rho_1 &= A_{\delta\rho}\exp\{ik_{0z}z + ik_{0y}y\}, \\ \delta P_1 &= A_{\delta P}\exp\{ik_{0z}z + ik_{0y}y\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $k_{0z} = k_R + ik_I$, k_R, $k_I = g\rho_0/P_0$ – действительная и мнимая части z-проекции волнового вектора, P – давление, $A_{\delta P} = iA_{\delta\rho}g/k_{0z}$. Значения для k_I и $A_{\delta P}$ обусловлены равенством (6). Рассмотрим эволюцию контактной границы со временем.

Предполагаем, что среда описывается уравнением состояния идеальной плазмы, что подходит для полностью ионизованной плазмы (в мишенях ЛТС прямого облучения такое условие хорошо выполняется из-за высоких температур (~кэВ) в абляторе):

$$P = \Gamma\rho\zeta = \beta\rho, \quad \beta = \Gamma\zeta, \tag{2}$$

где Γ – константа, ζ – удельная тепловая энергия.

Для решения поставленной задачи необходимо рассмотреть систему уравнений гидродинамики:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{g}, \\ \frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Эти уравнения решаются в каждой из сред, а решения сшиваются с помощью условий непрерывности давления и нормальной компоненты скорости на контактной границе

$$P_1 = P_2, \quad v_{n,1} = v_{n,2}. \tag{4}$$

Здесь индексы соответствуют среде 1 и 2 (см. рис. 1).

2.1. Невозмущенный стационарный случай

Наличие ускорения **g** приводит к тому, что в средах возникает стратификация. При отсутствии возмущений система остается стационарной. Получим это решение системы (3). Рассмотрим задачу в системе отсчета, связанной с контактной границей:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g. \tag{5}$$

Предположим, что температура среды и их теплоемкости постоянны и, следовательно, тепловая энергия ζ постоянна ($\zeta = \zeta_0$). Тогда из (2), (5) следует, что:

$$\rho = \rho_{CD} \exp\{-gz/\beta\}. \tag{6}$$

где ρ_{CD} – плотность вблизи контактного разрыва. Это решение является базовым для исследования неустойчивости при наличии возмущений.

2.2. Линейное приближение. Основные уравнения.

Динамика возмущений описывается той же системой гидродинамических уравнений (3). Предполагая, что возмущения малые, линеаризуем уравнения. В таком случае все величины могут быть представлены в виде $a + \delta a$, где невозмущенное значение соответствует стационарному решению найденному выше. Из (3) для j-ой области ($j = 1, 2$) получим:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \delta\rho_j}{\partial t} + \delta v_{z,j}\frac{\partial \rho_j}{\partial z} + \rho_j\left(\frac{\partial \delta v_{z,j}}{\partial z} + \frac{\partial \delta v_{y,j}}{\partial y}\right) = 0,\\
\rho_j\frac{\partial \delta v_{z,j}}{\partial t} + \frac{\partial \delta P_j}{\partial z} + \delta\rho_j g = 0,\\
\rho_j\frac{\partial \delta v_{y,j}}{\partial t} + \frac{\partial \delta P_j}{\partial y} = 0,\\
\frac{\partial \delta\zeta_j}{\partial t} + \delta v_{z,j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial z} - \frac{\Gamma_j\zeta_j}{\rho}\left(\frac{\partial \delta\rho_j}{\partial t} + \delta v_{z,j}\frac{\partial \rho_j}{\partial z}\right) = 0,\\
\delta P_j - \frac{\partial P_j(\rho_j,\zeta_j)}{\partial \rho_j}\delta\rho_j - \frac{\partial P_j(\rho_j,\zeta_j)}{\partial \zeta_j}\delta\zeta_j = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Из первых трех уравнений системы (7) следует:

$$\frac{\partial^2 \delta\rho_j}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta P_j}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \delta P_j}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial \delta\rho_j}{\partial z}g = 0. \tag{8}$$

Из четвертого и пятого уравнений в (7) следует:

$$\frac{\partial^2 \delta P_j}{\partial t^2} - c_j^2\frac{\partial^2 \delta\rho_j}{\partial t^2} - \Gamma_j g\left(\frac{\partial \delta P_j}{\partial z} + \delta\rho_j g\right) = 0. \tag{9}$$

При определении скорости звука используется выражение $c^2 = \partial P/\partial\rho + (P/\rho^2)(\partial P/\partial\zeta)$ [24]. Полученная система является замкнутой для возмущений плотности $\delta\rho$ и давления δP.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Будем искать решение системы уравнений (8) и (9) с использованием преобразования Лапласа $\hat{L}$ ($\hat{f}(s) = \hat{L}\{f(t)\}$) [25]. Тогда, с учетом УРС (2), из уравнений (8) и (9) следует для j-ой области

$$\tilde{s}\left(\tilde{s}\delta\hat{\tilde{\rho}}_j - \delta\tilde{\rho}_j(+0)\right) - \frac{\partial^2 \delta\hat{\tilde{P}}_j}{\partial\tilde{z}^2} + \tilde{k}_{0y}^2\delta\hat{\tilde{P}}_j - \frac{\partial\delta\hat{\tilde{\rho}}_j}{\partial\tilde{z}} = 0, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\Delta_j}{\Gamma_j}\left(\tilde{s}^2\delta\hat{\tilde{P}}_j - \tilde{s}\delta\tilde{P}_j(+0)\right) - \tilde{s}\Psi_j\left(\tilde{s}\delta\hat{\tilde{\rho}}_j - \tilde{\rho}_j(+0)\right) -\\
- \Delta_j\left(\frac{\partial\delta\hat{\tilde{P}}_j}{\partial\tilde{z}} + \delta\hat{\tilde{\rho}}_j\right) = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь использованы следующие безразмерные переменные $\tilde{s} = s\sqrt{\beta}/g$, $\tilde{z} = zg/\beta$, $\tilde{k}_{0y} = k_{0y}\beta/g$, $\delta\hat{\tilde{\rho}}_j = g\delta\hat{\rho}_j/\sqrt{\beta}\rho_j$, $\delta\tilde{\rho}_j(+0) = \delta\rho_j(+0)/\rho_j$, $\delta\hat{\tilde{P}}_j = g\delta\hat{P}_j/\beta^{3/2}\rho_j$, $\delta\tilde{P}_j(+0) = \delta P_j(+0)/\beta\rho_j$, $\Delta_j = \Gamma_j/(\Gamma_j + 1)$, $\Psi_j = \rho_1/\rho_j$. Из уравнения (11) следует, что

$$\begin{gathered}
\delta\hat{\tilde{\rho}}_j =\\
= \frac{\frac{\Delta_j}{\Gamma_j}\tilde{s}^2\delta\hat{\tilde{P}}_j - \Delta_j\frac{\partial\delta\hat{\tilde{P}}_j}{\partial\tilde{z}} + \left(\Psi_j\delta\tilde{\rho}_j(+0) - \frac{\Delta}{\Gamma}\delta\tilde{P}_j(+0)\right)\tilde{s}}{\Psi_j\tilde{s}^2 + \Delta_j}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Из (10) и (12) следует:

$$\begin{gathered}
\Psi_j\frac{\partial^2\delta\hat{\tilde{P}}_j}{\partial\tilde{z}^2} + \frac{\partial\delta\hat{\tilde{P}}_j}{\partial\tilde{z}} - \frac{\frac{\Delta_j}{\Gamma}\tilde{s}^4 + \tilde{k}_{0y}^2\left(\Psi_j\tilde{s}^2 + \Delta_j\right)}{\tilde{s}^2}\delta\hat{\tilde{P}}_j +\\
+ \frac{\left(\Delta_j + i\Psi_j\tilde{k}_{0z}\right)\delta\tilde{\rho}_j(+0) + \frac{\Delta}{\Gamma}\left(\tilde{s}^2 - i\tilde{k}_{0z}\right)\delta\tilde{P}_j(+0)}{\tilde{s}} = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Решение уравнения (13) представимо в виде суммы общего однородного решения ($\delta\hat{\tilde{P}}_j^{(ge)}$) и частного ($\delta\hat{\tilde{P}}_j^{(pe)}$). Из (13) следует, что

$$\begin{gathered}
\delta\hat{\tilde{P}}_j^{(pe)} = R_j(\tilde{s})\exp\left\{i\tilde{k}_{0z}\tilde{z} + i\tilde{k}_{0y}\tilde{y}\right\},\\
R_j(\tilde{s}) =\\
= \frac{\left(\Delta_j + i\Psi_j\tilde{k}_{0z}\right)\delta\tilde{\rho}_1(+0) + \frac{\Delta}{\Gamma}\left(\tilde{s}^2 - i\tilde{k}_{0z}\right)\delta\tilde{P}_j(+0)}{\frac{\Delta_j}{\Gamma_j}\tilde{s}^4 + \left(\left(\tilde{k}_{0y}^2 + \tilde{k}_{0z}^2\right)\Psi_j - i\tilde{k}_{0z}\right)\tilde{s}^2 + \tilde{k}_{0y}^2\Delta_j}\tilde{s}.
\end{gathered} \tag{14}$$

При поиске общего однородного решения необходимо учесть граничные условия на контактной границе для давления и нормальной компоненты скорости (4). Из второго уравнения системы (7) и (12) следует, что

$$\delta\hat{\tilde{v}}_{z,j} = -\Psi_j \frac{\left(\Psi_j \dfrac{\partial \delta\hat{\tilde{P}}_j}{\partial \tilde{z}} + \dfrac{\Delta_j}{\Gamma_j}\delta\hat{\tilde{P}}_j\right)\tilde{s} + \Psi_j \delta\tilde{\rho}_j(+0) - \dfrac{\Delta}{\Gamma}\delta\tilde{P}_j(+0)}{\Psi_j \tilde{s}^2 + \Delta_j}, \tag{15}$$

где $\delta\hat{\tilde{v}}_{z,j} = g\delta\tilde{v}_{z,j}/\beta$.

Общее однородное решение в (13) выглядит следующим образом:

$$\delta\hat{\tilde{P}}_j^{(ge)} = C_{1,j}(\tilde{s})\exp\{\tilde{\kappa}_{j,-}\tilde{z}\} + C_{2,j}(\tilde{s})\exp\{\tilde{\kappa}_{j,+}\tilde{z}\}, \tag{16}$$

где

$$\tilde{\kappa}_{j,\pm} = -\frac{1}{2\Psi_j} \pm \pm\frac{1}{\tilde{s}}\sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{4\Psi_j^2} + \frac{1}{\Psi_j}\left(\frac{\Delta_j}{\Gamma_j}\tilde{s}^4 + \tilde{k}_{0y}^2\left(\tilde{s}^2\Psi_j + \Delta_j\right)\right)}. \tag{17}$$

Будем считать, что $C_{1,2} = C_{2,1} = 0$. Оправданность данного предположения будет видна из дальнейших рассуждений. Следовательно, используя (4) и (15), получим:

$$\delta\hat{\tilde{P}}_1 = C_{1,1}(\tilde{s})\exp\{\tilde{\kappa}_{1,-}\tilde{z} + i\tilde{k}_{0y}\tilde{y}\} + R_1\exp\{i\tilde{k}_{0z}\tilde{z} + i\tilde{k}_{0y}\tilde{y}\},$$

$$C_{1,1}(\tilde{s}) = \frac{\left[\chi(\tilde{s})\left(\tilde{s}\tilde{\kappa}_{2,+} + \dfrac{\tilde{s}\Delta_2}{\Psi_2\Gamma_2}\right) - i\tilde{k}_{0z}\tilde{s} - \dfrac{\tilde{s}\Delta_1}{\Gamma_1}\right]R_1(\tilde{s}) - \delta\tilde{\rho}_1(+0) + \dfrac{\Delta}{\Gamma}\delta\tilde{P}_1(+0)}{\tilde{s}\tilde{\kappa}_{1,-} + \dfrac{\tilde{s}\Delta_1}{\Gamma_1} - \chi(\tilde{s})\left(\tilde{s}\tilde{\kappa}_{2,+} + \dfrac{\tilde{s}\Delta_2}{\Psi_2\Gamma_2}\right)}, \tag{18}$$

$$\chi(\tilde{s}) = \Psi_2^2\frac{\tilde{s}^2 + \Delta_1}{\Psi_2\tilde{s}^2 + \Delta_2}.$$

Далее рассмотрим различные возможные случаи соотношения плотностей контактирующих веществ.

3.1. Решение: обратное преобразование

В данной работе нас интересует временная эволюция границы слоев DT лед – DT газ в мишенях ЛТС. За фронтом головной ударной волны вещество быстро переходит в плазменное состояние, поэтому описывается УРС вида (2) $\Gamma_1 = \Gamma_2 \equiv \Gamma$. Согласно (15), для $\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}$ запишем

$$\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1} = \delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(ge)} + \delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(pe)},$$

$$\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(ge)} = -\frac{\left(\tilde{\kappa}_{1,-} + \dfrac{\Delta}{\Gamma}\right)C_{1,1}\tilde{s}}{\tilde{s}^2 + \Delta}\exp\{\tilde{\kappa}_{1,-}\tilde{z} + i\tilde{k}_{0y}\tilde{y}\},$$

$$\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(pe)} = -\frac{\left(i\tilde{k}_{0z} + \dfrac{\Delta}{\Gamma}\right)R_1\tilde{s} + \delta\tilde{\rho}_1(+0) - \dfrac{\Delta}{\Gamma}\delta\tilde{P}_1(+0)}{\tilde{s}^2 + \Delta}\times \tag{19}$$

$$\times\exp\{i\tilde{k}_{0z}\tilde{z} + i\tilde{k}_{0y}\tilde{y}\}.$$

Поскольку нас интересует возмущение границы лед–газ, то далее будем считать, что $z = 0$. Согласно [25] оригинал от функции $\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(pe)}$ находится в виде аналитической функции

$$\delta\tilde{v}_{z,1}^{(pe)}(\tilde{t}) = -\frac{\tilde{k}_{0y}^2\left(\Gamma\tilde{k}_{0z} - i\Delta\right)\delta\tilde{\rho}_1(+0)}{2\Gamma\tilde{k}_{0z}}\times \times\sum_{j=1}^{4}\frac{e^{\tilde{\sigma}_j\tilde{t}}}{\tilde{\sigma}_j\left(2\dfrac{\Delta}{\Gamma}\tilde{\sigma}_j^2 + \tilde{k}_{0z}^2 + \tilde{k}_{0y}^2 - i\tilde{k}_{0z}\right)}, \tag{20}$$

где полюса

$$\tilde{\sigma}_j = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{2\Delta}\left(i\tilde{k}_{0z} - \tilde{k}_{0z}^2 - \tilde{k}_{0y}^2 \pm \sqrt{\left(\tilde{k}_{0z}^2 + \tilde{k}_{0y}^2 - i\tilde{k}_{0z}\right)^2 - 4\frac{\tilde{k}_{0y}^2\Delta^2}{\Gamma}}\right)}, \quad j = 1,\ldots,4 \tag{21}$$

определяются из уравнения:

$$\frac{\Delta}{\Gamma}\tilde{s}^4 + \left(\tilde{k}_{0z}^2 + \tilde{k}_{0y}^2 - i\tilde{k}_{0z}\right)\tilde{s}^2 + \tilde{k}_{0y}^2\Delta = 0. \tag{22}$$

Причем полюс $\tilde{\sigma}_1$ соответствует выбору (+,+) в (21), $\tilde{\sigma}_2$ соответствует (–,+), $\tilde{\sigma}_3$ соответствует (+,–), $\tilde{\sigma}_4$ соответствует (–,–).

Для оригинала функции $\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(ge)}$ справедливо выражение:

$$\delta\tilde{v}_{z,1}^{(ge)}(\tilde{t}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell-i\infty}^{\ell+i\infty}\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(ge)}(\tilde{s})e^{\tilde{s}\tilde{t}}d\tilde{s}. \tag{23}$$

Точки ветвления $\tilde{\mu}_j$ ($j = 1, ..., 4$) для m-ой области определяются из равенства нулю подкоренного выражения

$$\frac{\Delta}{\Gamma}\Psi_m\tilde{s}^4 + \left(\Psi_m^2\tilde{k}_{0y}^2 + \frac{1}{4}\right)\tilde{s}^2 + \Psi_m\tilde{k}_{0y}^2\Delta = 0 \tag{24}$$

и равны

$$\tilde{\mu}_j^{(m)} = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{2\Psi_m\Delta}\left(\Psi_m^2\tilde{k}_{0y}^2 + \frac{1}{4}\right)\left\{-1 \pm \sqrt{1 - \left[\frac{2\Psi_m\tilde{k}_{0y}\Delta}{\sqrt{\Gamma}\left(\Psi_m^2\tilde{k}_{0y}^2 + \frac{1}{4}\right)}\right]^2}\right\}}, \tag{25}$$

где $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = \rho_1/\rho_2$. Связь между j и конкретной точкой ветвления аналогична (21).

Из условий $\Gamma > 0$ и $\tilde{k}_{0y} > 0$, следует что в (25) выражение, стоящее в квадратных скобках под корнем, не превосходит единицы. Это означает, что $\mathrm{Re}\tilde{\mu}_j^{(m)} = 0$.

Из (23) следует, что подынтегральная функция кроме полюсов $\tilde{\sigma}_j$ ($j = 1,\ldots,4$) (см. выражение (21)), во-первых, полюса:

$$\tilde{\sigma}_{5,6} = \pm i\sqrt{\Delta}, \tag{26}$$

определяемые уравнением $\tilde{s}^2 + \Delta = 0$. Во-вторых, полюса, определяемые уравнением:

$$\tilde{\kappa}_{1,-} + \frac{\Delta}{\Gamma} - \chi(\tilde{s})\left(\tilde{\kappa}_{2,+} + \frac{\Delta}{\Gamma}\right) = 0. \tag{27}$$

Количество полюсов в (27), лежащих на первом листе Римана, определяется параметрами задачи.

Из (22) следует, что в полюсах $\tilde{\sigma}_{1,2,3,4}$ проекция волнового вектора

$$\tilde{\kappa}_{1,-} = -i\tilde{k}_{0z} - 1 = -i\tilde{k}_R. \tag{28}$$

Следовательно, данное решение представляет из себя гармоническую волну. Начальное возмущение плотности растет по мере удаления от границы. Поэтому эффективно вклад возмущений, обусловленных искривлением контактной границы, будет уменьшаться по мере удаления от нее.

Отметим, что для проекции волнового вектора $\tilde{\kappa}_{1,+} = i\tilde{k}_{0z}$ мнимая часть отрицательна. Следовательно, такое решение экспоненциально расходится при удалении от границы и отбрасывается.

Из (1) следует, что мнимая часть подкоренного выражения в $\kappa_{2,+}$ для полюсов $\tilde{\sigma}_{1,2,3,4}$ равна $-i\tilde{k}_R$, $\tilde{k}_R > 0$. Следовательно, в этом случае $\mathrm{Re}\left(\tilde{\kappa}_{2,+}\right) < 0$. Это соответствует затуханию возмущения при удалении от контактного разрыва.

В полюсах $\tilde{\sigma}_{5,6}$ с учетом (26) получим, что

$$\tilde{\kappa}_{1,-} = -\Delta/\Gamma. \tag{29}$$

Вычеты в полюсах $\tilde{\sigma}_{5,6}$ равны нулю, по причине равенства нулю числителя в $\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(pe)}$ в (19).

Вычисление интеграла (23) проводится по контуру, изображенному на рис. 2. Чтобы не перегружать рисунок на нем представлено не все множество полюсов и точек ветвления, а их расположение показано схематически. С использованием основной теоремы о вычетах получим:

$$\oint_{B_1B_1} = \int_{B_1}^{A_{1,1}^{(1)}} + \int_{A_{2,2}^{(2)}}^{B_2} + \sum_{j,m}\left(\int_{A_{j,1}^{(m)}}^{\tilde{\mu}_j^{(m)}} + \oint_{\tilde{\mu}_j^{(m)}} + \int_{\tilde{\mu}_j^{(m)}}^{A_{j,2}^{(m)}}\right) + \sum_j\int_{A_{j,2}^{(1,2)}}^{A_{j,1}^{(2,1)}} + \int_{\ell-i\infty}^{\ell+i\infty} = 2\pi i\sum_j \mathrm{Res}_{\tilde{\sigma}_j}\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(ge)}. \tag{30}$$

Поскольку $\lim\limits_{\tilde{s}\to\infty}\delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(ge)}(\tilde{s}) = 0$, то согласно лемме Жордана [26]

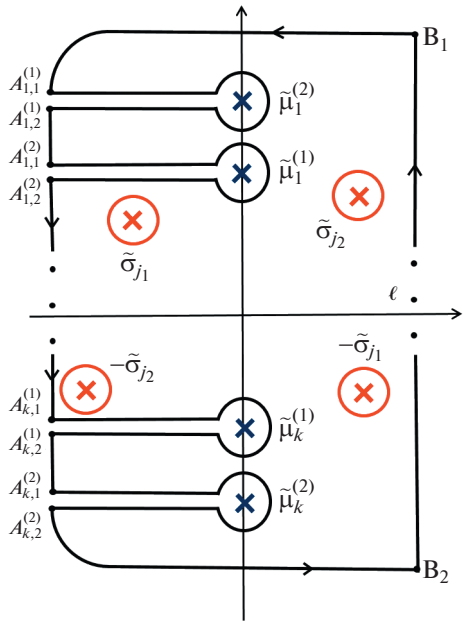


Рис. 2. Контур интегрирования.

$$\int_{B_1}^{A_{1,1}^{(1)}} + \int_{A_{2,2}^{(2)}}^{B_2} + \sum_j \int_{A_{j,2}^{(1,2)}}^{A_{j,1}^{(2,1)}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

При обходе точки $\tilde{\mu}_1$ будем считать, что верхний берег разреза $(A_{1,1}\tilde{\mu}_1^{(2)})$ соответствует аргументу $\varphi = 0$, т.е. положительная ветвь, а нижний $(\tilde{\mu}_1^{(2)}A_{1,2}^{(2)})$ аргументу $\varphi = 2\pi - \theta$, $\theta \to 0$, т.е. отрицательная ветвь. Далее, при обходе точки $\tilde{\mu}_1^{(1)}$ верхний берег разреза $A_{1,1}^{(1)}\tilde{\mu}_1^{(1)}$ соответствует отрицательной ветви, нижний $\tilde{\mu}_1^{(1)}A_{1,2}^{(1)}$ – положительной и т.д. (см. рис. 2).

При вычислении интеграла $\oint_{\tilde{\mu}_{1,2,3,4}^{(1),(2)}}$ удобно сделать замену переменных $\tilde{s} = \tilde{\mu}_{1,2,3,4}^{(1),(2)} + re^{i\varphi}$ при $r \to 0$, тогда подынтегральная функция $\sim r$ и, следовательно, $\oint_{\tilde{\mu}_{1,2,3,4}^{(1),(2)}} \to 0$.

При вычислении интегралов по берегам разрезов вокруг точки ветвления $\tilde{\mu}_i^{(m)}$ удобно сделать замену переменных $\tilde{s} = \tilde{\mu}_i^{(m)} - x$, где $x \to +\infty$. Для определенности будем считать, что на верхнем берегу разреза положительная ветвь функции, а на нижнем – отрицательная. В (23) для подынтегральной функции при $x \to +\infty$ справедливо, что она $\sim \exp(-x\tilde{t})/x^2$. Следовательно, интеграл набирается вблизи малых x. В этом случае подынтегральные функции на верхнем и нижнем берегах разреза одинаковы, поэтому сумма интегралов по ним ~ 0.

В итоге интеграл по контуру (см. рис. 2) сводится к сумме по следующим вычетам

$$\delta\tilde{v}_{z,1}^{(ge)}(t) = \sum_j \operatorname{Res}_{\tilde{\sigma}_j} \delta\hat{\tilde{v}}_{z,1}^{(ge)}. \tag{31}$$

В силу чрезмерной громоздкости аналитическая запись выражения (31) не приводится.

Подставляя в (19), полученные выражения для частного неоднородного решения (20) и общего однородного (31), получим итоговое значение для возмущения скорости. Величина амплитуды возмущения находится путем интегрирования скорости по времени. Для того, чтобы провести вычисление аналитически сделаем приближение близости плотности сред по обе стороны контактного разрыва.

3.2. Эволюция границы лед–газ

Поскольку плотности DT “льда” и DT газа близки, то $\Psi_2 \simeq 1$, тогда из (18) следует:

$$\tilde{\kappa}_{2,+} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\tilde{s}}\sqrt{\frac{\Delta}{\Gamma}\tilde{s}^4 + \left(\tilde{k}_{0y}^2 + \frac{1}{4}\right)\tilde{s}^2 + \tilde{k}_{0y}^2\Delta}, \tag{32}$$

$$C_{1,1}(\tilde{s}) = \frac{W(\tilde{s})\delta\tilde{\rho}_1(+0)}{2\sqrt{\frac{\Delta}{\Gamma}\tilde{s}^4 + \left(\tilde{k}_{0y}^2 + \frac{1}{4}\right)\tilde{s}^2 + \tilde{k}_{0y}^2\Delta}}, \tag{33}$$

$$W(\tilde{s}) = \frac{\left(-\frac{\tilde{s}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{\Gamma}\tilde{s}^4 + \left(\tilde{k}_{0y}^2 + \frac{1}{4}\right)\tilde{s}^2 + \tilde{k}_{0y}^2\Delta} - i\tilde{k}_{0z}\tilde{s}\right)\left(1 + i\tilde{k}_{0z} + i\frac{\Delta}{\Gamma}\frac{\tilde{s}^2}{\tilde{k}_{0z}}\right)\tilde{s}}{\frac{\Delta}{\Gamma}\tilde{s}^4 + \left(\tilde{k}_{0z}^2 + \tilde{k}_{0y}^2 - i\tilde{k}_{0z}\right)\tilde{s}^2 + \tilde{k}_{0y}^2\Delta} + \left(\frac{i}{\tilde{k}_{0z}}\frac{\Delta}{\Gamma} - 1\right)\delta\tilde{\rho}_1(+0). \tag{34}$$

При вычислении интеграла (23) рассмотрим контур, аналогичный представленному в разделе 3.1. Из (19) и (33) следует, что в рассматриваемом случае подынтегральная функция имеет полюса $\tilde{\sigma}_j$ $(j = 1,\ldots,6)$. Согласно (28), (29) и (32) получим, что вычеты, соответствующие этим полюсам, равны нулю.

Интегрирование по элементам контура аналогично, представленному в разделе 3.1. Отметим, что при обходе вокруг точек ветвления подынтегральная функция будет пропорциональна $\sqrt{r}$. Также при рассмотрении обхода по берегам разреза вокруг точек $\tilde{\mu}_j$ (верхний индекс не указываем, поскольку в исследуемом случае $\tilde{\mu}_j^{(1)} = \tilde{\mu}_j^{(2)}$) в силу наличия корневого множителя в знаменателе получим:

$$\int_{A_{j,1}}^{\tilde{\mu}_j} + \int_{\tilde{\mu}_1}^{A_{j,1}} = \frac{i\pi}{2t} \times$$
$$\times \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{\Gamma} + \frac{i}{\tilde{k}_{0z}}\frac{\Delta}{\Gamma}\left(\tilde{\mu}_j^2 + \frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{\Delta}{\Gamma} - \frac{1}{2}\right)e^{\tilde{\mu}_j \tilde{t}}}{\left(i\tilde{k}_{0z} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{\Delta}{\Gamma}\tilde{\mu}_j^2 + \frac{1}{2}\left(\tilde{k}_{0y}^2 + \frac{1}{4}\right)\right)}\tilde{\mu}_j\left(\tilde{\mu}_j^2 + \Delta\right)} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{\epsilon t}\right), \tag{35}$$

где $\epsilon \ll 1$. Поскольку $\Delta/\Gamma \simeq 1/2$, а функция ошибок Erf в (35) ограничена, получим, что $\int_{A_{1,1}}^{\tilde{\mu}_1} + \int_{\tilde{\mu}_1}^{A_{2,1}} \simeq 0$. Аналогичные рассуждения верны и для остальных точек ветвления.

В итоге из (20), (21) и (31) следует, что $\delta\tilde{v}_{z,1}(\tilde{t}) = \delta\tilde{v}_{z,1}^{(pe)}(\tilde{t})$ (см. (20)). Предполагая, что $\tilde{k}_R \gg \tilde{k}_I$, для случая малых времен получим следующее выражение:

$$\delta\tilde{v}_{z,1}(\tilde{t}) \simeq -\frac{\delta\tilde{\rho}_1(+0)}{\sqrt{\Delta}\sqrt{1 + \left(\tilde{k}_R/\tilde{k}_{0y}\right)^2}} \times$$
$$\times \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{1 + \left(\tilde{k}_R/\tilde{k}_{0y}\right)^2}} t\right). \tag{36}$$

Из данного выражения следует, что возмущение контактной границы в рассматриваемом случае представляет из себя гармонические колебания. В случае $\tilde{k}_{0y} \gg \tilde{k}_R$ выражение (36) заметно упрощается и зависит только от начальной амплитуды возмущения и параметра среды Γ.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Помимо теоретических исследований было проведено численное моделирование с использованием программного комплекса FRONT [27]. Характерная начальная постановка приведена на рис. 3. Оси расположены аналогично, представленным на рис. 1. Плотность DT-льда 0.0144 г/см^3, DT газа – 0.014 г/см^3. Толщина слоя "льда" h в рассматриваемой мишени ~100 мкм, поэтому возмущения, с длинами волн, малыми по сравнению с h, претерпевают значительное затухание. Также отметим, что аналитическое решение получено нами в приближении постоянства коэффициентов уравнения (13), следовательно, рассмотрим случаи $\lambda_z \sim \lambda_y$ и $\lambda_z \gg \lambda_y$. Направление осей соответствует представленному на рис. 1.

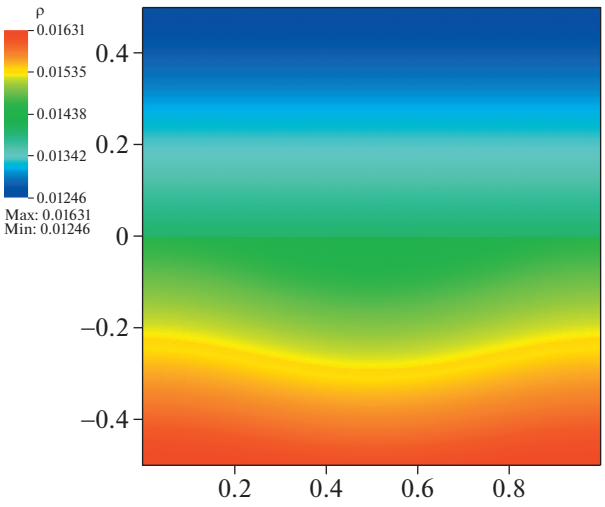


Рис. 3. Распределение плотности в начальный момент времени. Снизу ($y < 0$) DT "лед", сверху ($y > 0$) DT газ, амплитуда возмущения плотности льда 1%.

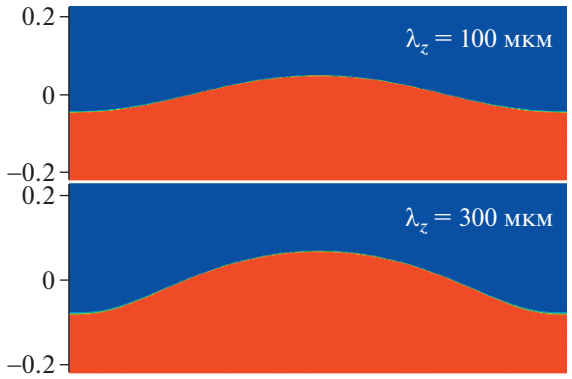


Рис. 4. Граница "лед"–газ на момент времени 10 нс в случае λ_y = 100 мкм. Величина ускорения – $5 \cdot 10^{13}$ м/с.

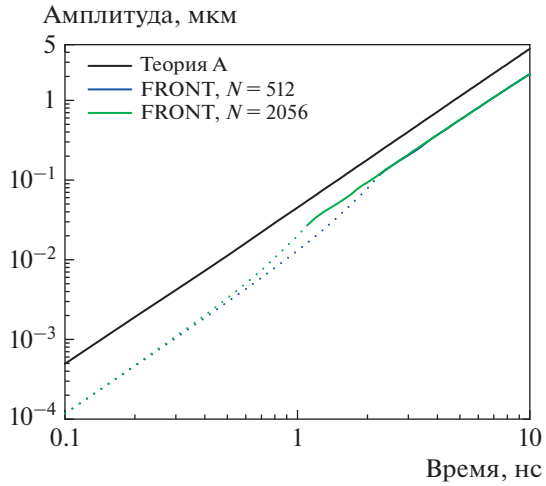


Рис. 5. Зависимость амплитуды возмущения от времени в случае ускорения 10^{13} м/с^2, $\lambda_y = 100$ мкм, $\lambda_z = 300$ мкм. Представлены результаты для различных значений сеточного разрешения (512 и 2056).

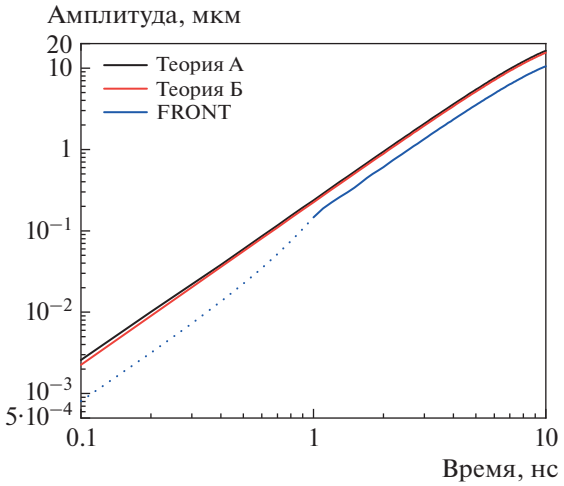


Рис. 6. Зависимость амплитуды возмущения от времени в случае ускорения $5 \cdot 10^{13}$ м/с^2, $\lambda_y = 100$ мкм, $\lambda_z = 300$ мкм. Теория А – вычислена по формуле (31), Теория Б – вычислена по формуле (36), FRONT – численный расчет.

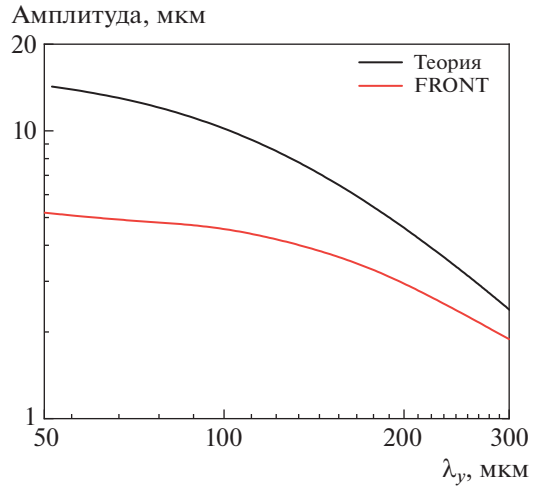


Рис. 7. Зависимость амплитуды возмущения от времени в случае ускорения $5 \cdot 10^{13}$ м/с^2, $\lambda_y = 100$ мкм, $\lambda_z = 100$ мкм.

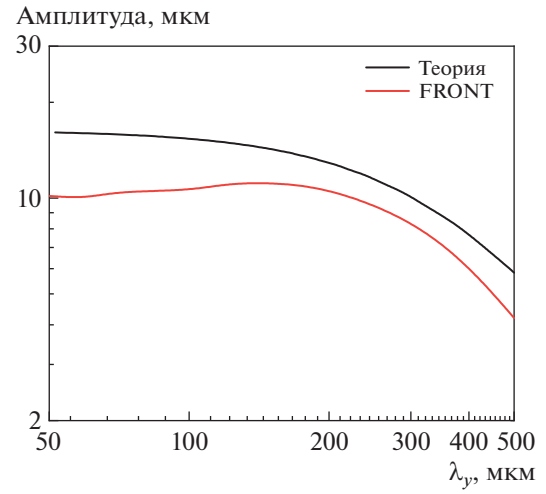


Рис. 8. Зависимость амплитуды возмущения от длины волны λ_y в случае ускорения $5 \cdot 10^{13}$ м/с^2, $\lambda_z =$ $= 300$ мкм.

На рис. 5 представлены зависимости амплитуды возмущения контактной границы от времени для значения ускорения 10^{13} м/с^2, $\lambda_z = 300$ мкм, $\lambda_y = 100$ мкм. Расчеты проводились с различным сеточным разрешением (512 и 2048 ячеек на 100 мкм). Из их сравнения следует, что достаточной степенью достоверности обладают результаты со значением амплитуды возмущения превышающим размер счетной ячейки (на рисунке соответствуют сплошной линии). Превышение аналитических значений над численными можно объяснить наличием несоответствия между начальными условиями в аналитических и численных исследованиях. При старте численного моделирования происходит быстрая подстройка начальных условий под рассматриваемую гидродинамическую систему. Этот процесс приводит к некоторому понижению начальной амплитуды возмущений. Этот факт подтверждается количественным совпадением скорости роста амплитуды.

На рис. 6 представлены зависимости амплитуды возмущения от времени для величины ускорения $5 \cdot 10^{13}$ м/с^2. Как следует из наших расчетов [28], данная величина ускорения характерна для системы, представленной в [22]. Рассмотренные

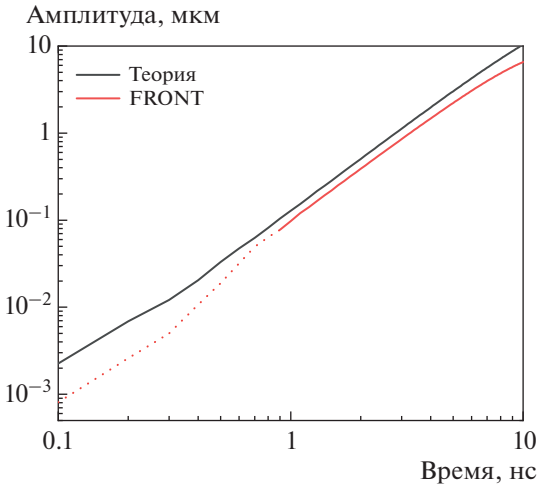


Рис. 9. Зависимость амплитуды возмущения от длины волны λ_y в случае ускорения $5 \cdot 10^{13}$ м/с^2, λ_z = = 100 мкм.

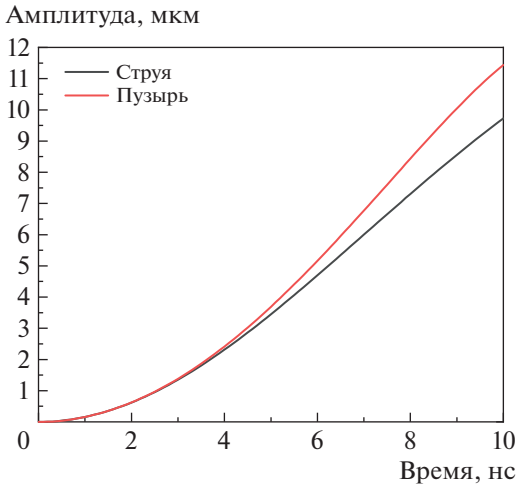


Рис. 10. Зависимость амплитуды возмущения для струи и пузыря от времени в случае ускорения $5 \cdot 10^{13}$ м/с^2, $\lambda_y = 100$, $\lambda_z = 300$ мкм.

параметры длин волн: $\lambda_z = 300$ и $\lambda_y = 100$ мкм. Для сравнения приведены результаты, полученные с использованием выражения (31) и его упрощенного варианта (36). Как и в случае значения ускорения 10^{13} м/с^2, аналитические результаты превышают численные, но скорость роста амплитуды совпадает. Небольшое расхождение на больших временах связано с влиянием нелинейных взаимодействий (см., например, [23]). На рис. 7 представлена аналогичная зависимость для случая $\lambda_z = 100$ мкм.

На рис. 8, 9 представлены зависимости амплитуды возмущения контактной границы от длины волны λ_y для случаев $\lambda_z = 100$, 300 мкм, соответственно. Из представленных зависимостей также следует, что чем больше λ_z, тем лучше согласие между численными и аналитическими результатами.

Аналогично результатам, представленным в [23], в рассматриваемой задаче наблюдается разнородный рост амплитуды струи “льда” в газ и пузыря газа в “лед”. На рис. 10 представлены зависимости амплитуды струи и пузыря от времени. Как показано в [23], величина скорости роста пузыря больше значения, полученного в линейном анализе, а струи – меньше. Поэтому при вычислении амплитуды возмущения контактной границы использовалось среднее значение амплитуд струи и пузыря.

В итоге, можно сделать вывод о том, что теоретические и численные результаты имеют удовлетворительное согласие. Также стоит отметить, что при проведении расчетов наблюдается некоторое паразитное размытие поля возмущений, что приводит к уменьшению конечной амплитуды искривления границы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена проблема неустойчивости ускоренно движущейся контактной границы двух сред при наличии объемной неоднородности плотности в одной из них. Данный тип неустойчивости похож на классическую неустойчивость Рэлея–Тейлора [19], поэтому в статье используется термин Рэлея–Тейлора–подобная неустойчивость. Отличие заключается в виде начальной затравки возмущения (искривление границы в случае неустойчивости РТ, возмущения плотности в рассматриваемом в данной работе случае). Из полученного нами выражения зависимости амплитуды возмущения от времени следует основное отличие от неустойчивости – искривление границы происходит независимо от соотношения плотностей контактирующих веществ.

Рассмотренная задача наиболее актуальна для систем ЛТС. Используя представленные результаты, можно оценить степень искривления границы газовой полости в мишенях ЛТС в зависимости от начальных данных шероховатости (амплитуда, длина волны). Было получено, что в случае $k_I \ll k_R$ зависимость амплитуды возмущения границы от времени – гармоническая функция, зависящая от Γ, k_R/k_{0y} и $\delta\rho_1(+0)$. Экспоненциальным ростом можно пренебречь на характерных временах сжатия ($\sim$10 нс).

Величины амплитуды искривления, полученные в численных расчетах, несколько уступают теоретическим значениям. Расхождение, во-пер-

вых, связано с особенностями численной постановки (быстрая подстройка начальной постановки под гидродинамическую систему). Во-вторых, с влиянием нелинейных взаимодействий, которые не учитывались при проведении теоретического анализа. Но все равно можно говорить о хорошем количественном и качественном согласии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. *Kline J. et al.* // Nucl. Fusion. 2019. V. 59. P. 112018.
2. *Abu-Shawared H. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2022. V. 129. P. 075001.
3. *Meezan N.B. et al.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59. P. 014021.
4. *Koch J.A. et al.* // Fusion Sci. Technol. 2001. V. 4. P. 55–66.
5. *Bel'kov et al.* // J. Exp. Theor. Phys. 2017. V. 124. P. 341–351.
6. *Bel'kov et al.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 025011.
7. *Clark D.S. et al.* // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. P. 052703.
8. *Clark D.S. et al.* // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. P. 056318.
9. *Smalyuk V.A. et al.* // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. P. 072704.
10. *Peterson J.R., Johnson B.M., Haan S.W.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 092705.
11. *Mikaelian K.O.* // Phys. Rev. Fluids. 2016. V. 1. P. 033601.
12. *Bulat P.V., Volkov K.N.* // Sci. Tech. J. Inf. Technol. Mech. Opt. 2016. V. 16 (3). P. 550–558.
13. *Luo X et al.* // Phys. Rev. E. 2016. V. 93. P. 013101.
14. *Zeng S., Takayama K.* // Acta Astronaut. 1996. V. 38 (11). P. 829–838.
15. *Zhou Y.* // Phys. Rep. 2017. V. 723–725. P. 1–160.
16. *Abarzhi S.I.* // Phil. Trans. R. Soc. A. 2010. V. 368 (1916). P. 1809–1828.
17. *Brouillette M.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 2002. V. 34 (1). P. 445–468.
18. *Taylor G.I.* // Proc. R. Soc. A. 1950. V. 201 (1065). P. 192–196.
19. *Rayleigh L.* // Proc. London Math. Soc. 1883. V. 14. P. 170–177.
20. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. 1987. New York: Pergamon.
21. *Haan S.W. et al.* // Phys. Plasmas. 2011. V. 18. P. 1001.
22. *Bel'kov S.A. et al.* // J. Exp. Theor. Phys. 2015. V. 121 (4). P. 686–698.
23. *Gorodnichev K.E. et al.* // Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 034101.
24. *Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.* Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems. 2001. London: Chapman and Hall.
25. *Doetsch G.* Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. 1974. Berlin: Springer.
26. *Brown J.W., Churchill R.V.* Complex Variables and Applications (7th ed.). 2004. New York: McGraw Hill.
27. *Glazyrin, S. I.* // Astron. Lett. 2013. V. 39. P. 221–226.
28. *Gorodnichev K.E. et al.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1686 (1). P. 012025.

Influence of Density Perturbations on the Stability of the Inner Ice Boundary in Ice Targets

K. E. Gorodnichev[1], *, S. I. Glazyrin[1], D. K. Ilnitsky[1], and S. E. Kuratov[1]

[1]*Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, 127055 Russia*

**e-mail: cyrgo85@gmail.com*

Received September 21, 2022; revised September 27, 2022; accepted October 5, 2022

Abstract—The inertial confinement fusion has not been achieved yet. The reasons for this phenomenon are not fully understood. In our opinion, the main factor influencing the decrease in the yield is the evolution of hydrodynamic instabilities due to geometric inhomogeneities (surface roughness, the presence of asymmetric elements etc.). The perturbed density field can result from these inhomogeneities. The results of a theoretical study of the influence of density perturbations on the stability of the boundary under accelerated motion are presented in this paper. The performed numerical simulations are compared with theoretical results.

Keywords: hydrodynamic instability, ICF, density inhomogeneities, accelerated motion, contact discontinuity instability