

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

---

И.Г. Меринов, Ю.А. Маслов, М.В. Баясхаланов

Моделирование  
теплогидравлических процессов  
в реакторных установках  
и элементах теплообменного  
оборудования ЯЭУ

*Допущено Федеральным учебно-методическим  
объединением в системе высшего образования  
по УГСН 14.00.00 «Ядерная энергетика и технологии»  
в качестве учебного пособия для студентов высших  
учебных заведений, обучающихся по направлениям 14.04.02  
«Ядерная физика и технологии» и 14.03.01  
«Ядерная энергетика и теплофизика»*

Москва 2022

УДК 621.039.51  
ББК 31.46  
М 31

Меринов И.Г., Маслов Ю.А., Баясхаланов М.В. **Моделирование теплогидравлических процессов в реакторных установках и элементах теплообменного оборудования ЯЭУ: Учебное пособие** [Электронный ресурс]. М.: НИЯУ МИФИ, 2022. – 148 с.

Пособие предназначено для самостоятельной работы и проведения лабораторных занятий у студентов, обучающихся по специальности «Атомные станции: проектирование, эксплуатация и инжиниринг» и по направлениям «Ядерная физика и технологии» и «Ядерная энергетика и теплофизика». Пособие может использоваться для курсов, посвященных вопросам численного моделирования теплогидравлических процессов в реакторных установках и элементах теплообменного оборудования ЯЭУ и другого технологического оборудования, а также при выполнении курсового проектирования. В нем описаны лабораторные работы, выполняемые студентами при изучении курсов «Компьютерный практикум: вычислительная теплофизика» (разд. 1, 2) и «Методы исследования нестационарных тепловых процессов» (разд. 3, 4).

*Рецензент доц., канд. техн. наук К.В. Куценко*

ISBN 978-5-7262-2744-3

© Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ», 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	6
1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПРИБЛИЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ.....	7
1.1. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ.....	8
1.1.1. Основные понятия теории разностных схем.....	8
1.1.2. Одношаговые разностные схемы решения задачи Коши для ОДУ .....	10
1.1.3. Многошаговые методы решения задачи Коши для ОДУ .....	13
1.1.4. Выбор шага интегрирования и оценка погрешности численного решения .....	18
1.1.5. Многозначные методы решения задачи Коши для ОДУ .....	20
1.1.6. Методы решения задачи Коши для системы ОДУ .....	29
1.2. Описание программы Ody_lab численного решения задачи Коши для ОДУ .....	30
1.2.1. Особенности программы .....	30
1.2.2. Интерфейс программы .....	31
1.3. Описание программы SystemOdy_lab численного решения задачи Коши для системы ОДУ .....	33
1.3.1. Особенности программы .....	33
1.3.2. Интерфейс программы .....	34
1.4. Варианты лабораторных работ .....	36
1.4.1. Исследование сходимости методов разностного решения ОДУ .....	36
1.4.2. Исследование устойчивости методов разностного решения ОДУ .....	37
1.4.3. Оценка погрешности методов разностного решения ОДУ .....	38
1.4.4. Численное решение системы ОДУ. Теплообмен двух тел .....	39
1.4.5. Теплообмен двух тел. Исследование устойчивости методов разностного решения систем ОДУ .....	40
1.5. Контрольные вопросы .....	40

2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА.....	42
2.1. Основные понятия теории разностных схем.....	42
2.1.1. Разностная схема и разностное решение.....	42
2.1.2. Сходимость, аппроксимация и устойчивость разностной схемы.....	47
2.2. Явная и неявная разностные схемы.....	50
2.3. Монотонность разностных схем.....	53
2.4. Интегроинтерполяционный метод (метод баланса) построения разностных схем.....	55
2.4.1. Свойство консервативности разностной схемы.....	55
2.4.2. Метод баланса.....	56
2.5. Метод прогонки.....	62
2.6. Решение нелинейных задач.....	63
2.6.1. Метод простой итерации.....	65
2.6.2. Метод Ньютона.....	66
2.7. Описание программы ТВЭЛ.....	67
2.7.1. Особенности программы.....	68
2.7.2. Интерфейс программы.....	69
2.8. Варианты лабораторных работ.....	73
2.8.1. Двухмерное стационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе.....	73
2.8.2. Двухмерное нестационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе.....	74
2.9. Контрольные вопросы.....	74
3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА.....	76
3.1. Основные положения метода конечных элементов.....	76
3.2. Программа FlexPDE для решения систем дифференциальных уравнений методом конечных элементов.....	80
3.2.1. Особенности программы.....	80
3.2.2. Интерфейс программы.....	82
3.3. Варианты лабораторных работ.....	103
3.3.1. Стационарное поле температур в поперечном сечении стержневого тепловыделяющего элемента.....	103

3.3.2. Трехмерное стационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе.....	104
3.3.3. Трехмерное нестационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе.....	105
3.3.4. Двухмерное стационарное поле скоростей при течении несжимаемой вязкой жидкости в прямоугольном канале.....	106
3.3.5. Трехмерные стационарные поля температур и скоростей теплоносителя в тепловыделяющей сборке ВВЭР.....	108
3.4 Контрольные вопросы .....	110
<b>4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕПЛОВЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АКТИВНОЙ ЗОНЕ РЕАКТОРОВ ТИПА ВВЭР .....</b>	<b>112</b>
4.1. Математическая модель .....	112
4.1.1. Основные уравнения модели теплогидравлики активной зоны в приближении пористого тела .....	112
4.1.2. Замыкающие соотношения модели теплогидравлики активной зоны .....	116
4.2. Программная реализация модели трехмерных тепловых и гидродинамических процессов в активной зоне реактора .....	127
4.2.1. Алгоритм численного решения уравнений теплогидравлики .....	127
4.2.2. Описание программного модуля ТРЕТОН.....	132
4.3. Варианты лабораторных работ .....	139
4.3.1. Номинальный режим работы реактора ВВЭР.....	139
4.3.2. Режимы работы ВВЭР на повышенной мощности.....	140
4.3.3. Режимы работы ВВЭР с пониженным уровнем расхода теплоносителя.....	141
4.3.4. Режимы работы ВВЭР при блокировке проходного сечения ТВС .....	143
4.4. Контрольные вопросы .....	144
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКОВ .....</b>	<b>145</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие включает краткие теоретические положения по методам численного моделирования процессов тепломасспереноса, описание используемых программ, примеры заданий для выполнения лабораторных работ и контрольные вопросы по темам.

Оно содержит разделы: «Численное моделирование процессов тепломассопереноса в приближении сосредоточенных параметров», «Конечно-разностные методы решения задач теплообмена», «Применение метода конечных элементов для численного моделирования процессов тепломассопереноса», «Моделирование трехмерных тепловых и гидродинамических процессов в активной зоне ВВЭР-1000».

Часть описанных в практикуме программных средств (разд. 1, 2) специально разработана авторами для учебных целей, другие являются адаптированными версиями программ, используемых в научно-исследовательских работах (разд. 4). Описанный в разд. 3 программный комплекс – зарубежный комплекс общего назначения, и применим для широкого класса задач тепломассопереноса.

## 1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПРИБЛИЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Полные математические модели процессов теплообмена, протекающих в различных устройствах, учитывают неравномерность пространственно-временных полей искомых величин – температур твердых тел и жидкостей, тепловых потоков, интенсивностей излучения и др. Эти модели представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Однако для многих технических устройств непосредственная реализация полных математических моделей затруднительна даже с применением современных ЭВМ из-за сложной структуры устройств и большого числа входящих в них элементов. Для анализа поведения таких систем применяется метод поэтапного моделирования, предполагающий последовательное использование более простых моделей, описывающих всю систему и отдельные ее части с разной степенью детализации. Часто также встречаются ситуации, когда полную модель протекающих в рассматриваемой системе процессов нельзя использовать из-за недостатка информации об этих процессах. Наконец, решение многих технических задач просто не требует знания детальной информации о пространственных распределениях искомых величин, что позволяет ввести упрощения в полную модель и ответить на интересующие вопросы более быстрым и дешевым путем.

Все это делает весьма актуальным рассмотрение упрощенных моделей, позволяющих рассчитывать интегральные характеристики процессов теплообмена и описываемых системами алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие модели обычно называют *моделями с сосредоточенными параметрами*, отделяя их тем самым от моделей с распределенными параметрами, которые учитывают пространственные распределения физических величин.

Расчет нестационарного теплового режима по моделям с сосредоточенными параметрами сводится к решению систем уравнений

теплового баланса с начальными условиями, т.е. к решению задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Используемые при таких расчетах методы численного решения сначала рассмотрим применительно к задаче Коши для одного уравнения вида

$$\frac{dT}{dt} = f(t, T), \quad 0 < t < t_{\max} \quad (1.1)$$

с начальным условием  $T(0) = T_0$ . Здесь  $T$  – искомая величина;  $t$  – независимая переменная. В задачах теплообмена в качестве независимой переменной обычно рассматривают время процесса.

Описанные далее методы численного решения для уравнения (1.1) легко обобщаются на случай системы ОДУ.

## 1.1. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ

### 1.1.1. Основные понятия теории разностных схем

При численном решении вместо определения непрерывной функции  $T(t)$ , удовлетворяющей исходному дифференциальному уравнению (1.1), ищется дискретное множество значений  $T_i$  в точках  $t_i$ , на которые разбивается непрерывная область изменения независимой переменной  $t$ . Значения  $t_i$  независимой переменной называются *узлами расчетной сетки*, а множество значений  $T_i = T(t_i)$  – *сеточной функцией точного решения*.

Вместо  $T_i$  при численном решении получают их приближенные значения  $u_i$ , которые называются *сеточной функцией разностного решения*, или просто *разностным решением*. Для их определения рассматривается некоторая система алгебраических уравнений относительно искомого  $u_i$ , которая называется *разностной схемой*.

Величина  $\varepsilon_i = T_i - u_i$  определяет погрешность разностного решения. Условие  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\varepsilon_i| = 0$  называется *условием сходимости раз-*

ностной схемы. Здесь  $\Delta t$  – шаг изменения независимой переменной.

Сеточная функция точного решения не является решением разностной схемы, поэтому при ее подстановке в разностную схему возникает невязка  $\psi_i$  между значениями правой и левой частей уравнения, которая называется *погрешностью аппроксимации исходного дифференциального уравнения разностным уравнением*. Для выбранной разностной схемы невязка  $\psi_i$  зависит от величины шага изменения независимой переменной  $\Delta t$ . Если при измельчении шага  $\Delta t$  выполняется условие  $|\psi_i| \leq A\Delta t^p$  для всех  $\Delta t$ , меньших некоторого заданного  $\Delta t_1$ , то разностная схема аппроксимирует исходное уравнение с порядком  $p$ , или порядок аппроксимации разностной схемы равен  $p$ . Здесь  $A$  – постоянный коэффициент.

Погрешность аппроксимации  $\psi_i$  характеризует различие между исходным дифференциальным уравнением и разностной схемой. Близость уравнений не всегда гарантирует близость решений. Начиная расчет с точно известного начального значения искомой функции, уже после первого шага мы получаем ее приближенное значение. Погрешность решения на первом шаге  $\varepsilon_1$  зависит от погрешности аппроксимации  $\psi_1$ . На последующих шагах погрешность решения зависит уже не только от  $\psi_i$ , но и от погрешности решения на предыдущем шаге  $\varepsilon_{i-1}$ . Взаимодействие погрешности аппроксимации  $\psi_i$  и погрешности разностного решения  $\varepsilon_i$  в процессе численного расчета для некоторых разностных схем приводит к резкому росту  $\varepsilon_i$ . Это явление неустойчивости разностного решения.

Определим понятие устойчивости разностной схемы как сохранение в процессе расчета ограниченной величины погрешности разностного решения:  $|\varepsilon_i| \leq C$ ,  $C$  – константа для всех  $t_i$ . Если условие устойчивости выполняется при любых шагах изменения независимой переменной, то говорят об абсолютной устойчивости. В случае выполнения условия только для  $\Delta t$ , меньших некоторого заданного значения  $\Delta t_1$ , имеет место условная устойчивость.

Сходимость, аппроксимация и устойчивость – фундаментальные понятия теории разностных схем. Их взаимосвязь определяется теоремой:

*«Выполнение условий аппроксимации и устойчивости разностной схемы необходимо и достаточно для сходимости разностного решения к точному».*

По способу получения искомой величины  $u_i$  из разностной схемы их можно разбить на два класса явных и неявных разностных схем. Если неизвестное значение  $u_i$  непосредственно выражается через известные значения в виде формулы, то разностная схема называется *явной*. В противном случае разностная схема называется *неявной*. Явные схемы требуют гораздо меньших затрат на выполнение одного шага, но накладывают ограничения на величину шага по условию устойчивости, т.е. являются *условно устойчивыми*. Неявные схемы более трудоемки, но накладывают более слабые ограничения на величину шага. Часто они являются *абсолютно устойчивыми*.

Рассмотрим более подробно некоторые семейства разностных схем. Для их получения проинтегрируем исходное уравнение (1.1) на отрезке изменения независимой переменной с  $t_i$  до  $t_{i+1}$ . Получим

$$T_{i+1} - T_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, T) dt = I_{i, i+1}. \quad (1.2)$$

Разностные схемы можно получить, заменяя точное значение интеграла  $I_{i, i+1}$  его приближенным значением. При этом в зависимости от используемого подхода к расчету интеграла могут быть получены два разных класса разностных схем: *одношаговые* и *многшаговые*.

### ***1.1.2. Одношаговые разностные схемы решения задачи Коши для ОДУ***

При получении одношаговых разностных схем для расчета интеграла  $I_{i, i+1}$  используются квадратурные формулы, в которых функция  $f(t, T)$  вычисляется в нескольких точках отрезка  $[t_i, t_{i+1}]$ . Порядок аппроксимации схемы зависит от числа этих точек.

Приближенные значения функции  $f(t, T)$  в промежуточных точках вычисляются последовательно по мере движения по отрезку  $[t_i, t_{i+1}]$ . Так как функция  $f(t, T)$  равна производной от решения  $T(t)$ , приближения для разностного решения  $u$  строятся на основе значений его производной  $f(t, T)$ . Первое промежуточное значение  $u_1$  в первой промежуточной точке  $t_1$  отрезка  $[t_i, t_{i+1}]$  вычисляется через значение функции  $f(t_i, u_i)$ . Затем оно используется для расчета значения функции  $f(t_1, u_1)$ , которое совместно с  $f(t_i, u_i)$  используется при определении решения в следующей промежуточной точке.

В окончательной формуле приближение для функции  $f(t, u)$  в определенной точке выражается через приближения в предыдущих точках, т.е., в конечном счете, через значение  $f(t_i, u_i)$ . Такие разностные схемы называются *одношаговыми*, так как в них для определения разностного решения  $u_{i+1}$  в момент времени  $t_{i+1}$  необходимо знать только разностное решение в предыдущий момент времени  $t_i$ .

Рассмотрим некоторые варианты одношаговых разностных схем.

**Схема Эйлера.** Схема Эйлера является простейшей одношаговой разностной схемой. В ней для расчета интеграла  $I_{i, i+1}$  используется только значение функции  $f(t, u)$  в начале отрезка  $[t_i, t_{i+1}]$ :

$$I_{i, i+1} \approx \Delta t_i \cdot f(t_i, u_i). \quad (1.3)$$

Здесь  $\Delta t_i$  – шаг изменения независимой переменной,  $\Delta t_i = (t_{i+1} - t_i)$ .

Подставляя выражение (1.3) в уравнение (1.2), получим разностную схему Эйлера:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t_i \cdot f(t_i, u_i). \quad (1.4)$$

Определение интеграла по значению функции в одной точке отрезка является достаточно грубым, поэтому схема Эйлера имеет только первый порядок аппроксимации.

**Исправленный метод Эйлера.** Точность расчета интеграла  $I_{i, i+1}$  можно повысить, добавив еще одну расчетную точку. Сначала получим с помощью схемы Эйлера приближенное значение ре-

шения  $\tilde{u}_{i+1} = u_i + \Delta t_i \cdot f(t_i, u_i)$  в конечной точке рассматриваемого отрезка. Используя это значение, получим приближенное значение функции  $f(t_{i+1}, \tilde{u}_{i+1})$  в конце отрезка. Приближенное значение интеграла получается по формуле трапеций:

$$\begin{aligned} I_{i, i+1} &\approx 0,5\Delta t_i (f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, \tilde{u}_{i+1})) = \\ &= 0,5\Delta t_i (f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_i + \Delta t_i f(t_i, u_i))) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя выражение (1.5) в уравнение (1.2), получим разностную схему исправленного метода Эйлера:

$$u_{i+1} = u_i + 0,5\Delta t_i (f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_i + \Delta t_i f(t_i, u_i))). \quad (1.6)$$

Схема имеет второй порядок аппроксимации.

**Модифицированный метод Эйлера.** После определения по схеме Эйлера приближенного значения решения  $\tilde{u}_{i+1}$  для расчета интеграла можно использовать метод прямоугольников:

$$\begin{aligned} I_{i, i+1} &\approx \Delta t_i (f(t_i + t_{i+1}) / 2, (u_i + \tilde{u}_{i+1}) / 2) = \\ &= \Delta t_i (f(t_i + 0,5\Delta t_i, u_i + 0,5\Delta t_i f(t_i, u_i))). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставляя выражение (1.7) в уравнение (1.2), получим разностную схему модифицированного метода Эйлера:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t_i (f(t_i + 0,5\Delta t_i, u_i + 0,5\Delta t_i f(t_i, u_i))). \quad (1.8)$$

Как и для исправленного метода Эйлера, схема модифицированного метода Эйлера имеет второй порядок аппроксимации.

**Метод Рунге–Кутты.** В общем случае интеграл  $I_{i, i+1}$  определяется с помощью  $n$  точек на интервале  $[t_i, t_{i+1}]$ . Первая точка совпадает  $t_i$ , а остальные располагаются оптимальным образом, с точки зрения получения при заданном  $n$  наивысшего порядка аппроксимации.

Наиболее широко используется схема с четырьмя точками, в которой расчет интеграла  $I_{i, i+1}$  производится по формуле Симпсона:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t_i (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) / 6, \quad (1.9)$$

где  $f_1 = f(t_i, u_i)$ ,  $f_2 = f(t_i + \Delta t_i/2, u_i + \Delta t_i f_1/2)$ ,  $f_3 = f(t_i + \Delta t_i/2, u_i + \Delta t_i f_2/2)$ ,  $f_4 = f(t_i + \Delta t_i, u_i + \Delta t_i f_3)$ .

Эта схема называется *схемой Рунге–Кутты* и имеет 4-й порядок аппроксимации.

Все рассмотренные схемы являются явными и обладают условной устойчивостью.

### 1.1.3. Многошаговые методы решения задачи Коши для ОДУ

Для оценки интеграла  $I_{i,i+1}$  можно использовать информацию об изменении функции  $f(t, u)$  в предыдущие моменты времени. На основе значений  $f(t, u)$  в точках  $t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-k+1}$  построим интерполяционный полином, совпадающий в этих точках с  $f(t_i, u_i), f(t_{i-1}, u_{i-1}), \dots, f(t_{i-k+1}, u_{i-k+1})$ . Прозекстраполируем полином на отрезок  $[t_i, t_{i+1}]$  и найдем аналитическое выражение для интеграла  $I_{i,i+1}$ . Подставив его в уравнение (1.2), получим разностную схему вида

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \sum_{n=1}^k \beta_n f(t_{i-n+1}, u_{i-n+1}), \quad (1.10)$$

где  $\beta_n$  – постоянные коэффициенты, зависящие от числа использованных для интерполяции точек  $k$ ;  $\Delta t$  – шаг изменения независимой переменной<sup>1</sup>.

Разностные схемы вида (1.10) называются *явными схемами Адамса*. Порядок аппроксимации явных схем Адамса равен числу использованных для интерполяции точек  $k$ .

Аналогично можно получить неявные схемы Адамса. Для этого необходимо, чтобы при построении интерполяционного полинома рассматривалась также точка  $t_{i+1}$ . В общем виде неявные схемы

---

<sup>1</sup> При построении многошаговых разностных схем с целью упрощения получаемых формул обычно рассматривается случай постоянного шага изменения независимой переменной.

Адамса отличаются от явных только начальной точкой при суммировании:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \sum_{n=0}^k \beta_n f(t_{i-n+1}, u_{i-n+1}). \quad (1.11)$$

Порядок аппроксимации неявных схем Адамса равен  $k + 1$ .

При сравнении одно- и многошаговых разностных схем можно отметить, что:

1) с точки зрения условий устойчивости явные многошаговые разностные схемы не имеют преимуществ по сравнению с явными одношаговыми схемами (неявные многошаговые схемы абсолютно устойчивы только, если их порядок аппроксимации не выше второго);

2) одношаговые схемы требуют больших вычислительных затрат на один шаг, так как промежуточные значения функции  $f(t, u)$  не используются на следующем шаге, а пересчитываются заново; в многошаговых разностных схемах при любом порядке аппроксимации требуется пересчитывать только значение в самой удаленной точке  $f(t_{i-k+1}, u_{i-k+1})$ , заменяя его на значение  $f(t_i, u_i)$  или  $f(t_{i+1}, u_{i+1})$  для явной и неявной схемы, соответственно;

3) в то же время многошаговые схемы не являются самостартующими, так как требуют для начала расчета определения значений  $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}^1$  (это затрудняет изменение шага независимой переменной в процессе расчета).

В качестве примера рассмотрим явные и неявные схемы Адамса 2-го и 4-го порядков.

**Явная схема Адамса 2-го порядка.** Построим полином первого порядка  $A(t) = a_0 + a_1 t$ , совпадающий с функцией  $f(t, u)$  в точках  $t_{i-1}$  и  $t_i$ . Коэффициенты полинома определим из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t_{i-1} &= f(t_{i-1}, u_{i-1}) \equiv f_{i-1}; \\ a_0 + a_1 t_i &= f(t_i, u_i) \equiv f_i. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Получим  $a_0 = f_i - a_1 t_i$ ,  $a_1 = (f_i - f_{i-1}) / \Delta t$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 I_{i,j+1} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_0 + a_1 t) dt = \\
 &= a_0 \Delta t + a_1 (t_{i+1}^2 - t_i^2) / 2 = (3f_i - f_{i-1}) \Delta t / 2.
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Явная схема Адамса 2-го порядка будет иметь вид

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t (3f(t_i, u_i) - f(t_{i-1}, u_{i-1})) / 2. \tag{1.14}$$

**Неявная схема Адамса 2-го порядка.** Аналогично случаю явной схемы Адамса построим полином первого порядка  $A(t) = a_0 + a_1 t$ , совпадающий с функцией  $f(t, u)$  в точках  $t_i$  и  $t_{i+1}$ . Коэффициенты полинома определим из решения системы уравнений

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1 t_i &= f(t_i, u_i) \equiv f_i; \\
 a_0 + a_1 t_{i+1} &= f(t_{i+1}, u_{i+1}) \equiv f_{i+1}.
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Получим  $a_0 = f_i - a_1 t_i$ ,  $a_1 = (f_{i+1} - f_i) / \Delta t$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 I_{i,j+1} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_0 + a_1 t) dt = \\
 &= a_0 \Delta t + a_1 (t_{i+1}^2 - t_i^2) / 2 = (f_{i+1} + f_i) \Delta t / 2.
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Неявная схема Адамса 2-го порядка будет иметь вид

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t (f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})) / 2. \tag{1.17}$$

**Схемы Адамса 4-го порядка аппроксимации.** Используя при определении интерполяционного полинома значения функции  $f(t, u)$  в четырех точках, можно аналогично получить явную:

$$\begin{aligned}
 u_{i+1} &= u_i + \Delta t (55f(t_i, u_i) - 59f(t_{i-1}, u_{i-1}) + \\
 &+ 37f(t_{i-2}, u_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, u_{i-3})) / 24
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

и неявную схему Адамса 4-го порядка:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t(9f(t_{i+1}, u_{i+1}) + 19f(t_i, u_i) - 5f(t_{i-1}, u_{i-1}) + f(t_{i-2}, u_{i-2})) / 24. \quad (1.19)$$

**Особенности реализации неявных многошаговых разностных схем.** Перепишем неявную схему (1.11) в виде

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\beta_0 f(t_{i+1}, u_{i+1}) + g_i(u_{i-n+1}, \dots, u_i). \quad (1.20)$$

В выражении (1.20) функция  $g_i$  является известной. Для решения полученного нелинейного относительно  $u_{i+1}$  алгебраического уравнения используют два метода:

- метод простой итерации;
- метод Ньютона.

В методе простой итерации для искомого значения  $u_{i+1}$  сначала определяется начальное приближение  $u_{i+1}^0$ , которое обычно получают с помощью явной многошаговой схемы. Уточненные значения  $u_{i+1}$  находятся итерационно:

$$u_{i+1}^s = u_i + \Delta t\beta_0 f(t_{i+1}, u_{i+1}^{s-1}) + g_i(u_{i-n+1}, \dots, u_i). \quad (1.21)$$

Здесь  $s$  – номер итерации.

Рассмотренная процедура называется *методом прогноза-коррекции*, или *методом предиктор-корректор*. При реализации метода на каждом шаге можно выполнять либо фиксированное число итераций, либо проводить их до достижения заданной точности определения  $u_{i+1}$ , т.е. пока разница между значениями  $u_{i+1}^{s-1}$  и  $u_{i+1}^s$  не станет меньше заданной погрешности.

В ранних реализациях метода обычно использовали подход с выполнением итераций до совпадения соседних итерационных приближений искомой величины с машинной точностью. Однако даже в случае полной сходимости, полученное значение является только приближенным значением  $u_{i+1}$ , а не точным значением функции  $T(t_{i+1})$ , поэтому такая точность определения  $u_{i+1}$  избыточна.

В настоящее время в методе прогноза-коррекции используют фиксированное количество итераций, обычно не более двух. Такой подход эффективен для большинства задач, но обладает одним крупным недостатком. При фиксированном числе итераций  $m$  метод прогноза-коррекции является явным, так как конечное наилучшее приближение искомой функции  $u_{i+1}^m$  можно выразить по явной формуле через известные величины. Поэтому метод уже не обладает абсолютной устойчивостью.

В случае сильной нелинейности функции  $f(t, u)$ , или при решении так называемых жестких<sup>1</sup> систем уравнений, метод прогноза-коррекции не работает и используется метод Ньютона.

Перепишем выражение (1.20) в виде уравнения  $F(u) = 0$ :

$$0 = F(u) \equiv u - u_i - \Delta t \beta_0 f(t_{i+1}, u) - g_i(u_{i-n+1}, \dots, u_i), \quad (1.22)$$

тогда итерационный процесс по методу Ньютона организуется следующим образом:

$$u_{i+1}^{s+1} = u_{i+1}^s - F(u_{i+1}^s) / F'(u_{i+1}^s). \quad (1.23)$$

Здесь  $F'(u) = 1 - \Delta t \beta_0 \frac{\partial f(t_{i+1}, u)}{\partial u}$ . Начальное приближение  $u_{i+1}^0$ , как

и методе прогноза-коррекции, определяется с помощью явной многошаговой схемы.

Сходимость метода Ньютона и количество необходимых итераций зависит от начального приближения в отличие от метода прогноза-коррекции, для которого сходимость итераций определяется величиной шага изменения независимой переменной. Точность начального приближения при этом зависит от шага изменения  $t$ .

---

<sup>1</sup> Строгое определение жесткости требует достаточно детального описания. Будем считать жесткой систему уравнений, моделирующую процессы с сильно отличающимися характерными временами. При решении таких систем с целью определения поведения медленно протекающих процессов приходится использовать шаги интегрирования, намного превышающие характерные времена для других рассматриваемых процессов.

Для реализации метода Ньютона требуется гораздо больше усилий, чем в случае метода прогноза-коррекции, но для жестких систем уравнений ему практически нет альтернативы.

#### **1.1.4. Выбор шага интегрирования и оценка погрешности численного решения**

Обычно при реализации численных схем решения ОДУ предусматривают автоматический выбор величины шага интегрирования. Этот выбор основывается на оценке локальной погрешности численного решения на одном шаге интегрирования, т.е. оценка погрешности величины  $u_{i+1}$  в точке  $t_{i+1}$  выполняется в предположении, что в начале интегрирования в  $t_i$  значение искомой функции известно точно.

**Одношаговые разностные схемы.** При использовании одношаговых разностных схем для вычисления локальной погрешности  $\varepsilon_{i+1}$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  искомая величина  $u_{i+1}$  определяется по одной и той же схеме с шагом  $\Delta t_1 = (t_{i+1} - t_i)$  и шагом  $\Delta t_2 = \Delta t_1/2$ . Оценка для локальной погрешности при меньшем шаге может быть получена по формуле

$$\varepsilon_{i+1}^{\Delta t_2} = \left| u_{i+1}^{\Delta t_2} - u_{i+1}^{\Delta t_1} \right| / (2^p - 1). \quad (1.24)$$

Здесь  $u_{i+1}^{\Delta t_2}$ ,  $u_{i+1}^{\Delta t_1}$  – значения искомой функции, рассчитанные с шагом  $\Delta t_2$  и  $\Delta t_1$ , соответственно;  $p$  – порядок аппроксимации разностной схемы.

Оценка вида (1.24) справедлива при использовании не только одношаговых, но любых других разностных схем.

При автоматическом выборе шага задают максимальное и минимальное допустимые значения погрешности  $\varepsilon_{\max}$  и  $\varepsilon_{\min}$  ( $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_{\min}$ ). Если оценка локальной погрешности  $\varepsilon_{i+1}$  лежит в пределах заданных допустимых значений, то шаг интегрирования  $\Delta t$  на следующем шаге не меняется. Если  $\varepsilon_{i+1} > \varepsilon_{\max}$ , то расчет повторяется от точки  $t_i$  с половинным шагом. В случае  $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_{\min}$  следующий шаг выполняется с удвоенным шагом.

**Многошаговые разностные схемы.** В случае использования метода прогноза-коррекции для неявных многошаговых разностных схем оценка локальной погрешности может быть получена с помощью вычисляемых при реализации схемы значений искомой функции на этапах прогноза и коррекции и не требует дополнительных расчетов. Это справедливо при использовании схем одного порядка аппроксимации на обоих этапах.

Действительно, если порядок аппроксимации схем равен  $p$ , то можно выразить точное значение искомой функции  $T_{i+1} = T(t_{i+1})$  на этапах прогноза и коррекции по формулам (1.25) и (1.26), соответственно:

$$T_{i+1} = u_{i+1}^0 + A\Delta t^{p+1} \frac{d^{p+1}T(\xi)}{dt^{p+1}}, \quad (1.25)$$

$$T_{i+1} = u_{i+1}^s + B\Delta t^{p+1} \frac{d^{p+1}T(\eta)}{dt^{p+1}}. \quad (1.26)$$

Здесь  $A$  и  $B$  – постоянные коэффициенты, известные из сопоставления разностной схемы и разложения в ряд Тейлора;  $\xi$ ,  $\eta$  – неизвестные промежуточные точки отрезка  $[t_i, t_{i+1}]$ , в которых выполняется расчет  $p+1$  производной. Считая, что  $p+1$  производная примерно постоянна на рассматриваемом отрезке интегрирования, из системы (1.25) и (1.26) можно получить

$$T_{i+1} \approx u_{i+1}^s + \frac{B}{B-A}(u_{i+1}^0 - u_{i+1}^s). \quad (1.27)$$

Второй член в правой части выражения (1.27) является оценкой локальной погрешности для метода прогноза-коррекции.

**Оценка полной погрешности.** Локальная погрешность не учитывает накопления погрешности в ходе всего расчета. Фактическая погрешность решения неизвестна, но при устойчивости используемой разностной схемы является ограниченной и соизмеримой с суммой локальных погрешностей на отдельных шагах.

Оценку полной погрешности искомой функции в точке  $t_{i+1}$  можно получить из сравнения двух решений  $u'_{i+1}$  и  $u''_{i+1}$ , полученных во всей области  $[0, t_{i+1}]$  с постоянными шагами  $\Delta t'$  и  $\Delta t''$  ( $\Delta t' > \Delta t''$ ), соответственно,

$$\varepsilon_{i+1} = |T - u''_{i+1}| \approx \frac{|u''_{i+1} - u'_{i+1}|}{((\Delta t' / \Delta t'')^p - 1)}. \quad (1.28)$$

### 1.1.5. Многочленные методы решения задачи Коши для ОДУ

Основной проблемой при использовании многошаговых методов является трудность смены шага интегрирования, требующая использования одношаговых методов для старта алгоритма с новым шагом.

При получении многошагового метода мы аппроксимируем полиномом  $P(t)$  производную  $f(t, T)$  в нескольких предыдущих узлах расчетной сетки. Новое значение искомой функции в точке  $t_{i+1}$  получается в ходе интегрирования этого полинома на отрезке от  $t_i$  до  $t_{i+1}$ . Интеграл от полинома  $P(t)$  на любом отрезке от  $t_i$  до  $t$  не может зависеть от формы представления полинома, но для некоторых его представлений интегрирование выполнить проще.

Рассмотрим полином третьей степени, записанный в следующем виде:

$$P_3(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + a_3(t - t_i)^3. \quad (1.29)$$

Интеграл от полинома вида (1.29) легко вычисляется. Так как  $a_0 = P_3(t_i) = f(t_i, T_i)$  и  $P_3(t) \approx f(t, T) \equiv T'$  выражение (1.29) похоже на первые члены разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_i$ , и его коэффициенты можно представить аппроксимацией соответствующих производных искомой функции

$$a_n = P_3^n(t_i) / n! \approx T^{(n+1)}(t_i) / (n+1)!. \quad (1.30)$$

Выражение (1.30) определяет отличие многозначного метода от многошагового. Оно заключается в том, что в многозначном методе коэффициенты полинома рассматриваются как первые последовательные коэффициенты ряда Тейлора, записанного относительно текущей узловой точки. В многошаговом методе эти коэффициенты определялись по значениям искомой функции и ее первой производной в нескольких предыдущих узловых точках.

Таким образом, в многозначном методе цель интегрирования заключается в определении коэффициентов ряда Тейлора для разложения с центром в следующей узловой точке.

Рассмотрим конкретный пример построения многозначного метода. Пусть в узловой точке  $t_i$  известно точное решение  $T_i$  и первые три его производные. Построим четырехзначный метод, позволяющий определить эти значения в следующей узловой точке  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ .

Символически это можно записать в виде выражения

$$\tilde{T}(t_i) = \begin{pmatrix} T(t_i) \\ \Delta t T'(t_i) \\ \frac{\Delta t^2}{2} T''(t_i) \\ \frac{\Delta t^4}{6} T'''(t_i) \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{T}(t_{i+1}) = \begin{pmatrix} T(t_{i+1}) \\ \Delta t T'(t_{i+1}) \\ \frac{\Delta t^2}{2} T''(t_{i+1}) \\ \frac{\Delta t^4}{6} T'''(t_{i+1}) \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

в котором множители, включающие степени шага  $\Delta t$  добавлены для масштабирования, так как они всегда возникают при реализации алгоритма. Аналогично можно ввести массивы для приближенных величин  $\tilde{y}_i$  и  $\tilde{y}_{i+1}$ . Следует отметить, что в массивах  $\tilde{T}(t_i)$  и  $\tilde{T}(t_{i+1})$  первые компоненты связаны со вторыми исходным дифференциальным уравнением. Это же условие должно выполняться для массивов  $\tilde{y}_i$  и  $\tilde{y}_{i+1}$ .

**Построение четырехзначного метода.** Для определения метода перехода от  $\tilde{T}(t_i)$  к  $\tilde{T}(t_{i+1})$  разложим решение  $T(t)$  в ряд Тейлора относительно узловой точки  $t_i$ , ограничившись членом с четвертой производной:

$$\begin{aligned} T(t) = & T(t_i) + T'(t_i)(t - t_i) + T''(t_i) \frac{(t - t_i)^2}{2} + \\ & + T'''(t_i) \frac{(t - t_i)^3}{6} + T^{IV}(t_i) \frac{(t - t_i)^4}{24} + \dots \end{aligned} \quad (1.32)$$

Продифференцируем выражение (1.32) три раза и запишем результат для узловой точки  $t_{i+1}$ . Получим

$$\begin{aligned}
 T(t_{i+1}) &= T(t_i) + \Delta t T'(t_i) + \frac{\Delta t^2}{2} T''(t_i) + \frac{\Delta t^3}{6} T'''(t_i) + \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}(t_i) + \dots + \\
 + \Delta t T'(t_{i+1}) &= \Delta t T'(t_i) + \Delta t^2 T''(t_i) + \frac{\Delta t^3}{2} T'''(t_i) + 4 \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}(t_i) + \dots + \\
 + \frac{\Delta t^2}{2} T''(t_{i+1}) &= \frac{\Delta t^2}{2} T''(t_i) + \frac{\Delta t^3}{2} T'''(t_i) + 6 \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}(t_i) + \dots + \\
 + \frac{\Delta t^3}{6} T'''(t_{i+1}) &= \frac{\Delta t^3}{6} T'''(t_i) + 4 \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}(t_i) + \dots
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Отбрасывая члены, начиная с четвертой производной, получим приближенное выражение

$$\tilde{u}_{i+1}^p = \begin{pmatrix} u_{i+1}^p \\ \Delta t u'_{i+1} \\ \frac{\Delta t^2}{2} u''_{i+1} \\ \frac{\Delta t^4}{6} u'''_{i+1} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{B} \tilde{T}(t_i), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Приближение  $\tilde{u}_{i+1}^p$  никак не использует дифференциальное уравнение. Точное выражение для величины  $\tilde{T}(t_{i+1})$  записывается следующим образом:

$$\tilde{T}(t_{i+1}) = \tilde{u}_{i+1}^p + \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}(t_i) + \dots \\ 4 \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}(t_i) + \dots \\ 6 \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}(t_i) + \dots \\ 4 \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}(t_i) + \dots \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Если в выражении (1.35) отбросить все члены с производными выше четвертой, получим приближенное выражение  $\tilde{u}_{i+1}$  для массива  $\tilde{T}(t_{i+1})$ :

$$\tilde{u}_{i+1} = \mathbf{B}\tilde{T}(t_i) + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} T^{IV}(t_i) \frac{\Delta t^4}{24}. \quad (1.36)$$

Приближение (1.36) имеет два недостатка:

- нам неизвестно значение четвертой производной, так как в нашем массиве сохраняются только первые три производные;
- первая и вторая компоненты нашего массива не связаны между собой дифференциальным уравнением.

Чтобы устранить эти недостатки нашего приближения, запишем правую часть второго уравнения в виде  $\Delta tu'_{i+1} + 4a_i$ . Если задать величину  $4a_i$  выражением  $4a_i \equiv \Delta tf(t_{i+1}, T_{i+1}) - \Delta tu'_{i+1}$ , то для  $\tilde{u}_{i+1}$  из (1.36) условие  $u'_{i+1} = f(t_{i+1}, u_{i+1})$  будет выполнено. Тогда окончательно получим выражение для четырехзначного метода:

$$\tilde{u}_{i+1} = \mathbf{B}\tilde{u}_i + \vec{r}(\Delta tf(t_{i+1}, u_{i+1}) - \Delta tu'_{i+1}), \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Метод построен так, чтобы первые две компоненты массива были связаны уравнением. На третью и четвертую компоненты не накладываются никаких дополнительных условий, поэтому их связь с соответствующими производными искомой функции условна. Следует отметить, что разность между вторыми компонентами массивов  $\tilde{u}_{i+1}$  и  $\tilde{u}_{i+1}^p$  является аппроксимацией величины

$4 \frac{\Delta t^4}{24} T^{IV}$ . Это будет использовано в дальнейшем.

**Пример использования многозначного метода.** Применим разработанный метод для решения задачи:

$$T' = -10(t-1)T, \quad T(0) = 1. \quad (1.38)$$

Выберем шаг по независимой переменной, равный 0,1. Для формирования начального массива  $\tilde{T}(0)$  необходимо дважды про- дифференцировать уравнение. Сделав это, получим

$$\tilde{T}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,45 \\ 7/60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,45 \\ 0,116667 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Приближение  $\tilde{u}_1^p$  на первом шаге получим, используя выражение (1.34)

$$\tilde{u}_1^p = \mathbf{B}\tilde{u}_0 = \begin{pmatrix} 2,56667 \\ 2,25 \\ 0,8 \\ 0,116667 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Из выражения (1.37) определим величину  $\tilde{u}_1$ :

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1^p + \bar{r}(0,9u_1 - 2,25). \quad (1.41)$$

Первое неизвестное  $u_1$  входит в обе части системы (1.41), поэтому многозначный метод является нелинейным по первой компоненте. В нашем случае уравнение для первой компоненты имеет вид

$$u_1 = 2,56667 + 0,25(0,9u_1 - 2,25), \quad (1.42)$$

и первое неизвестное можно легко определить:  $u_1 = 2,58603$ .

Остальные компоненты непосредственно получаются из выражений:

$$\begin{aligned} 0,1u_1' &= 2,25 + (0,9u_1 - 2,25) = 2,3274; \\ (0,01/2)u_1'' &= 0,8 + 1,5(0,9u_1 - 2,25) = 0,9161; \\ (0,001/6)u_1''' &= 0,1166678 + (0,9u_1 - 2,25) = 0,1941. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Полученное значение массива  $\tilde{u}_1$  является достаточно точным приближением решения  $\tilde{T}(0,1)$ :

$$\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 2,5860 \\ 2,3274 \\ 0,9161 \\ 0,1941 \end{pmatrix}; \quad \tilde{T}(0,1) = \begin{pmatrix} 2,5857 \\ 2,3272 \\ 0,9179 \\ 0,1978 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Следующие значения  $\tilde{u}_j$  получаются аналогичным образом. В табл. 1.1 представлены результаты такого расчета для первой компоненты массива совместно с точным решением.

Таблица 1.1

$t_i$	$u_i$	$T(t_i)$
0,1	2,58603	2,58571
0,2	6,04772	6,04965
0,3	12,8125	12,8071
0,5	42,5781	42,5211
0,8	119,661	121,510
1,0	124,313	148,414
1,1	231,045	141,175
1,2	-221,159	121,510

Видно, что после  $t = 1,0$  появляются осцилляции разностного решения, свидетельствующие о его неустойчивости. При уменьшении шага неустойчивость увеличивается. Это свидетельствует о неустойчивости предложенного многозначного метода.

Можно предложить другие многозначные методы, отличающиеся от предложенного выбором вектора  $\tilde{r}$ . В этом векторе должно выполняться условие  $r_2 = 1$ , чтобы обеспечивалось согласование первых двух компонент массива с дифференциальным уравнением. Остальные компоненты можно выбирать из условия устойчивости метода. Наиболее известными методами являются метод Адамса–

Мултона и метод Гира. Вектор  $\vec{r}$  для этих методов представлен в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Метод	Адамса–Мултона	Гира
$\vec{r}$	$\begin{pmatrix} 3/8 \\ 1 \\ 3/4 \\ 1/6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6/11 \\ 1 \\ 6/11 \\ 1/11 \end{pmatrix}$

Метод Адамса–Мултона имеет ограниченную область устойчивости, область устойчивости метода Гира неограниченна.

Результаты расчета первого шага нашего примера этими методами представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Метод	Адамса–Мултона	Гира
$\tilde{u}_1$	$\begin{pmatrix} 2,6001 \\ 2,3406 \\ 0,8679 \\ 0,1318 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,6311 \\ 2,3679 \\ 0,8643 \\ 0,1274 \end{pmatrix}$

Из сравнения результатов табл. 1.3 с выражением (1.44) видно, что точность метода Адамса–Мултона ниже, чем у предложенного нами, но выше точности метода Гира.

**Связь многошаговых и многозначных методов.** Можно показать, что многошаговые и -значные методы эквивалентны в том смысле, что первая компонента массива  $\tilde{u}_{i+1}$  равна приближенному значению, вычисляемому многошаговым методом с соответствующими коэффициентами. Так, для описанного выше метода Адамса–Мултона эквивалентным многошаговым методом является

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t (9u'_{i+1} + 19u'_i - 5u'_{i-1} + u'_{i-2}) / 24, \quad (1.45)$$

а эквивалентный методу Гира многошаговый метод имеет вид

$$u_{i+1} = (18u_i - 9u_{i-1} + 2u_{i-2}) / 11 + (6/11)\Delta t u'_{i+1}. \quad (1.46)$$

**Смена шага многозначного метода.** Изменение величины шага в многозначном методе осуществляется достаточно просто, так как в нем используются только значения искомой функции и ее нескольких производных в текущий момент  $t_i$ . Если расчет выполнялся с шагом  $\Delta t$  и мы изменяем его на шаг  $\Delta t_1$ , то перед началом расчета необходимо изменить значения масштабирующих коэффициентов перед производными в массиве  $\tilde{y}_i$ . Сами значения производных при этом не меняются. Таким образом, перед началом расчета достаточно умножить массив  $\tilde{y}_i$  на вектор  $\left(1, \frac{\Delta t_1}{\Delta t}, \left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t}\right)^2, \left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t}\right)^3\right)$ .

**Оценка погрешности расчета.** Локальная ошибка (ошибка на одном шаге) интегрирования для численного метода пропорциональна произведению известной степени величины шага интегрирования на производную решения:

$$\varepsilon_{\text{лок}} = C\Delta t^{p+1} \frac{d^{p+1}T(\xi)}{dt^{p+1}}. \quad (1.47)$$

Здесь  $p$  – порядок аппроксимации метода;  $C$  – константа;  $\xi$  – неизвестная точка на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ . Так, для метода Адамса–Мултона локальная ошибка может быть записана как

$$\varepsilon_{\text{лок}} = \frac{19}{720}\Delta t^5 \frac{d^5T(\xi)}{dt^5}. \quad (1.48)$$

Ранее для аппроксимации величины  $T^{IV}(t_i) \frac{\Delta t^4}{24}$  мы использовали приближение  $a_i \equiv (\Delta t f(t_{i+1}, T_{i+1}) - \Delta t u'_{i+1}) / 4$ . Можно добавить это выражение в качестве пятого компонента в наш массив  $\tilde{y}_{i+1}$ . Тогда разность двух последовательных оценок составляет:

$$\frac{\Delta t^4 T_{i+1}^{IV}}{4!} - \frac{\Delta t^4 T_i^{IV}}{4!} \approx \frac{\Delta t^5 T_i^V}{4!} \equiv e_5 \quad (1.49)$$

и для локальной ошибки получаем оценку

$$|u_{i+1} - T(t_{i+1})| \approx \left| \frac{19}{720} 4! e_5 \right|. \quad (1.50)$$

Следующий шаг интегрирования  $\Delta t_1$  можно записать в виде  $\Delta t_1 = \alpha \Delta t$ , где величина  $\alpha$  подбирается так, чтобы локальная ошибка  $\varepsilon_{\text{лок}}$  была меньше допустимой погрешности  $\varepsilon_{\text{доп}}$ :

$$\varepsilon_{\text{доп}} \geq \varepsilon_{\text{лок}} = \left| \frac{19}{720} (\alpha \Delta t)^5 \frac{d^5 T(\xi)}{dt^5} \right| \approx \left| \frac{19}{720} \alpha^5 4! e_5 \right|. \quad (1.51)$$

Величина  $\alpha$  определяется из выражения (1.51) с 20 %-ным запасом по формуле

$$\alpha = 0,8 \left| \frac{\varepsilon_{\text{доп}}}{19 / 720 \cdot 4! e_5} \right|^{1/5}. \quad (1.52)$$

При изменении величины шага в зависимости от допустимой погрешности по формулам, аналогичным выражению (1.52), шаг следует менять не чаще, чем через  $p$  шагов, где  $p$  – порядок аппроксимации метода. Тогда оценка ошибки успевает «стабилизировать».

**Смена порядка метода.** Можно поставить задачу выбора величины шага более широко. Если получить оценки величины шага с помощью формул, аналогичных (1.52), для методов с порядками аппроксимации  $p-1$ ,  $p$  и  $p+1$ , то можно выбрать метод обеспечивающий большее значение шага и далее использовать его. При этом такой переход не вызывает никаких проблем при понижении порядка аппроксимации и требует небольших дополнительных затрат при его повышении для расчета производной порядка  $p+2$ .

Наиболее важным следствием динамического выбора порядка метода является возможность запуска расчета с начального момента времени без расчета дополнительных производных. Используя начальное значение искомой функции и дифференциальное уравнение, можно определить величину  $\Delta t u'_0$ . Этого достаточно для

запуска метода первого порядка, например неявного метода Эйлера. В дальнейшем при необходимости порядок метода может быть увеличен.

### 1.1.6. Методы решения задачи Коши для системы ОДУ

Рассмотрим систему ОДУ вида

$$\begin{aligned} \frac{dT_j}{dt} &= f_j(t, T_1, \dots, T_N); \\ T_j(0) &= T_{j0}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Большинство рассмотренных ранее схем легко обобщаются на систему уравнений при замене расчета в каждом узле  $i$  величин  $u_i$  и  $f(t_i, u_i)$  на векторные функции  $\vec{U}_i = \{u_i^1, \dots, u_i^N\}$  и  $\vec{f}_i = \{f_i^1, \dots, f_i^N\}$ , где  $f_i^j = f_j(t_i, u_i^1, \dots, u_i^N)$ . Рассмотрим конкретные примеры для двух уравнений:

**Явная схема Эйлера:**

$$\begin{aligned} u_{i+1}^1 &= u_i^1 + \Delta t f_1(t_i, u_i^1, u_i^2); \\ u_{i+1}^2 &= u_i^2 + \Delta t f_2(t_i, u_i^1, u_i^2). \end{aligned} \quad (1.54)$$

**Явная схема Адамса второго порядка аппроксимации:**

$$\begin{aligned} u_{i+1}^1 &= u_i^1 + \Delta t (3f_1(t_i, u_i^1, u_i^2) - f_1(t_{i-1}, u_{i-1}^1, u_{i-1}^2)) / 2; \\ u_{i+1}^2 &= u_i^2 + \Delta t (3f_2(t_i, u_i^1, u_i^2) - f_2(t_{i-1}, u_{i-1}^1, u_{i-1}^2)) / 2. \end{aligned} \quad (1.55)$$

**«Жесткие» системы уравнений.** Основная проблема при решении системы ОДУ связана с так называемой «жесткостью» систем уравнений. «Жесткой» системой уравнений называется система, в которой в решение входят как быстро затухающие, так и медленно изменяющиеся функции, а решение системы ищется на временах, существенно превышающих время затухания быстропротекающих процессов. Решение таких систем явными методами существенно осложняется тем, что устойчивость метода определяется быстропротекающими процессами, и величина допустимого

временного шага мала, что резко увеличивает требуемое число шагов. Применение методов прогноза-коррекции и Адамса–Мултона в данном случае также является неэффективным.

Для решения «жестких» систем используются специальные неявные схемы (в частности, метод Гира), решение которых основывается на применении метода Ньютона.

## **1.2. Описание программы Ody\_lab численного решения задачи Коши для ОДУ**

Учебная программа Ody\_lab предназначена для изучения разностных схем, используемых при численном решении задачи Коши для ОДУ. Она позволяет пользователю:

- сформулировать исходную задачу Коши, выбрав рассматриваемую функцию  $f(t, T)$ , задав начальное значение искомой функции  $T$  и конечное рассматриваемое значение независимой переменной  $t$ ;
- выбрать метод решения, указав используемую разностную схему и определив используемый шаг изменения независимой переменной;
- проанализировать полученные результаты, представляемые в табличном и графическом виде.

### **1.2.1. Особенности программы**

В программе реализована возможность задания двух видов функции  $f(t, T)$ :

1)  $f(t, T) \equiv AT$ , где  $A$  – изменяемый пользователем коэффициент (функция данного вида часто встречается в задачах охлаждения и нагрева);

2)  $f(t, T) \equiv (A - BT) / (C - t)$ , значения коэффициентов  $A, B, C$  задаются пользователем (функция данного вида обеспечивает нелинейность рассматриваемой задачи и описывает, например процесс реактивного движения).

Выбранные функции, с одной стороны, позволяют легко проанализировать особенности поведения рассматриваемых разностных схем, а с другой – имеют простое аналитическое решение, не-

обходимое для определения точных погрешностей численного расчета.

Для численного решения задачи в программе можно выбрать один из десяти методов численного решения:

- 1) явная схема Эйлера;
- 2) модифицированная схема Эйлера;
- 3) исправленная схема Эйлера;
- 4) схема Рунге–Кутты 4-го порядка;
- 5) явная схема Адамса 2-го порядка;
- 6) явная схема Адамса 4-го порядка;
- 7) метод прогноза-коррекции со схемами Адамса 2-го порядка;
- 8) метод прогноза-коррекции со схемами Адамса 4-го порядка;
- 9) метод Гира;
- 10) метод Адамса–Мултона.

Шаг изменения независимой переменной в программе явно задается пользователем и не меняется в ходе расчета. Это позволяет исследовать его влияние на сходимость рассматриваемых разностных схем, выполнять оценки локальной и полной погрешности полученных результатов.

### ***1.2.2. Интерфейс программы***

Программа написана на языке C++ с помощью пакета Microsoft Visual Studio 2013 в виде диалогового приложения Windows.

На рис. 1.1 показано диалоговое окно программы в момент ее запуска. В программе независимая переменная описывается как время процесса.

После выбора параметров рассматриваемой задачи и параметров ее численного решения, задаваемых в левой части диалогового окна программы, нажатие на кнопку «Расчет» приводит к появлению в правой части окна результатов расчета. Они выводятся как в виде графика изменения искомой функции  $T$  от независимой переменной  $t$ , так и в виде таблицы для просмотра полученных значений  $T$  во всех узлах расчетной сетки (рис. 1.2). В случае большого количества узлов сетки просмотр всей таблицы осуществляется с помощью вертикальной полосы прокрутки, расположенной справа от таблицы.

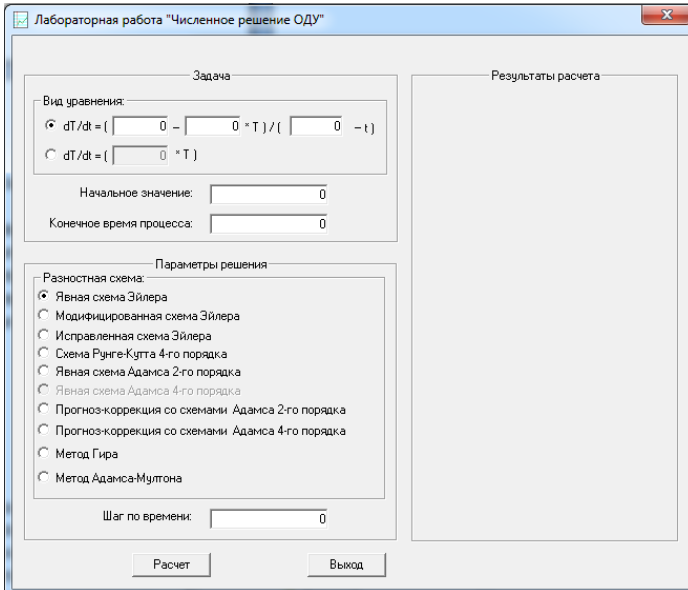


Рис. 1.1. Диалоговое окно программы в момент ее запуска

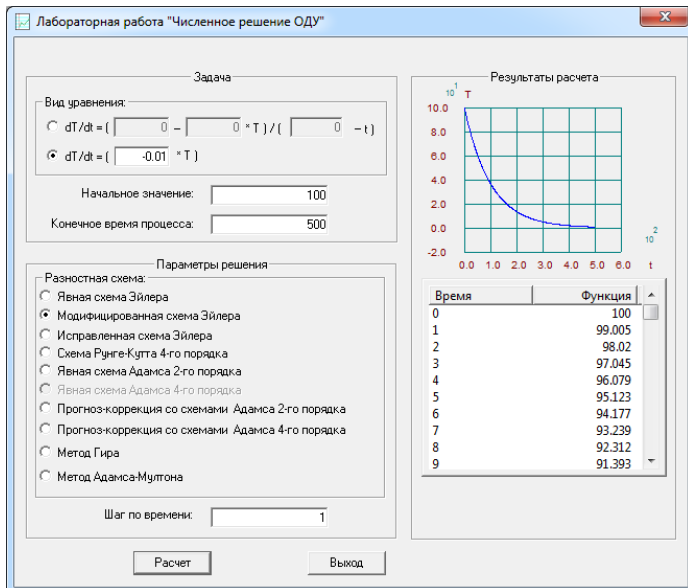


Рис. 1.2. Диалоговое окно программы после выполненного расчета

При неполном задании всех необходимых входных параметров программы появляется предупреждающее сообщение, показанное на рис. 1.3, а проведение расчета блокируется.

Изменение любого входного параметра программы приводит к очистке диалогового поля «Результаты расчета», поэтому представленные результаты всегда соответствуют отображаемым на экране входным параметрам.

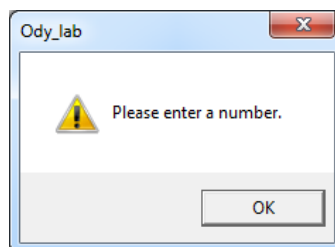


Рис. 1.3. Предупреждающее сообщение при неполном задании входных параметров программы

### 1.3. Описание программы SystemOdy\_lab численного решения задачи Коши для системы ОДУ

Учебная программа SystemOdy\_lab предназначена для изучения разностных схем, используемых при численном решении задачи Коши для системы ОДУ на примере задачи о выравнивании температуры двух находящихся в контакте тел. Она позволяет пользователю:

- сформулировать исходную задачу Коши, задав значение теплоемкостей рассматриваемых тел  $C_1$  и  $C_2$ , коэффициент теплопередачи между ними  $\alpha$ , начальные значения искомых функций  $T_1$  и  $T_2$  и конечное рассматриваемое значение независимой переменной  $t$ ;
- выбрать метод решения, указав используемую разностную схему и определив используемый шаг изменения независимой переменной;
- проанализировать полученные результаты, представляемые в табличном и графическом виде.

#### 1.3.1. Особенности программы

Для численного решения задачи в программе можно выбрать один из десяти методов численного решения:

- 1) явная схема Эйлера;

- 2) модифицированная схема Эйлера;
- 3) исправленная схема Эйлера;
- 4) схема Рунге–Кутты 4-го порядка;
- 5) явная схема Адамса 2-го порядка;
- 6) метод прогноза-коррекции со схемами Адамса 2-го порядка с переменным числом итераций на этапе коррекции;
- 7) метод прогноза-коррекции со схемами Адамса 2-го порядка с фиксированным числом итераций на этапе коррекции;
- 8) метод прогноза-коррекции со схемами Адамса 4-го порядка с фиксированным числом итераций на этапе коррекции;
- 9) метод Гира;
- 10) метод Адамса–Мултона.

Шаг изменения независимой переменной в программе явно задается пользователем и не меняется в ходе расчета. Это позволяет исследовать его влияние на сходимость рассматриваемых разностных схем, выполнять оценки локальной и полной погрешности полученных результатов.

### ***1.3.2. Интерфейс программы***

Программа написана на языке C++ с помощью пакета Microsoft Visual Studio 2013 в виде диалогового приложения Windows.

На рис. 1.4 показано диалоговое окно программы в момент ее запуска. В программе независимая переменная описывается как время процесса.

После выбора параметров рассматриваемой задачи и параметров ее численного решения, задаваемых в левой части диалогового окна программы, нажатие на кнопку «Расчет» приводит к появлению в правой части окна результатов расчета. Они выводятся как в виде графиков изменения искомых функций  $T_1$  и  $T_2$  от независимой переменной  $t$ , так и в виде таблицы для просмотра полученных значений  $T_1$  и  $T_2$  во всех узлах расчетной сетки (рис. 1.5). В случае большого количества узлов сетки просмотр всей таблицы осуществляется с помощью вертикальной полосы прокрутки, расположенной справа от таблицы.

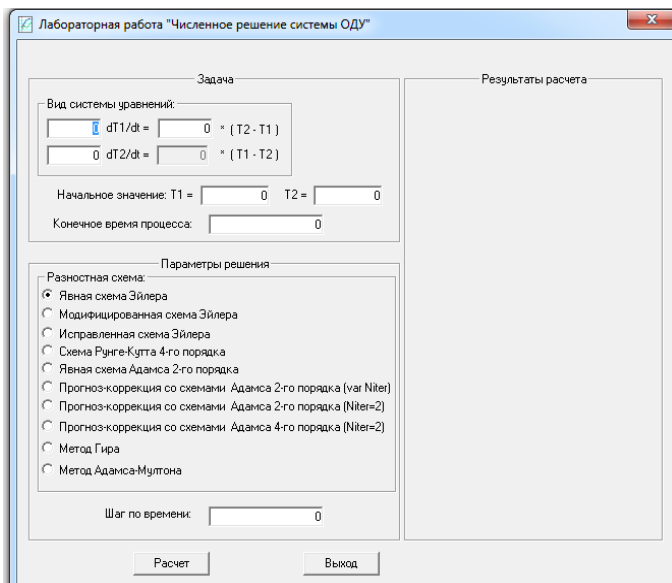


Рис. 1.4. Диалоговое окно программы в момент ее запуска

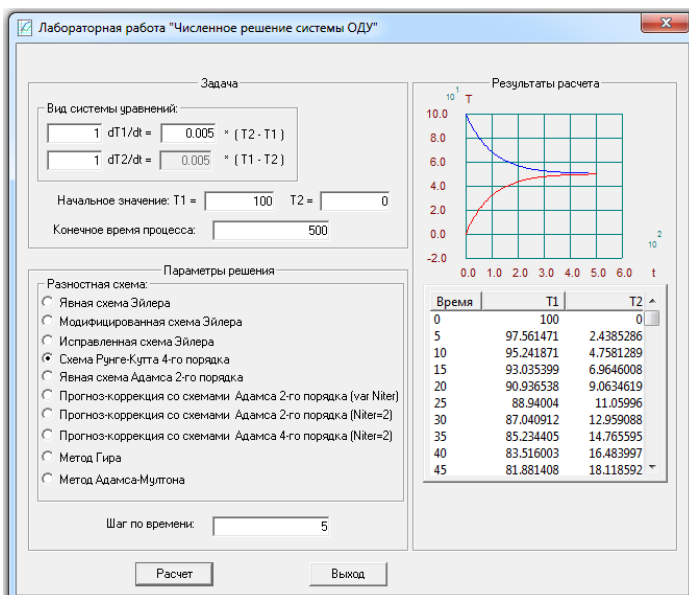


Рис. 1.5. Диалоговое окно программы после выполненного расчета

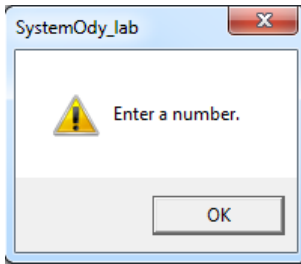


Рис. 1.6. Предупреждающее сообщение при неполном задании входных параметров программы

При неполном задании всех необходимых входных параметров программы появляется предупреждающее сообщение, показанное на рис. 1.6, а проведение расчета блокируется.

Изменение любого входного параметра программы приводит к очистке диалогового поля «Результаты расчета», поэтому представленные результаты всегда соответствуют отображаемым на экране входным параметрам.

## 1.4. Варианты лабораторных работ

### 1.4.1. Исследование сходимости методов разностного решения ОДУ

**Цель работы.** Определение скорости сходимости различных методов численного решения ОДУ и влияния на нее порядка аппроксимации разностной схемы.

**Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, получить разностное решение заданной задачи Коши с помощью нескольких разностных схем при различных шагах изменения независимой переменной.

2. Для каждого из рассмотренных методов численного решения определить погрешность расчета для всех исследованных шагов изменения независимой переменной путем сравнения с точным аналитическим решением.

3. Построить зависимости погрешности расчета от величины шага и проанализировать полученные результаты.

4. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу Коши и используемые для ее решения разностные схемы, привести результаты численного решения, построенные зависимости погрешности от величины шага и свои выводы по работе.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Описание функции  $f(t, T)$  – ее вид и значения коэффициентов.
2. Начальное значение искомой величины.
3. Значение независимой переменной, при котором анализируются результаты (конечное время процесса в программе).
4. Список используемых методов численного решения.
5. Набор шагов изменения независимой переменной, используемый в расчетах.
6. Точное аналитическое решение рассматриваемой задачи при заданном значении независимой переменной.

#### ***1.4.2. Исследование устойчивости методов разностного решения ОДУ***

**Цель работы.** Определение границы устойчивости различных методов численного решения ОДУ.

##### **Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, получить разностное решение заданной задачи Коши с помощью нескольких разностных схем при изменении шага независимой переменной в указанном диапазоне.
2. Для каждого из рассмотренных методов численного решения определить значение шага независимой переменной, при котором наблюдается потеря устойчивости численного решения.
3. Построить зависимости искомой функции  $T(t)$ , полученные при шагах изменения независимой переменной 99, 100 и 101 % от порогового значения.
4. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу Коши и используемые для ее решения разностные схемы, привести результаты численного решения, полученные пороговые значения шага и свои выводы по работе.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Описание функции  $f(t, T)$  – ее вид и значения коэффициентов.

2. Начальное значение искомой величины.
3. Конечное значение независимой переменной, до которого проводится расчет (конечное время процесса в программе).
4. Список используемых методов численного решения.
5. Диапазон изменения шага независимой переменной, используемый в расчетах.

### *1.4.3. Оценка погрешности методов разностного решения ОДУ*

**Цель работы.** Оценка локальной и полной погрешности результатов численного решения ОДУ и определения их связи с истинной погрешностью в зависимости от используемой разностной схемы.

**Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, получить разностное решение заданной задачи Коши с помощью нескольких разностных схем при двух значениях шага изменения независимой переменной.

2. Оценить полную и локальную погрешность расчета на первом шаге изменения независимой переменной и в момент завершения расчета для каждого из рассмотренных методов численного решения.

3. Для каждого из рассмотренных методов численного решения определить истинную погрешность расчета при меньшем из исследованных шагов путем сравнения с точным аналитическим решением при значении независимой переменной, соответствующем первому меньшему шагу и моменту завершения расчета.

4. Сравнить полученные значения локальной, полной и истинной погрешности.

5. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу Коши и используемые для ее решения разностные схемы, привести результаты численного решения, сравнения погрешностей и свои выводы по работе.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Описание функции  $f(t, T)$  – ее вид и значения коэффициентов.
2. Начальное значение искомой величины.

3. Конечное значение независимой переменной, до которого проводится расчет (конечное время процесса в программе).
4. Список используемых методов численного решения.
5. Набор шагов изменения независимой переменной, используемый в расчетах.
6. Точное аналитическое решение рассматриваемой задачи при заданном значении независимой переменной.

#### ***1.4.4. Численное решение системы ОДУ. Теплообмен двух тел***

**Цель работы.** Исследование методов численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на примере задачи о выравнивании температуры двух находящихся в контакте тел.

##### **Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, получить разностное решение заданной задачи Коши с помощью нескольких разностных схем при нескольких значениях шага изменения независимой переменной.
2. Оценить полную погрешность в момент завершения расчета для каждого из рассмотренных методов численного решения.
3. Построить зависимости изменения искомых функций  $T_1(t)$  и  $T_2(t)$  для каждого из рассмотренных методов.
4. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу Коши и используемые для ее решения разностные схемы, привести результаты численного решения, сравнения погрешностей и свои выводы по работе.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Описание исходной задачи Коши – значения теплоемкостей рассматриваемых тел и коэффициента теплопередачи между ними, начальные значения искомых величин.
2. Конечное значение независимой переменной, до которого проводится расчет (конечное время процесса в программе).
3. Список используемых методов численного решения.
4. Набор шагов изменения независимой переменной, используемый в расчетах.

### ***1.4.5. Теплообмен двух тел. Исследование устойчивости методов разностного решения систем ОДУ***

**Цель работы.** Исследование устойчивости методов численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на примере задачи о выравнивании температуры двух находящихся в контакте тел.

#### **Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, получить разностное решение заданной задачи Коши с помощью нескольких разностных схем при нескольких значениях шага изменения независимой переменной.

2. Для каждого из рассмотренных методов численного решения определить значение шага независимой переменной, при котором наблюдается потеря устойчивости численного решения.

3. Исследовать влияние значений коэффициентов ОДУ на устойчивость численного решения для каждого из рассмотренных методов.

4. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу Коши и используемые для ее решения разностные схемы, привести результаты численного решения и свои выводы по работе.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Описание исходной задачи Коши – набор значений теплоемкостей рассматриваемых тел, значение коэффициента теплопередачи между ними, начальные значения искомых величин.

2. Конечное значение независимой переменной, до которого проводится расчет (конечное время процесса в программе).

3. Список используемых методов численного решения.

4. Диапазон изменения шага независимой переменной, используемый в расчетах.

### **1.5. Контрольные вопросы**

1. Что такое сходимость, аппроксимация и устойчивость разностной схемы?

2. Каковы достоинства и недостатки одно-, многошаговых и -значных разностных схем решения ОДУ?
3. Что такое схема Эйлера?
4. Как получить расчетные формулы исправленного метода Эйлера?
5. Какой порядок аппроксимации имеет модифицированный метод Эйлера?
6. Что такое метод Рунге–Кутты 4-го порядка аппроксимации?
7. Как получаются расчетные формулы явной схемы Адамса 2-го порядка аппроксимации?
8. Каков порядок аппроксимирующего полинома при построении неявной схемы Адамса 2-го порядка аппроксимации?
9. Что такое явная схема Адамса 4-го порядка аппроксимации?
10. Что такое неявная схема Адамса 4-го порядка аппроксимации?
11. Как выбирается число итераций в методе прогноза-коррекции?
12. Как получаются расчетные формулы метода прогноза-коррекции на основе схем Адамса 2-го порядка аппроксимации?
13. Какие расчетные формулы используются в методе прогноза-коррекции на основе схем Адамса 4-го порядка аппроксимации?
14. Что такое «жесткая» система уравнений?
15. Какой многозначный метод решения используется для решения «жестких» задач?
16. Как оценить погрешность численного решения?
17. Каковы основные возможности учебной программы Ody\_lab?
18. Каковы основные возможности учебной программы SystemOdy\_lab?

## **2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА**

Пространственно-временные поля температур, скоростей, давлений и других теплофизических параметров при моделировании процессов теплопереноса определяются из решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных в заданных областях изменения пространственных переменных и на заданных временных интервалах. В настоящее время применение вычислительной техники и численных методов позволяет получать приближенные решения многомерных, нелинейных, нестационарных задач теплообмена, для которых использование точных и приближенных аналитических методов не представляется возможным.

При использовании численных методов на первом этапе решения задачи выполняется дискретизация пространственной и временной областей, в ходе которой в этих областях задаются узловые точки. На втором этапе составляется система алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в этих узловых точках. Полученная система уравнений решается на третьем этапе.

Основными численными методами решения уравнений в частных производных являются: метод конечных разностей и метод конечных элементов. Они отличаются способами получения системы уравнений для значений искомых функций в узловых точках. Метод конечных разностей базируется непосредственно на дифференциальном уравнении и граничных условиях, а метод конечных элементов – на эквивалентной вариационной постановке задачи.

В данном разделе на примере уравнения теплопроводности рассмотрим основные понятия теории численных методов, свойства и методы создания конечно-разностных схем.

### **2.1. Основные понятия теории разностных схем**

#### ***2.1.1. Разностная схема и разностное решение***

Основные понятия теории разностных схем разберем на примере одномерного нестационарного уравнения теплопроводности для пластины с внутренним источником тепловыделения

$$\text{ср } \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq t_{\max}. \quad (2.1)$$

На границах пластины заданы граничные условия третьего рода

$$\left[ \mp \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_{0,l} T \right]_{x=0,l} = q_{0,l}, \quad (2.2)$$

а начальное условие имеет вид

$$T(x, t)|_{t=0} = T_0(x). \quad (2.3)$$

Решением задачи (2.1)–(2.3) является функция  $T(x, t)$ , заданная в непрерывной области

$$\Omega = \{0 \leq x \leq l\} \times \{0 \leq t \leq t_{\max}\}.$$

При использовании численных методов в пространственной области выбирается некоторое конечное число значений координаты  $x_1, x_2, \dots, x_N$  (узлов пространственной сетки), для временной переменной также выбирается конечное число значений  $t_0, t_1, \dots, t_J$  (узлов временной сетки). Цель – определение значений температуры  $T_n^j$  в узлах пространственной сетки  $x_n$  в моменты времени  $t_j$ :

$$T_n^j = T(x_n, t_j), \quad n = 1, \dots, N; \quad j = 0, \dots, J, \quad (2.4)$$

т.е. значения искомой функции находятся в дискретной области  $\Omega_{h,\Delta t}$  (рис. 2.1):

$$\Omega_{h,\Delta t} = \{x_1, \dots, x_N\} \times \{t_0, \dots, t_J\}.$$

Для упрощения будем считать пространственное и временное разбиения равномерными с шагами  $h$  по координате  $x$  и  $\Delta t$  по времени:

$$x_n = (n-1)h, \quad h = l/(N-1), \quad n = 1, \dots, N;$$

$$t_j = j\Delta t, \quad \Delta t = t_{\max}/J, \quad j = 0, \dots, J.$$

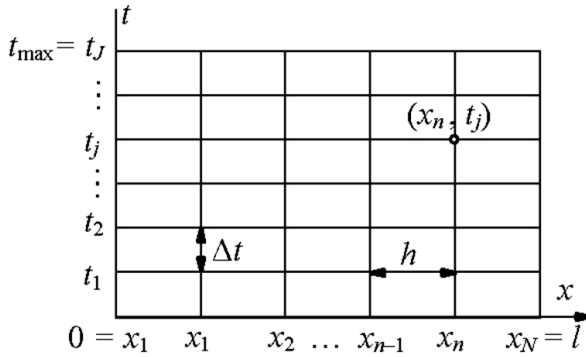


Рис. 2.1. Пространственно-временная сетка, используемая при численном решении

Уравнения для определения  $T_n^j$  получим из основной задачи (2.1)–(2.3).

Выразим производные  $\partial T/\partial x$  и  $\partial^2 T/\partial x^2$  в точке  $(x_n, t_j)$  через значения функции  $T_n^j$  в этой точке и в некоторых соседних узлах сетки. Из определения производной имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_n^j - T_n^{j-1}}{\Delta t} + \delta_n^j(\Delta t), \quad (2.5)$$

где  $\delta_n^j(\Delta t)$  – величина, стремящаяся к нулю при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Конечную разность  $T_n^j - T_n^{j-1}$  называют «разностью назад», или левой разностью.

Выражение для  $\delta_n^j(\Delta t)$  можно получить, выразив в (2.5)  $T_n^{j-1}$  с помощью разложения в ряд Тейлора относительно точки  $(x_n, t_j)$ :

$$T_n^{j-1} = T_n^j - \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_n^j \Delta t + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_n^j \frac{\Delta t^2}{2} - \dots$$

После несложных преобразований получим:

$$\delta_n^j(\Delta t) = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_n^j \frac{\Delta t}{2} - \left( \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \right)_n^j \frac{\Delta t^2}{6} + \dots \quad (2.6)$$

Из выражения (2.6) следует, что при достаточно малых  $\Delta t$  выполняется неравенство  $|\delta_n^j(\Delta t)| \leq A_1 \Delta t$ . Здесь  $A_1$  – константа. Таким образом,  $\delta_n^j(\Delta t)$  является величиной порядка  $\Delta t$ , т.е.  $o(\Delta t)$ .

Аналогичным образом можно построить аппроксимацию для временной производной с помощью «разности вперед» (или правой разности):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_n^{j+1} - T_n^j}{\Delta t} + o(\Delta t). \quad (2.7)$$

Достоинства и недостатки этих двух способов аппроксимации производной  $\partial T / \partial t$  рассмотрим позднее.

При построении выражения для второй производной  $\partial^2 T / \partial x^2$  используем значения искомой функции  $T_n^j$  в трех соседних узлах пространственной сетки:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_n^j &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_n^j = \frac{(T_{n+1}^j - T_n^j) / h - (T_n^j - T_{n-1}^j) / h}{h} + \gamma_n^j(h) = \\ &= (T_{n-1}^j - 2T_n^j + T_{n+1}^j) / h^2 + \gamma_n^j(h). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя представление  $T_{n+1}^j$  с помощью рядов Тейлора относительно точки  $(x_n, t_j)$ , можно показать, что в выражении (2.8)  $\gamma_n^j(h) = o(h^2)$ .

Подставив выражения для производных (2.5) и (2.8) в уравнение теплопроводности (2.1), получим

$$\frac{T_n^j - T_n^{j-1}}{\Delta t} + \delta_n^j = \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{T_{n+1}^j - 2T_n^j + T_{n-1}^j}{h^2} + \gamma_n^j \right) + \frac{q_v}{\rho c}. \quad (2.9)$$

Отбрасывая величины  $\delta_n^j$  и  $\gamma_n^j$ , получим уравнение для определения приближенных значений  $u_n^j$  искомой величины  $T_n^j$ :

$$\frac{u_n^j - u_n^{j-1}}{\Delta t} = \frac{a}{h^2} (u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j) + \frac{q_v}{\rho c}. \quad (2.10)$$

Здесь  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $a = \lambda/\rho c$ .

Уравнения (2.10) можно записать для всех внутренних пространственных узлов ( $n = 2, \dots, N-1$ ). Уравнения для  $u_1^j$  и  $u_N^j$  получим из граничных условий (2.2). Заменяя производные их разностными аналогами и отбрасывая члены порядка  $o(h)$ , получим

$$-\lambda \frac{u_2^j - u_1^j}{h} + \alpha_0 u_1^j = q_0, \quad \lambda \frac{u_N^j - u_{N-1}^j}{h} + \alpha_l u_N^j = q_l. \quad (2.11)$$

В начальный момент времени из начального условия (2.3) имеем:

$$u_n^0 = T_0(x_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.12)$$

В численных методах дискретное множество  $\{x_n\}_{n=1}^N$  называется *пространственной сеткой*, дискретное множество  $\{t_j\}_{j=0}^J$  – *временной сеткой*, дискретное множество (область)  $\Omega_{h,\Delta t}$  – *пространственно-временной сеткой*. Совокупность значений  $T_n^j = T(x_n, t_j)$  в узлах пространственно-временной сетки называется *сеточной функцией точного решения*. Совокупность приближенных значений  $u_n^j$  называется *сеточной функцией разностного решения*, или просто *разностным решением*. Разница между  $T_n^j$  и  $u_n^j$  называется *погрешностью разностного (численного) решения*. Обозначим ее через  $\varepsilon_n^j = T_n^j - u_n^j$ . Система алгебраических уравнений (2.10)–(2.12), соответствующая исходной дифференциальной задаче (2.1)–(2.3), называется *разностной схемой*.

### 2.1.2. Сходимость, аппроксимация и устойчивость разностной схемы

При численном решении дифференциальных уравнений можно выделить следующие этапы:

- замена исходной области непрерывного изменения переменных пространственно-временной сеткой;
- построение разностной схемы;
- решение системы разностных уравнений.

При построении разностной схемы необходимо обеспечить стремление сеточной функции разностного решения  $u_n^j$  к сеточной функции точного решения  $T_n^j$  при измельчении шагов по пространственным и временной координатам. Погрешность  $\varepsilon_n^j$  различна в разных узлах пространственно-временной сетки. Погрешность во всей области  $\Omega_{h,\Delta t}$  характеризуют нормой погрешности  $\|\varepsilon_n^j\|$ :

$$\|\varepsilon_n^j\| = \max_{n,j} |\varepsilon_n^j|. \quad (2.13)$$

Используя понятие нормы, сформулированное требование к разностной схеме можно записать в виде

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0, \\ h \rightarrow 0}} \|\varepsilon_n^j\| = 0. \quad (2.14)$$

Условие (2.14) называется *условием сходимости разностной схемы*. Если при достаточно малых  $\Delta t$  и  $h$  выполняется условие

$$\|\varepsilon_n^j\| \leq C_1 \Delta t^r + C_2 h^p, \quad (2.15)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные, не зависящие от  $\Delta t$  и  $h$ , то говорят, что разностная схема сходится со скоростью  $o(\Delta t^r + h^p)$ , или порядок точности схемы равен  $r$  по временной и  $p$  по пространственной переменной, т.е. понятие порядка точности характеризует асимптотическое поведение погрешности при измельчении сетки.

Уравнение (2.9) для сеточной функции точного решения  $T_n^j$  отличается от разностного уравнения (2.10) для  $u_n^j$  на величины  $\delta_n^j$  и  $\gamma_n^j$ , стремящиеся к нулю при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ . Поэтому точные сеточные функции  $T_n^j$  в общем случае не удовлетворяют уравнениям для разностного решения, и при подстановке  $T_n^j$  в эти уравнения возникает некоторая невязка  $\psi_n^j$ . Для разностного уравнения (2.10) эта невязка:

$$\psi_n^j = -\rho c \delta_n^j + \lambda \gamma_n^j. \quad (2.16)$$

Невязка  $\psi_n^j$ , которая возникает при подстановке сеточной функции точного решения в уравнение для разностного решения, называется *погрешностью аппроксимации исходного дифференциального уравнения разностным уравнением*. Эта невязка, как следует из соотношений для  $\delta_n^j$  и  $\gamma_n^j$ , стремится к нулю при измельчении сетки:

$$|\psi_n^j| = o(\Delta t + h^2).$$

Для характеристики погрешности аппроксимации всей разностной схемы вводят ее норму  $\|\psi_n^j\|$ , определяемую как и  $\|\varepsilon_n^j\|$ , из (2.13).

Условие аппроксимации исходной дифференциальной задачи разностной схемой заключается в том, что погрешность аппроксимации должна стремиться к нулю при измельчении пространственно-временной сетки:

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0, \\ h \rightarrow 0}} \|\psi_n^j\| = 0. \quad (2.17)$$

Если  $\|\psi_n^j\| = o(\Delta t^r + h^p)$ , то говорят, что имеет место аппроксимация с порядком  $r$  по времени и  $p$  по пространственной координате.

Стремление к нулю «отличительных членов»  $\psi_n^j$  при измельчении шагов пространственно-временной сетки позволяет надеяться на сходимость  $u_n^j$  к  $T_n^j$ . Однако это выполняется не всегда. Необходимо, чтобы помимо аппроксимации выполнялось условие устойчивости.

Понятие устойчивости связано с «поведением» погрешности  $\varepsilon_n^j$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ . Рассматриваемая разностная задача решается последовательно во времени, причем решение на  $(j - 1)$ -м слое используется для определения решения на  $j$ -м слое. Погрешность  $\varepsilon_n^1$  на первом временном слое уже будет отлична от нуля и будет зависеть от  $\psi_n^1$ . На втором временном слое погрешность  $\varepsilon_n^2$  определяется погрешностью на предыдущем слое  $\varepsilon_n^1$  и погрешностью аппроксимации  $\psi_n^2$ . Происходит как бы «перенос» погрешности разностного решения с предыдущего шага на текущий и ее «взаимодействие» с погрешностью аппроксимации.

Если схема не обладает устойчивостью, то при решении задачи в результате описанного процесса происходит увеличение погрешности  $\varepsilon_n^j$  по мере продвижения во времени. Появляется и развивается так называемая «раскачка» схемы, которая выражается в том, что погрешность увеличивается по модулю и меняет знак при переходе от одного временного слоя к следующему.

При измельчении сетки в случае неустойчивых схем погрешность не уменьшается, несмотря на снижение погрешности аппроксимации  $\psi_n^j$ . Для устойчивых схем такого роста погрешности не происходит. Величина  $\varepsilon_n^j$  остается ограниченной и уменьшается при понижении погрешности аппроксимации  $\psi_n^j$ .

Запишем условие устойчивости как условие выполнения неравенства

$$\|\varepsilon_n^j\| \leq B \|\psi_n^j\| \quad (2.18)$$

при достаточно малых  $\Delta t$  и  $h$  и постоянной  $B$ , не зависящей от  $\Delta t$  и  $h$ .

При более общей математической трактовке устойчивость рассматривается как свойство разностной схемы, заключающееся в том, что малым изменениям правых частей в системе алгебраических уравнений разностной схемы соответствуют малые изменения разностного решения.

Если условие (2.18) выполняется при любом соотношении между шагами  $\Delta t$  и  $h$ , то схему называют *безусловно устойчивой*. Если устойчивость наблюдается лишь при условии выполнения определенного соотношения между шагами по пространственной координате и по времени, то схему называют *условно устойчивой*.

Выполнение условий аппроксимации и устойчивости является необходимым и достаточным для сходимости.

## 2.2. Явная и неявная разностные схемы

При аппроксимации производной по времени обычно используют значения  $T$  в  $j$ -й и  $(j - 1)$ -й моменты времени. Такие разностные схемы называются *двухслойными*.

Пространственный дифференциальный оператор в двухслойных схемах также аппроксимируют на основе значений температуры в  $j$ -й и  $(j - 1)$ -й моменты времени. При этом наибольшее распространение получили два «крайних» случая. В первом случае при аппроксимации используются только значения температуры для искомого, текущего  $j$ -го момента времени:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx (T_{n+1}^j - 2T_n^j + T_{n-1}^j) / h^2,$$

а во втором – только значения температуры для предыдущего момента времени  $(j - 1)$ :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx (T_{n+1}^{j-1} - 2T_n^{j-1} + T_{n-1}^{j-1}) / h^2.$$

Соответственно, получают два различных разностных уравнения, которые аппроксимируют уравнение теплопроводности (2.1):

$$\rho c \frac{u_n^j - u_n^{j-1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{h^2} (u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j) + q_v \quad (2.19)$$

и

$$\rho c \frac{u_n^j - u_n^{j-1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{h^2} (u_{n+1}^{j-1} - 2u_n^{j-1} + u_{n-1}^{j-1}) + q_v. \quad (2.20)$$

Для граничных и начальных условий остаются выражения (2.11) и (2.12), соответственно.

Записанные разностные уравнения аппроксимируют уравнение теплопроводности с порядком  $o(\Delta t + h^2)$  и граничные условия с порядком  $o(h)$ .

Уравнения (2.19) или (2.20) вместе с уравнениями (2.11)–(2.12) образуют разностные схемы, позволяющие найти сеточную функцию  $u_n^j$ . Однако между схемами, использующими уравнения (2.19) и (2.20), существует принципиальная разница.

Уравнение (2.20) позволяет выразить в явном виде неизвестное значение  $u_n^j$  сеточной функции на «новом» временном слое  $j$  через известные значения сеточной функции на предыдущем  $(j-1)$ -м слое:

$$u_n^j = \frac{a\Delta t}{h^2} (u_{n+1}^{j-1} - 2u_n^{j-1} + u_{n-1}^{j-1}) + \frac{q_v \Delta t}{\rho c} + u_n^{j-1}. \quad (2.21)$$

Разностная схема (2.21), (2.11), (2.12) называется *явной*, так как позволяет в явном виде выразить искомые значения сеточной функции  $u_n^j$  через найденные ранее значения  $u_n^{j-1}$ . Алгоритм численного расчета по явной схеме очень прост и легко программируется.

В каждое уравнение вида (2.19), кроме неизвестного значения  $u_n^j$  для  $n$ -й пространственной точки, входят еще два искомого значения сеточной функции  $u_{n-1}^j$  и  $u_{n+1}^j$  для соседних  $(n-1)$ -й и  $(n+1)$ -й точек. Все искомые значения  $\{u_n^j\}_{n=1}^N$  оказываются «завязанными» друг с другом в общую систему уравнений. Эта система состоит из  $(N-2)$  уравнений (2.19) для внутренних узлов и двух

уравнений (2.11), соответствующих граничным условиям. Всего имеем  $N$  уравнений относительно  $N$  неизвестных  $\{u_n^j\}_{n=1}^N$ . Таким образом, на каждом временном слое значения сеточной функции  $u_n^j$  определяются не по явным формулам, а из решения системы  $N$  уравнений, поэтому рассмотренная разностная схема называется *неявной*.

При том же порядке аппроксимации явная схема требует существенно меньших затрат, чем неявная на расчет одного шага по времени. Однако явная схема является условно устойчивой, т.е. устойчивой при определенном ограничении на величину шага по времени  $\Delta t$ :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{уст}} = h^2 / 2a. \quad (2.22)$$

Из условия устойчивости следует, что измельчение пространственной сетки должно сопровождаться измельчением временной сетки. Это в ряде случаев приводит к неприемлемым затратам машинного времени. Кроме того, при неоправданно большом числе временных шагов может начать проявляться погрешность округления, возникающая в ЭВМ при реализации арифметических операций.

Неявная схема (2.19) – безусловно устойчивая, т.е. явление неустойчивости не возникает при любых величинах  $\Delta t$ . Поэтому при решении задачи по неявной схеме величину шага по времени задают только из соображений обеспечения требуемой погрешности численного решения.

Рассмотренному отличию в поведении решений, полученных по явной и неявной схемам, можно дать следующее физическое объяснение. При расчете по явной и неявной схемам предполагается, что функция меняется линейно на интервале  $[t_{j-1}, t_j]$ . Значение производной по времени при явной схеме вычисляется по значениям искомой функции в начале временного интервала, поэтому приращение искомой функции  $(u_n^j - u_n^{j-1})$  не зависит от получаемых значений, а абсолютная величина этого приращения пропорциональна шагу. В результате при некотором критическом шаге  $\Delta t$  можно получить новые значения  $u_n^j$ , противоречащие физическо-

му смыслу задачи. В неявной схеме приращение  $(u_n^j - u_n^{j-1})$  зависит от всех значений  $u_n^j$  на новом временном слое, т.е. имеется как бы «обратная связь», не позволяющая получать абсурдные приращения сеточной функции.

Можно построить разностную схему, являющуюся линейной комбинацией явной и неявной схем с весовыми коэффициентами  $\sigma$  и  $(1 - \sigma)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{u_n^j - u_n^{j-1}}{\Delta t} &= \frac{\sigma}{h^2} (u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j) + \\ &+ \frac{(1-\sigma)}{h^2} (u_{n+1}^{j-1} - 2u_n^{j-1} + u_{n-1}^{j-1}) + q_v / \lambda. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Эту схему называют *схемой с весами*. Схема (2.23) при  $\sigma \neq 0$  неявная, так как содержит в правой части искомые значения  $u_{n+1}^j$ ,  $u_n^j$ ,  $u_{n-1}^j$  на новом временном слое.

Схема с весами безусловно устойчива при  $\sigma \geq 1/2$ , а при  $\sigma < 1/2$  условие устойчивости имеет вид

$$\Delta t \leq h^2 / [2a(1 - 2\sigma)]. \quad (2.24)$$

Кроме предельных случаев явной ( $\sigma = 0$ ) и чисто неявной ( $\sigma = 1$ ) схем, достаточно часто применяют схему с весом  $\sigma = 1/2$ , называемую *схемой Кранка–Николсона*. Эта схема имеет второй порядок аппроксимации по времени  $|\psi_n^j| = o(\Delta t + h^2)$  и является безусловно устойчивой. Недостатки схемы Кранка–Николсона будут рассмотрены далее.

### 2.3. Монотонность разностных схем

К разностной схеме можно предъявить еще одно разумное требование, выполнение которого обычно проверяют на практике. Чтобы его сформулировать, запишем разностное уравнение (2.23) в виде

$$b_n u_n^j = a_n u_{n+1}^j + c_n u_{n-1}^j + d_n u_n^{j-1} + e_n u_{n+1}^{j-1} + f_n u_{n-1}^{j-1} + g_n, \quad (2.25)$$

где коэффициенты имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} b_n &= 2\sigma \frac{a}{h^2} + \frac{1}{\Delta t}, & a_n &= c_n = \sigma \frac{a}{h^2}, \\ d_n &= \frac{1}{\Delta t} - 2(1-\sigma) \frac{a}{h^2}, & e_n &= f_n = (1-\sigma) \frac{a}{h^2}, & g_n &= \frac{q_v}{\rho c}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Разностное решение  $u_n^j$  должно правильно качественно отражать свойства точных решений. Из физических соображений вытекает, что при прочих равных условиях увеличение любой температуры, стоящей в правой части равенства (2.25), должно приводить к возрастанию значения  $u_n^j$ . Отсюда следует, что коэффициенты  $a_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$ ,  $e_n$ ,  $f_n$  не должны принимать отрицательных значений, если  $b_n > 0$ . В противном случае мы можем получить физически неправдоподобные решения.

Из (2.26) видно, что все коэффициенты, кроме  $d_n$ , всегда положительны. Условие положительности для  $d_n$  имеет вид

$$\Delta t \leq h^2 / [2a(1-\sigma)]. \quad (2.27)$$

Для явной схемы (при  $\sigma = 0$ ) условие (2.27) совпадает с условием устойчивости (2.22). У чисто неявной схемы (при  $\sigma = 1$ ) условие (2.27) переходит в  $d_n = 1/\Delta t > 0$  и выполняется всегда. Для абсолютно устойчивой схемы Кранка–Николсона (при  $\sigma = 1/2$ ) из (2.27) вытекает ограничение на шаг по времени, обусловленное требованием получения физически правдоподобных решений. Если не выполняется условие (2.27), то при моделировании процессов, для которых точные решения представляют собой монотонные по времени функции  $T(x, t)$ , могут получаться разностные решения, колеблющиеся по времени и по пространственной координате.

Условие отсутствия колебаний разностного решения при моделировании процессов с монотонно изменяющейся искомой функции называется *условием монотонности разностной схемы*.

Таким образом, недостатком схемы Кранка–Николсона является отсутствие монотонности при превышении некоторой критической

величины шага по времени. Отсутствие монотонности приведет к тому, что качественное поведение разностного решения может противоречить физическому смыслу, хотя количественно величина погрешности разностного решения  $|\varepsilon_n^j| = |T_n^j - u_n^j|$  может быть и достаточно мала.

## **2.4. Интегроинтерполяционный метод (метод баланса) построения разностных схем**

### ***2.4.1. Свойство консервативности разностной схемы***

В приведенных выше разностных схемах при аппроксимации пространственного дифференциального оператора производные в дифференциальном уравнении и граничных условиях просто заменялись конечными разностями. Такой подход не всегда приводит к успеху. Для более сложных задач, описываемых нелинейными уравнениями и уравнениями с переменными коэффициентами, замена производных конечными разностями может привести к схемам, которые будут иметь большую погрешность, или вообще окажутся непригодными для счета.

Исходные дифференциальные уравнения получаются на основе записи законов сохранения энергии, массы, количества движения для произвольного объема сплошной среды. Очевидно, что для получения разностного решения, хорошо описывающего реальный процесс изменения искомых функций в количественном и качественном отношении, целесообразно потребовать выполнения этих законов и для разностного решения.

Для непрерывного точного решения закон сохранения выполняется для произвольной области тела. Для разностного решения требование выполнения закона сохранения имеет важную особенность, обусловленную дискретным разбиением тела. Поскольку разностное решение ищется в отдельных точках тела, то необходимо разбить тело на такое же число элементарных объемов, каждый из которых будет включать одну точку, а затем потребовать выполнения закона сохранения как для произвольного элементарного объема, так и для любой области, составленной из этих элементарных объемов. Последнее требование будет выполнено, если обес-

печить согласование тепловых потоков для любых соседних объемов, заключающееся в равенстве значений протекающих через общую границу тепловых потоков.

Желательно точное выполнение сформулированных условий при конечном разбиении расчетной области, а не только при стремлении максимального размера элементарной области к нулю. Это позволяет получать правдоподобные решения даже на грубых сетках.

Разностные схемы, при которых получаются численные решения, удовлетворяющие законам сохранения, называются *консервативными*.

Консервативность схемы не обеспечить без принятия специальных мер. Поэтому в большинстве случаев разностные уравнения получают не из аппроксимации операторов дифференциального уравнения, а из непосредственной аппроксимации самих соотношений теплового баланса, записанных для элементарных объемов. При этом для тепловых потоков на границах используются выражения, обеспечивающие выполнение условий согласования. Этот способ построения консервативных разностных схем называется *интегроинтерполяционным методом*, или *методом баланса*.

#### **2.4.2. Метод баланса**

Основные этапы применения метода баланса:

- область, в которой ищется решение, разбивается на элементарные объемы (элементарные ячейки), построенные вокруг каждого узла сетки;
- для всех внутренних и граничных ячеек записываются уравнения теплового баланса, включающие значения тепловых потоков на границах ячеек; при записи уравнений баланса для ячеек, прилегающих к границам, используют граничные условия;
- аппроксимируются члены, входящие в уравнения теплового баланса, выражая их через значения сеточной функции; при этом выражения для тепловых потоков должны удовлетворять условию согласования.

Поскольку число ячеек равно числу узлов пространственного разбиения, то в результате этих действий получается полная систе-

ма алгебраических уравнений – разностная схема, при решении которой можно определить разностное решение.

Рассмотрим построение консервативной разностной схемы в случае нестационарного уравнения для стержня с боковым теплообменом:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \alpha_v(x) T + q_v(x, t). \quad (2.28)$$

Выберем неравномерную пространственную сетку  $\{x_n^j\}_{n=1}^N$  с шагом  $h_n = x_{n+1} - x_n$ . Элементарные ячейки для всех внутренних узлов  $x_n$  построим, отступая от каждого узла на половину шага влево и вправо (рис. 2.2, а). Элементарная ячейка для узла  $x_n$  представляет собой отрезок  $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$ , где  $x_{n+1/2} = x_n + h_n/2$ ,  $x_{n-1/2} = x_n - h_{n-1}/2$ .

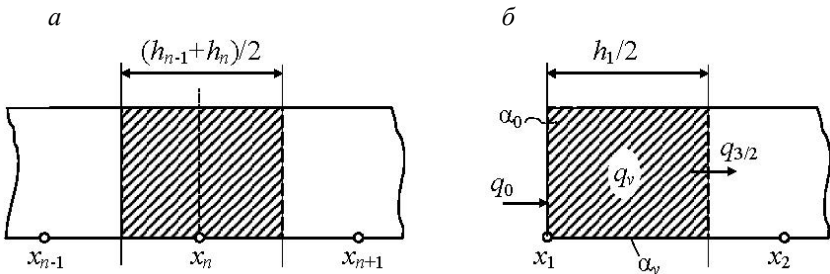


Рис. 2.2. Внутренняя (а) и граничная (б) элементарные ячейки разбиения

Уравнение теплового баланса для ячейки  $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$  на промежутке времени от  $t_{j-1}$  до  $t_j$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \rho c (T^j - T^{j-1}) dx = \\ & = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[ -q_{n+1/2} + q_{n-1/2} + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} (q_v - \alpha_v T) dx \right] dt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь выражение в левой части представляет собой количество тепла, идущее на нагрев элементарной ячейки. Члены в правой части имеют следующий смысл  $q_{n\pm 1/2} = -\lambda(x) \frac{dT}{dx} \Big|_{x_{n\pm 1/2}}$  – тепловые потоки на границах ячейки, интеграл по отрезку – баланс тепловыделения и бокового оттока от ячейки.

Аппроксимируем левую часть (2.29) выражением

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \rho c (T^j - T^{j-1}) dx \approx (T_n^j - T_n^{j-1}) (\rho c)_n \frac{(h_n + h_{n-1})}{2}. \quad (2.30)$$

В правой части равенства (2.29) для аппроксимации интегралов по пространственной переменной используем следующие выражения.

При вычислении теплового потока с боковой поверхности будем считать, что температура не изменяется на отрезке  $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$ , т.е.

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \alpha_v T dx \approx T_n \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \alpha_v dx. \quad (2.31)$$

Приближение для тепловых потоков  $q_{n\pm 1/2}$  получим в предположении о малом изменении потока  $q(x)$  на соответствующих интервалах. Очевидно, что при малых  $h$  поток мало изменяется даже в случае разрыва  $\lambda(x)$ . Из закона Фурье имеем

$$q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{q(x)}{\lambda(x)}. \quad (2.32)$$

Проинтегрировав равенство (2.32) по отрезку  $[x_{n-1}, x_n]$ , получим:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dT}{dx} dx = T_n - T_{n-1} = - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{q(x)}{\lambda(x)} dx \approx -q_{n-1/2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{\lambda(x)}. \quad (2.33)$$

Таким образом, тепловые потоки через границы элементарной ячейки выражаются через разности температур в узлах:

$$q_{n-1/2} \approx \lambda_{n-1/2} \frac{T_{n-1} - T_n}{h_{n-1}}, \quad q_{n+1/2} \approx \lambda_{n+1/2} \frac{T_n - T_{n+1}}{h_{n-1}}, \quad (2.34)$$

где  $\lambda_{n-1/2}$ ,  $\lambda_{n+1/2}$  – эффективные теплопроводности отрезков  $[x_{n-1}, x_n]$  и  $[x_n, x_{n+1}]$ , соответственно

$$\lambda_{n-1/2} = h_{n-1} \left[ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1}, \quad \lambda_{n+1/2} = h_n \left[ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1}. \quad (2.35)$$

Очевидно, что аппроксимация (2.34) удовлетворяет условию согласования потоков.

Для аппроксимации интегралов по времени в правой части выражения (2.29) примем, что при расчете интегралов можно заменить изменяющуюся на отрезке  $[t_{j-1}, t_j]$  температуру на постоянное в каждой точке этого отрезка средневзвешенное значение

$$T_n(t) \approx \sigma T_n^j + (1 - \sigma) T_n^{j-1}, \quad (2.36)$$

где  $\sigma$  – параметр, который может принимать значение от 0 до 1. Тогда при вычислении интеграла по времени получаем следующее выражение:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} T_n(t) dt \approx \Delta t [\sigma T_n^j + (1 - \sigma) T_n^{j-1}]. \quad (2.37)$$

Подставляя выражения для тепловых потоков в уравнение баланса (2.29), получим разностную схему

$$\begin{aligned} \rho c l_n \frac{(u_n^j - u_n^{j-1})}{\Delta t} = & \sigma \left[ \lambda_{n+1/2} \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{h_n} + \right. \\ & \left. + \lambda_{n-1/2} \frac{u_{n-1}^j - u_n^j}{h_{n-1}} \right] + (1 - \sigma) \left[ \lambda_{n+1/2} \frac{u_{n+1}^{j-1} - u_n^{j-1}}{h_n} + \right. \\ & \left. + \lambda_{n-1/2} \frac{u_{n-1}^{j-1} - u_n^{j-1}}{h_{n-1}} \right] + q_{vn}^j l_n - \alpha_{vn} l_n [\sigma u_n^j + (1 - \sigma) u_n^{j-1}], \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$l_n = (h_n + h_{n-1})/2,$$

$$\alpha_{vn} = \frac{1}{l_n} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \alpha_v(x) dx,$$

$$q_{vn}^j = \frac{1}{l_n \Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q_v(x, t) dx dt.$$

Уравнения (2.38) записываются для всех внутренних точек тела. При  $\sigma = 0$  получаем явную схему, при  $\sigma = 1$  – неявную, при  $\sigma = 1/2$  – схему Кранка–Николсона.

В случае непрерывности функций  $\lambda(x)$ ,  $\alpha_v(x)$ ,  $q_v(x, t)$  интегралы от них обычно заменяют простейшими квадратурными формулами. Для  $q_v$  и  $\alpha_v$  чаще всего полагают

$$q_{vn}^j \approx q_v(x_n, (t_{j-1} + t_j)/2), \quad \alpha_{vn} \approx \alpha_v(x_n), \quad (2.39)$$

т.е. заменяют соответствующие интегралы формулой прямоугольников.

Эффективные теплопроводности  $\lambda_{n\pm 1/2}$  вычисляют одним из следующих способов:

$$\text{а) } \lambda_{n\pm 1/2} = \lambda(x_{n\pm 1/2}); \quad (2.40)$$

$$\text{б) } \lambda_{n\pm 1/2} = [\lambda(x_{n\pm 1}) + \lambda(x_n)]/2; \quad (2.41)$$

$$\text{в) } \lambda_{n\pm 1/2} = 2\lambda(x_n)\lambda(x_{n\pm 1})/[\lambda(x_{n\pm 1}) + \lambda(x_n)]. \quad (2.42)$$

Если функции  $\lambda$ ,  $\alpha_v$ ,  $q_v$  имеют разрывы между узлами, то для повышения точности разностной схемы, как правило, следует вычислять интегралы точно. Особенно это существенно в случае многомерных задач, когда приходится вести расчет при достаточно грубых сетках.

**Аппроксимация граничных условий.** Возьмем для определенности элементарную ячейку  $[0, h_1/2]$ , прилегающую к границе  $x = 0$  (рис. 2.2,б). При записи закона сохранения энергии для элементарной ячейки используем чисто неявную схему (при  $\sigma = 1$ ), а также выражения (2.34) для тепловых потоков.

Тепловой поток, выходящий из ячейки через границу  $x = h_1/2$ , равен

$$q_{3/2} \approx \lambda_{3/2} \frac{T_1^j - T_2^j}{h_1}, \quad \text{где} \quad \lambda_{3/2} = h_1 \left[ \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1}, \quad (2.43)$$

тепловой поток, рассеиваемый в среду на границе,  $q^I = \alpha_0 T_1^j$ ; выделяемая внутренними источниками мощность  $q^{II} = q_{v1}^j h_1 / 2$ ; рассеиваемый с боковой поверхности тепловой поток  $q^{III} = \alpha_{v1} T_1^j h_1 / 2$ ; расходуемая на нагрев элементарного объема мощность

$$q^{IV} = \rho c \frac{h_1}{2} \frac{(T_1^j - T_1^{j-1})}{\Delta t}.$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$-q_{3/2} - q^I + q_0 + q^{II} - q^{III} - q^{IV} = 0$$

или

$$\lambda_{3/2} \frac{u_2^j - u_1^j}{h_1} - \alpha_0 u_1^j + q_0 + \frac{h_1}{2} \left( q_{v1}^j - \alpha_{v1} u_1^j - \rho c \frac{u_1^j - u_1^{j-1}}{\Delta t} \right) = 0. \quad (2.44)$$

Первые три слагаемых (2.44) совпадают с простейшей аппроксимацией граничного условия (2.11), полученной простой заменой производной конечной разностью. Дополнительные слагаемые учитывают действие внутренних источников, теплообмен с боковой поверхности и затраты теплоты на нагрев элементарной ячейки. Эти слагаемые пропорциональны  $h_1$ , поэтому при  $h_1 \rightarrow 0$  обе аппроксимации граничного условия становятся идентичными. Можно показать, что погрешность аппроксимации граничного условия уравнением (2.44) —  $o(h_1^2)$ , а уравнением (2.11) —  $o(h_1)$ .

Аналогичным образом строится разностная аппроксимация граничного условия при  $x = l$ .

Система уравнений (2.38) для внутренних точек  $n = 2, \dots, N-1$  и уравнений типа (2.44) для граничных точек представляет собой

консервативную неявную схему численного решения задачи (2.28), (2.2).

## 2.5. Метод прогонки

При использовании неявных разностных схем, например (2.38), на каждом временном слое необходимо решать систему алгебраических уравнений с числом неизвестных  $N$ , которое может быть достаточно велико.

Одним из лучших прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида является метод последовательного исключения Гаусса с выбором главного элемента. Расчет по формулам этого метода требует примерно  $N^3$  арифметических операций, поэтому при достаточно больших  $N$  потребуются значительные затраты машинного времени.

Особенность системы (2.38), (2.44) состоит в том, что в каждое уравнение для внутренних точек входят по три неизвестных, номера которых отличаются на единицу, а в первое и последнее уравнения для точек  $n = 1$  и  $n = N$  – по два «соседних» неизвестных. Если учесть такой специфический вид построенной нами системы разностных уравнений, то эффективность алгоритма ее решения можно существенно повысить.

Запишем систему уравнений в следующем каноническом виде:  
для граничной точки  $n = 1$

$$a_1 u_2^j + b_1 u_1^j + d_1 = 0; \quad (2.45)$$

для внутренних точек  $n = 2, \dots, N - 1$

$$a_n u_{n+1}^j + b_n u_n^j + c_n u_{n-1}^j + d_n = 0; \quad (2.46)$$

для граничной точки  $n = N$

$$b_N u_N^j + c_N u_{N-1}^j + d_N = 0. \quad (2.47)$$

Выражения для коэффициентов  $a_n, b_n, c_n, d_n$  легко получить из соответствующих уравнений разностной схемы.

Трехдиагональный вид матрицы системы уравнений (2.45)–(2.47) позволяет упростить вычисления по методу Гаусса так, чтобы не проводить операции с нулевыми элементами. Тем самым объем вычислений удастся значительно уменьшить. Модификация метода Гаусса для системы уравнений с трехдиагональной матрицей называется *методом прогонки*.

Алгоритм расчета по методу прогонки:

1) определение коэффициентов  $f_1$  и  $g_1$  –

$$f_1 = -a_1 / b_1, \quad g_1 = -d_1 / b_1; \quad (2.48)$$

2) определение коэффициентов  $f_n$  и  $g_n$  при  $n = 2, \dots, N - 1$  –

$$f_n = -\frac{a_n}{b_n + c_n f_{n-1}}, \quad g_n = -\frac{d_n + c_n g_{n-1}}{b_n + c_n f_{n-1}}; \quad (2.49)$$

3) определение  $u_N$ :

$$u_N = -(d_N + c_N g_{N-1}) / (b_N + c_N f_{N-1}); \quad (2.50)$$

4) определение  $u_n$  для  $n = N - 1, \dots, 1$  –

$$u_n = f_n u_{n+1} + g_n. \quad (2.51)$$

Для решения системы (2.45)–(2.47) по методу прогонки требуется примерно  $9N$  арифметических действий, т.е. значительно меньше, чем при использовании метода Гаусса для систем общего вида.

## 2.6. Решение нелинейных задач

Задачи теплопроводности, в которых коэффициенты  $\lambda$ ,  $\rho c$  в дифференциальном уравнении или  $\alpha$  в граничных условиях являются функциями температуры, называются *нелинейными*. Нелинейными являются также задачи, в которых распределения мощности внутренних  $q_v$  или поверхностных  $q_s$  источников представляют собой нелинейные функции температуры.

Рассмотрим методы численного решения на примере следующей задачи:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + q_v(T), \quad (2.52)$$

$$\left[ \mp \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_{0,l}(T) T \right]_{x=0,l} = q_{0,l}(T), \quad (2.53)$$

$$T(x,t)|_{t=0} = T_0(x), \quad (2.54)$$

где  $\lambda(T)$ ,  $q_v(T)$ ,  $\alpha_0(T)$ ,  $\alpha_l(T)$ ,  $q_v(T)$ ,  $q_l(T)$  – произвольные функции температуры.

Запишем для уравнения (2.52) и граничных условий (2.53) чисто неявную разностную схему.

При постоянном пространственном шаге разностные уравнения для внутренних точек имеют вид

$$\begin{aligned} \rho c \frac{(u_n^j - u_n^{j-1})}{\Delta t} = \frac{1}{h^2} \left[ \lambda_{n+1/2}^m (u_{n+1}^j - u_n^j) + \right. \\ \left. + \lambda_{n-1/2}^m (u_{n-1}^j - u_n^j) \right] + q_{vn}^m, \end{aligned} \quad (2.55)$$

а для граничных точек

$$\lambda_{3/2}^m \frac{u_2^j - u_1^j}{h} + \alpha_0^m u_1^j = q_0^m + \frac{h}{2} \left( q_{v1}^m - \rho c \frac{u_1^j - u_1^{j-1}}{\Delta t} \right), \quad (2.56)$$

$$\lambda_{N-1/2}^m \frac{u_N^j - u_{N-1}^j}{h} + \alpha_l^m u_N^j = q_l^m + \frac{h}{2} \left( q_{vN}^m - \rho c \frac{u_N^j - u_N^{j-1}}{\Delta t} \right), \quad (2.57)$$

где  $q_{vn}^m = q_v(u_n^m)$ ,  $\alpha_0^m = \alpha_0(u_1^m)$ ,  $q_0^m = \alpha_0(u_1^m)$  и т.д. Таким образом, эти сеточные функции определяются как значения соответствующей непрерывной функции при  $T = u_n^m$ . Здесь  $m$  – номер временного слоя, выбор которого будет рассмотрен далее.

Теплопроводности  $\lambda_{n\pm 1/2}^m$  в выражениях для сеточных аналогов тепловых потоков можно определить одним из трех следующих способов, см. (2.40)–(2.42):

$$\lambda_{n\pm 1/2}^m = \lambda[(u_{n\pm 1/2}^m + u_n^m) / 2], \quad (2.58)$$

$$\lambda_{n\pm 1/2}^m = [\lambda(u_{n\pm 1}^m) + \lambda(u_n^m)] / 2, \quad (2.59)$$

$$\lambda_{n\pm 1/2}^m = 2\lambda(u_n^m)\lambda(u_{n\pm 1}^m) / [\lambda(u_{n\pm 1}^m) + \lambda(u_n^m)]. \quad (2.60)$$

Возможны два варианта разностной схемы, отличающиеся выбором временного слоя  $m$ , по температурам которого рассчитываются коэффициенты уравнений (2.55)–(2.57). Разностная схема с  $m = (j - 1)$  называется *квазилинейной*, а схема с  $m = j$  – *нелинейной*.

В квазилинейной схеме коэффициенты вычисляются по температурам предыдущего временного слоя, т.е. при решении разностных уравнений относительно температур на текущем временном слое эти коэффициенты известны, и система является линейной относительно  $u_n^j$ . Решение  $u_n^j$  находится методом прогонки. Отличие численного алгоритма решения нелинейной задачи состоит лишь в том, что на каждом шаге по времени необходимо вычислять новые значения коэффициентов  $\lambda$ ,  $q_v$ ,  $\alpha$ ,  $q$  и заново определять коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$  системы уравнений с трехдиагональной матрицей.

В случае нелинейной схемы коэффициенты берутся при значениях температуры  $u_n^j$  на новом временном слое. Система алгебраических уравнений (2.55)–(2.57) становится нелинейной относительно искомой сеточной функции  $u_n^j$ . Для ее решения обычно используют два способа: метод простой итерации и метод Ньютона.

### 2.6.1. Метод простой итерации

На каждом  $j$ -м шаге по времени организуется итерационный процесс, в котором значения коэффициентов вычисляются по температурам  $u_n^{(s-1)}$  предыдущей  $(s - 1)$ -й итерации. Верхним индексом в скобках будем обозначать номер итерации, выполняемой на текущем шаге по времени, а индекс  $j$  при этом будем опускать, полагая что  $u_n^{(s)}$  – некоторое приближение к искомому значению  $u_n^j$ . Таким образом, разностная схема (2.55) принимает вид

$$\rho c \frac{(u_n^{(s)} - u_n^{j-1})}{\Delta t} = \frac{1}{h^2} \left[ \lambda_{n+1/2}^{(s-1)} (u_{n+1}^{(s)} - u_n^{(s)}) + \lambda_{n-1/2}^{(s-1)} (u_{n-1}^{(s)} - u_n^{(s)}) \right] + q_{vn}^{(s-1)}, \quad (2.61)$$

где номер итерации  $s$  принимает значения  $s = 1, 2, \dots, k$ . Уравнения для граничных точек преобразуются аналогично.

В качестве нулевого приближения  $u_n^{(0)}$  берутся значения температур с предыдущего временного слоя, т.е.  $u_n^{(0)} = u_n^{j-1}$ . Затем уравнения разностной схемы вида (2.61) решаются  $k$  раз. Значения температур на новом временном слое принимаются равными:  $u_n^{j-1} = u_n^{(k)}$ . Число итераций  $k$  либо фиксируется, либо определяется из условия получения заданной погрешности решения системы нелинейных разностных уравнений на текущем шаге.

В такой схеме объем вычислений возрастает по сравнению с квазилинейной схемой, так как на каждом шаге по времени приходится решать методом прогонки систему разностных уравнений не один, а  $k$  раз. Однако нелинейная схема дает меньшую погрешность численного решения исходной задачи, чем квазилинейная. Это объясняется тем, что коэффициенты в выражениях для сеточных аналогов тепловых потоков вычисляются в тот же момент времени, что и температуры. Для снижения погрешности квазилинейной схемы следует уменьшать величину шага  $\Delta t$ , т.е. увеличивать число шагов по времени в рассматриваемом интервале. Поэтому во многих случаях оказывается более выгодным даже с точки зрения затрат машинного времени применять нелинейную схему.

### 2.6.2. Метод Ньютона

Линеаризация уравнений по методу Ньютона обычно применяется в том случае, когда зависимости коэффициентов от температуры заданы аналитическими зависимостями, которые могут быть продифференцированы. Искомое значение температуры на текущей итерации  $u_n^{(s)}$  представляется в виде

$$u_n^{(s)} = u_n^{(s-1)} + \Delta u_n^{(s)}, \quad (2.62)$$

где  $\Delta u_n^{(s)}$  – изменение температуры на  $s$ -й итерации, которое также неизвестно и подлежит определению.

Коэффициенты уравнений (2.55)–(2.57), зависящие от температуры  $u_n^{(s)}$ , заменяют приближенными выражениями, вытекающими из разложения в ряд Тейлора в точке  $u_n^{(s-1)}$ :

$$f_n^{(s)} = f_n^{(s-1)} + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^{(s-1)} \Delta u_n^{(s)}. \quad (2.63)$$

Здесь  $f$  – один из нелинейных коэффициентов исходного уравнения. Производная вычисляется по значениям температуры на предыдущей итерации, т.е. неизвестным в правой части (2.63) является только  $\Delta u_n^{(s)}$ .

Выражения (2.62) для температур  $u_n^{(s)}$  и (2.63) для коэффициентов подставляют в систему нелинейных разностных уравнений (2.55). Затем, пренебрегая слагаемыми, содержащими  $(\Delta u_n^{(s)})^2$ , получают систему линейных разностных уравнений относительно приращений  $\Delta u_n^{(s)}$ . Эта система имеет также трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки.

Таким образом, при линеаризации по методу Ньютона на каждой итерации решается задача относительно приращений  $\Delta u_n^{(s)}$ . Температуры  $u_n^{(s)}$  затем определяются согласно (2.62). Этот метод имеет более высокую скорость сходимости по сравнению с методом простой итерации, но оказывается несколько сложнее в программной реализации и требует вычисления производных.

## 2.7. Описание программы ТВЭЛ

Учебная программа ТВЭЛ предназначена для расчета конечно-разностным методом двумерных (по радиусу и высоте) стационарных и нестационарных полей температуры в цилиндрическом теп-

ловыделяющем элементе (ТВЭЛе), охлаждаемом теплоносителем. Она позволяет пользователю:

- задать геометрические и теплофизические характеристики исследуемого ТВЭЛа, его исходное состояние и параметры исследуемого режима;
- выбрать параметры разностной схемы – количество элементов разбиения по радиусу и высоте ТВЭЛа, величину шага по времени;
- проанализировать полученные результаты, представляемые в табличном и графическом виде.

### ***2.7.1. Особенности программы***

В программе моделируются процессы нестационарного теплопереноса в цилиндрическом ТВЭЛе с оболочкой, омываемой потоком теплоносителя. Рассматривается осесимметричный случай распределения температурного поля.

При численном моделировании ТВЭЛ разбивается в поперечном сечении на кольцевые слои равной площади. Распределение температуры в поперечном сечении слоя не учитывается. По высоте каждого элемента разбиения записывается одномерное уравнение теплопроводности, в котором специальным членом учитывается поперечное тепловое взаимодействие с соседними элементами. Обтекающий ТВЭЛ поток теплоносителя также моделируется в одномерном приближении только вдоль ТВЭЛа. Для теплоносителя не рассматриваются уравнения движения. Расход теплоносителя считается постоянным и задается пользователем. Температура теплоносителя находится из решения уравнения сохранения энергии для него.

Таким образом, температурное поле в ТВЭЛе моделируется системой связанных поперечными тепловыми связями одномерных уравнений теплопроводности для топлива и оболочки и уравнения сохранения энергии для потока теплоносителя.

При численном решении данной системы уравнений используется неявная разностная схема вдоль выделенного направления. В поперечном направлении члены, содержащие температуры соседних кольцевых слоев и потока теплоносителя, берутся с предыдущего временного слоя. Это позволяет использовать для решения

эффективные алгоритмы одномерной прогонки для уравнений теплопроводности и бегущего счета для уравнения сохранения энергии. Для компенсации возникающих при таком подходе дисбалансов тепловых потоков между соседними элементами на каждом временном шаге выполняется по 3–5 итераций.

## 2.7.2. Интерфейс программы

Программа работает в операционной системе Windows и оформлена как однодокументное приложение (SDI-интерфейс). При создании программы использовался компилятор Visual C++ 6.0 с библиотекой классов MFC (Microsoft Foundation Classes).

На рис. 2.3 показано окно выбора исходных данных программы, появляющееся в момент ее запуска. В этом окне пользователь может задать геометрические и теплофизические характеристики рассматриваемого твэла, параметры рассматриваемого режима (в разделе «Начальные и граничные условия»), а также используемое пространственно-временное разбиение и частоту вывода в файл полученных результатов.

Геометрия	
Диаметр топлива:	внутренний: 1 мм, внешний: 10 мм
Толщина оболочки:	0.5 мм
Высота твэла:	1000 мм
Продольное сечение для теплоносителя:	100 кв. мм

Теплофизические свойства	
Теплопроводность топлива:	20 Вт/(м·К)
Теплоемкость топлива:	450 Дж/(кг·К)
Плотность топлива:	6000 кг/(куб. м)
Теплопроводность оболочки:	14 Вт/(м·К)
Теплоемкость оболочки:	400 Дж/(кг·К)
Плотность оболочки:	7800 кг/(куб. м)
Теплоемкость теплоносителя:	150 Дж/(кг·К)
Плотность теплоносителя:	10000 кг/(куб. м)

Начальные и граничные условия	
Начальная температура:	350 С
Источник тепловыделения:	300 Вт/м
<input type="checkbox"/> Нестационарный источник	
Контактное сопротивление топливо-оболочка:	0.001 (кв. м·К)/Вт
Температура на входе:	350 С
Расход теплоносителя:	0.1 кг/с
Коэффициент теплоотдачи:	10000 Вт/(кв. м·К)

Используемое разбиение	
Число элементов по длине:	10
Количество разбиений по радиусу:	3
топливо:	2
оболочка:	2
Шаг по времени:	0.01 с
Конечное время процесса:	1 с
Интервал вывода в файл:	0.01 с

Рис. 2.3. Окно выбора исходных данных

После выбора всех параметров рассматриваемой задачи и параметров ее численного решения нажатие на кнопку «OK» приводит к появлению на экране основного окна программы, показанного на рис. 2.4. Оно имеет стандартный для Windows приложений вид. В

состав главного окна программы включен следующий набор основных элементов:

- главное меню, реализующее все команды программы;
- кнопки управления окном программы;
- панель инструментов, содержащая основные команды программы;
- панель отображения состояния программы.

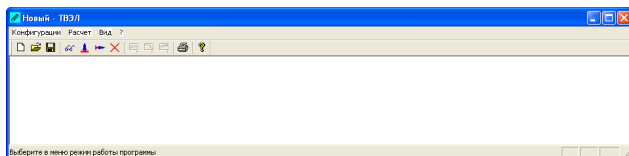


Рис. 2.4. Основное окно программы ТВЭЛ

Главное меню, как и во всех приложениях Windows, представляет собой линейку раскрывающихся меню.

Оно содержит следующие основные команды: «Конфигурации», «Расчет», «Вид», «?» (информация о программе).

Меню «Конфигурации» содержит команды, которые обычно находятся в меню «File».

Меню «Расчет» содержит команды, значение которых очевидно из их названия: «Просмотр/изменение исходных данных», «Начало расчета», «Продолжение расчета», «Конец расчета».

В меню «Вид» задается тип выдаваемой на экран информации по результатам расчета: «Продольное распределение температур», «Поперечное распределение в заданном по высоте сечении», «Изменение во времени температур в заданном по высоте сечении». Также в меню «Вид» регулируется вывод на экран панелей инструментов и состояния программы.

При выборе команды «Начало расчета» появляется стандартное окно Windows для выбора имени и места сохранения файла результатов. По умолчанию он имеет расширение out. После задания файла результатов происходит расчет с заданными исходными данными. По завершении расчета разблокируются пункты меню «Вид» и появляется возможность просмотра полученных результатов на экране.

На рис. 2.5 показан пример вывода на экран продольного распределения температур всех кольцевых слоев твэла, на которые он разбивается при численном решении, а также продольное распределение температуры теплоносителя. Температуры топлива, оболочки и теплоносителя выводятся на экран разным цветом.

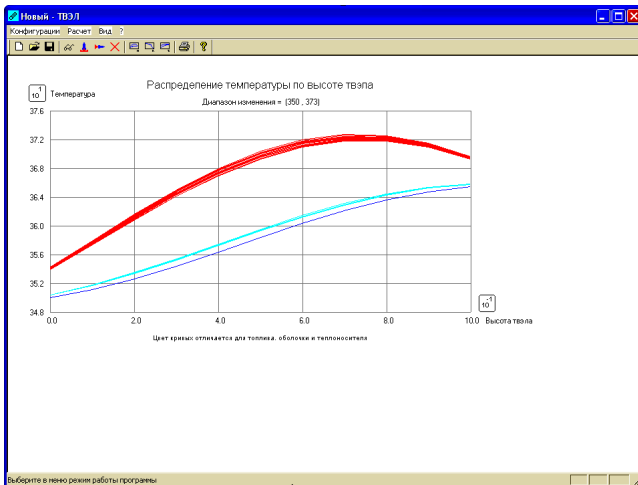


Рис. 2.5. Окно программы при выводе на экран продольного распределения температуры твэла и теплоносителя

При выборе команды вывода поперечного распределения температуры сначала появляется показанное на рис. 2.6 окно выбора отображаемого сечения. После выбора сечения на экране появляется распределение температур в этом сечении (рис. 2.7).

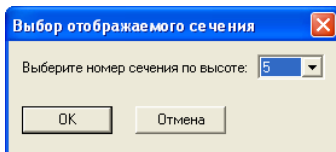


Рис. 2.6. Окно выбора сечения, отображаемого на экране поперечного распределения температур

В случае выбора команды «Продолжение расчета» расчет выполняется, начиная с текущего распределения температур твэла и

теплоносителя, результаты расчета добавляются в существующий файл результатов и происходит обновление выведенной информации на экране.

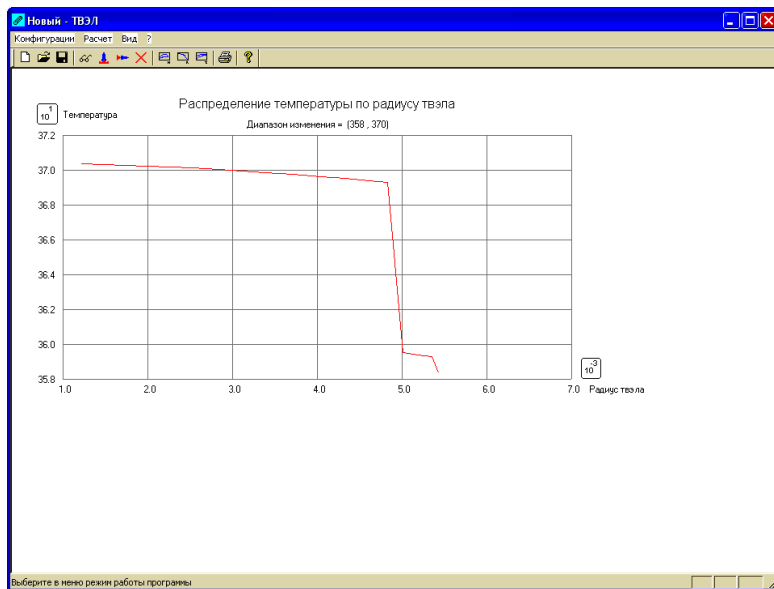


Рис. 2.7. Окно программы при выводе на экран поперечного распределения температуры твэла

**Формат файла полученных результатов.** Результаты расчета сохраняются на диске в текстовом файле, информация в котором для каждого момента времени представлена в следующем формате.

1. Время процесса.
2. Заголовок Temp\_W – показывает, что ниже записаны температуры твэла.
3. Распределение температуры кольцевых слоев твэла по высоте. Для каждого слоя сначала выводится его номер, начиная от центра, затем значения температур в узловых точках по высоте. В конце для каждого слоя выводится координата центра кольцевого слоя по радиусу.
4. Заголовок Temp\_L – показывает, что ниже выводится температура теплоносителя.

5. Распределение температуры теплоносителя по высоте твэла.

В случае нестационарного расчета или расчета с продолжением результаты для последующих моментов времени добавляются в конец файла.

## **2.8. Варианты лабораторных работ**

### **2.8.1. Двухмерное стационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе**

#### **Цели работы.**

1. Исследование влияния параметров пространственного разбиения твэла на точность получаемого распределения поля температур.

2. Исследование влияния конструктивных и режимных параметров на стационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе.

#### **Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, сформулировать в математическом виде поставленную задачу.

2. Подготовить набор необходимых исходных данных, внести его в программу и выполнить заданную серию расчетов.

3. Привести результаты выполненных расчетов и произвести их анализ.

4. Оформить отчет о выполнении работы.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Геометрические характеристики рассматриваемого фрагмента тепловыделяющего элемента: высота фрагмента, диаметр твэла, толщина оболочки, диаметр внутреннего отверстия в топливе.

2. Теплофизические свойства топлива и оболочки, величина контактного термического сопротивления между топливом и оболочкой.

3. Рассматриваемые режимы работы: стационарное распределение энерговыделения по высоте, температура теплоносителя на входе, теплоотдача на поверхности оболочки.

4. Используемые параметры разностной схемы.

### ***2.8.2. Двухмерное нестационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе***

#### **Цели работы.**

1. Исследование влияния параметров пространственного разбиения твэла и временного шага на точность получаемого распределения поля температур.

2. Исследование влияния конструктивных и режимных параметров на изменение во времени поля температур в стержневом тепловыделяющем элементе.

#### **Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, сформулировать в математическом виде поставленную задачу.

2. Подготовить набор необходимых исходных данных, внести его в программу и выполнить заданную серию расчетов.

3. Привести результаты выполненных расчетов и произвести их анализ.

4. Оформить отчет о выполнении работы.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Геометрические характеристики рассматриваемого фрагмента тепловыделяющего элемента: высота фрагмента, диаметр твэла, толщина оболочки, диаметр внутреннего отверстия в топливе.

2. Теплофизические свойства топлива и оболочки, величина контактного термического сопротивления между топливом и оболочкой.

3. Рассматриваемые режимы работы: распределение энерговыделения по высоте и во времени, температура теплоносителя на входе, теплоотдача на поверхности оболочки.

4. Используемые параметры разностной схемы.

### **2.9. Контрольные вопросы**

1. Какие основные понятия теории разностных схем вы знаете?

2. Чем отличаются явная и неявная разностные схемы?

3. Что такое консервативность разностной схемы?

4. Что такое монотонность разностной схемы?
5. Что такое интегроинтерполяционный метод (метод баланса) получения разностных схем?
6. Когда и для чего используется метод прогонки?
7. Какие конечно-разностные схемы для нелинейных задач вы знаете?
8. Что такое квазилинейные схемы?
9. Что такое метод простой итерации для решения нелинейных разностных схем?
10. Когда для решения разностных уравнений используется метод Ньютона?
11. Каковы основные возможности программы ТВЭЛ?

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

При численном моделировании процессов тепломассопереноса, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, в настоящее время широко используется метод конечных элементов (МКЭ), обладающий рядом преимуществ перед методом конечных разностей.

#### 3.1. Основные положения метода конечных элементов

В методе конечных разностей система алгебраических уравнений для определения численного решения получается путем замены производных в дифференциальном уравнении и в граничных условиях или в уравнениях теплового баланса для элементарных ячеек конечными разностями. Таким образом, отправной точкой для получения приближенного решения является дифференциальная краевая задача. В МКЭ искомые величины находятся из решения вариационной задачи, сформулированной на основе исходной дифференциальной.

Особенности реализации МКЭ рассмотрим на примере трехмерного уравнения теплопроводности вида

$$-\nabla(\lambda(x, y, z)\nabla)T + \alpha(x, y, z)T = f(x, y, z) \quad (3.1)$$

с соответствующими условиями на границе  $\Omega$ , рассматриваемой области  $W$ .

Запишем исходное дифференциальное уравнение в операторном виде

$$L(T) = f. \quad (3.2)$$

Введем определение для скалярного произведения функций  $u, v$ , заданных в области  $W$ :

$$(u, v) = \int_W uv dw. \quad (3.3)$$

Определим функционал  $I[v]^1$ :

$$I[v] = (L(T), v) - 2(f, v). \quad (3.4)$$

Функционал  $I[v]$  имеет минимум при  $\frac{dI}{dv}|_{v=T} = 2(L(T) - f)$ , т.е. на решении исходной задачи (3.2).

Поскольку минимальное значение функционала достигается на функции  $T$ , то для любых других допустимых функций  $v$  и произвольного  $\varepsilon$  имеем

$$I[T] \leq I[T + \varepsilon v] = I[T] + 2\varepsilon((L(T), v) - (f, v)) + \varepsilon^2(L(v), v). \quad (3.5)$$

Величина  $\varepsilon$  может сколь угодно малой и иметь любой знак, поэтому из выражения (3.5) следует, что для всех допустимых функций  $v$  должно выполняться

$$(L(T), v) = (f, v). \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) называется *слабой формой исходного уравнения* (3.2) и используется в МКЭ вместо него.

Приближение для искомой функции  $T(x, y, z)$  разыскивается в виде

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1}^M a_m f_m(x, y, z), \quad (3.7)$$

где  $a_m$  – неизвестные постоянные коэффициенты, а  $f_m(x, y, z)$  – известные функции пространственных координат. В качестве весовых функций  $v_m(x, y, z)$  используются те же  $f_m(x, y, z)$ .

Центральным местом в изложенном методе является назначение координатных функций разложения (3.7)  $f_1, \dots, f_M$ . МКЭ основан на использовании описанной схемы приближенного решения при специфическом выборе вида координатных функций. Благодаря этому выбору неизвестные коэффициенты в разложении (3.7) приобретают ясный физический смысл.

---

<sup>1</sup> Оператор  $I[f(x)]$  называется *функционалом*, заданным на некотором множестве функций, если каждой функции  $f(x)$  из этого множества по некоторому правилу ставится в соответствие числовое значение  $I[f(x)]$ .

Построение координатных функций проводится в МКЭ после разбиения области определения искомой непрерывной величины на  $N$  подобластей, называемых *элементами*, и фиксации в них  $M$  узловых точек, выбираемых на границах элементов (рис. 3.1). Отметим, что число членов в разложении (3.7) равно числу узловых точек. Каждая из функций  $f_m(x, y, z)$  обладает следующими свойствами. Значение функции  $f_m(x, y, z)$  в  $m$ -й узловой точке с координатами  $x = x_m, y = y_m, z = z_m$  равно единице, а в остальных узловых точках – нулю. Кроме того, функция  $f_m(x, y, z)$  может быть отлична от нуля только в элементах, содержащих  $m$ -й узел. В остальной части области  $W$  она считается равной нулю.

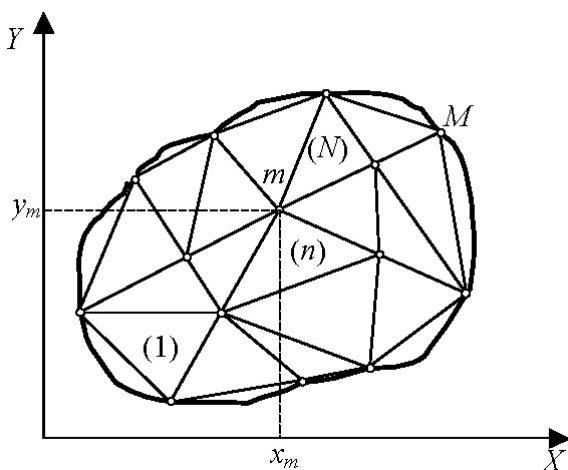


Рис. 3.1. Вариант разбиения двухмерной области на элементы: (1), (n), (N) – номера элементов; m, M – номера узловых точек

При таком выборе координатных функций  $f_m(x, y, z)$  любой неизвестный коэффициент  $a_m$  в разложении (3.7) равен приближенному значению искомой величины  $u_m$  в  $m$ -й узловой точке. Действительно, при подстановке в аппроксимацию (3.7) координат  $m$ -го узла ( $x = x_m, y = y_m, z = z_m$ ) значения всех координатных функций, кроме  $m$ -й функции, будут равны нулю, а значение  $m$ -й функции – единице и, следовательно,

$$T(x_m, y_m, z_m) \approx u_m = \sum_{i=1}^M a_i f_i(x_m, y_m, z_m) = a_m f_m = a_m. \quad (3.8)$$

При использовании разложения (3.7) в каждой точке области  $W$  «работают» только те координатные функции, у которых коэффициенты равны приближенным значениям искомой величины в узловых точках конечного элемента, содержащего данную точку.

При подстановке разложения (3.7) в уравнение (3.6) получается система алгебраических<sup>1</sup> уравнений разностной схемы МКЭ относительно неизвестных приближенных значений искомой функции в узловых точках.

В отличие от метода конечных разностей, дающего приближенные значения искомой величины только в узловых точках, МКЭ позволяет получить пространственное распределение неизвестной величины внутри любого элемента. Оно аппроксимируется суммой произведений координатных функций на коэффициенты, равные приближенным значениям искомой величины в узловых точках, принадлежащих данному элементу.

Координатные функции  $f_m(x, y, z)$ ,  $m = 1, \dots, M$  строятся на основе так называемых функций формы элементов. Каждая из функций формы конкретного элемента равна единице в одной «своей» узловой точке, принадлежащей данному элементу, и нулю в остальных узлах этого элемента, т.е. для элемента вводится столько функций формы, сколько в нем содержится узлов. Вне элемента все его функции формы считаются равными нулю. Таким образом, функция формы  $n$ -го элемента, равная единице в принадлежащей ему  $m$ -й точке, является «представителем» координатной функции  $f_m(x, y, z)$  в этом  $n$ -м элементе. Распределение искомой величины в  $n$ -м элементе аппроксимируется суммой произведений его функций формы на приближенные значения искомой величины в его узловых точках. Очевидно, что для каждого элемента получается своя аппроксимация, но на границах элементов должна сохраняться непрерывность искомого распределения.

---

<sup>1</sup> ОДУ в нестационарном случае.

## 3.2. Программа *FlexPDE* для решения систем дифференциальных уравнений методом конечных элементов

### 3.2.1. Особенности программы

*FlexPDE* – программа, предназначенная для построения с помощью заданного пользователем сценария систем дифференциальных уравнений и их решения методом конечных элементов. Программа производит все необходимые операции для преобразования описания системы дифференциальных уравнений в модель для расчета методом конечных элементов, находит решение для этой системы и представляет результаты в графической форме. Таким образом, *FlexPDE* выполняет роль вычислительной среды для решения задач, поскольку в этой программе заключен полный набор функций, необходимых для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных:

- функции редактирования для подготовки сценариев;
- генератор сеток конечных элементов;
- функции подбора конечных элементов при поиске решения;
- графические функции представления результатов решения.

*FlexPDE* не ограничивает пользователя заранее заданным списком прикладных задач или видов уравнений. Выбор вида дифференциальных уравнений в частных производных полностью зависит от пользователя. Язык сценария позволяет пользователю описывать математический аппарат его системы дифференциальных уравнений в частных производных и структуру области решений в целом в естественном формате. Эта форма сценария имеет много преимуществ.

- Сценарий полностью описывает систему уравнений и рассматриваемую область решения.
  - Новые переменные, новые уравнения или новые условия могут легко добавляться в сценарий по желанию.
  - Много различных задач могут быть решены при помощи одной и той же программы, так что нет необходимости заново проходить обучение работе с программой для решения каждой новой задачи.

### **Возможности программы.**

- *FlexPDE* позволяет решать системы дифференциальных уравнения в частных производных первого или второго порядка.

- Система дифференциальных уравнений может быть стационарной или нестационарной.

- При помощи *FlexPDE* можно решать задачи о собственных значениях функций.

- В рамках одной задачи могут быть одновременно рассмотрены стационарные и нестационарные уравнения. Число уравнений в системе определяется мощностью компьютера, на котором установлен математический пакет *FlexPDE*.

- Уравнения могут быть линейными или нелинейными. Для нелинейных систем решение находится методом Ньютона–Рафсона.

- Может быть задано любое количество геометрических областей для решения с различными свойствами материала.

**Основные модули программы.** *FlexPDE* – имеет несколько модулей, для обеспечения решения задач.

- Модуль редактирования сценария предоставляет средства для редактирования текста и предварительного просмотра графического результата.

- Анализатор символьной записи уравнений, который преобразует информацию, записанную в виде символов уравнения в набор переменных, параметров и их соотношений, понижает порядок интегрирования.

- Модуль генератора сетки строит сетку треугольных конечных элементов в двумерной области решений. При решении трехмерных задач двумерная сетка преобразуется в тетраэдрическую, перекрывающую произвольное количество неплоских слоев.

- Модуль численного анализа осуществляет выбор соответствующей схемы решения для стационарных, нестационарных задач и поиска собственных значений. Для линейных и нелинейных систем применяются отдельные процедуры расчета.

- Процедура оценки погрешности оценивает степень приближения сетки и уточняет координаты сетки в областях, где погрешность велика. Система осуществляет итеративное уточнение пара-

метров сетки и решения до тех пор, пока не достигается заданный пользователем уровень погрешности.

- Модуль графического вывода позволяет создавать из полученного решения произвольные алгебраические функции и осуществляет их построение вдоль заданного контура, на поверхности и в векторном виде.

- Модуль внешнего вывода данных предоставляет возможность распечатки отчетов в различных форматах, включая таблицы численных значений, данные сетки конечных элементов, а также в форматах, совместимых с программами *CDF*, *TecPlot* или *VTK*.

### 3.2.2. Интерфейс программы

При запуске *FlexPDE* открывается основное рабочее окно программы-редактора с элементами (меню, панелями инструментов, диалоговыми окнами), характерными для всех Windows-приложений (рис. 3.2).

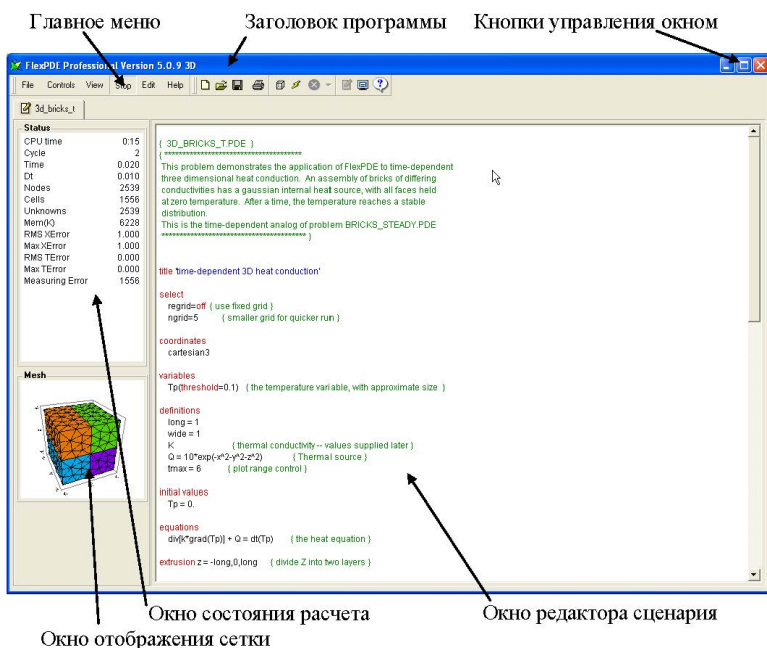


Рис. 3.2. Основное рабочее окно программы *FlexPDE*

В состав главного окна программы включен следующий набор основных элементов:

- главное меню (Main menu, которое содержит команды по созданию и управлению сценарием);
- кнопки управления окном программы;
- окно отображения состояния расчета (Status solve, которое содержит параметры состояния расчета);
- окно отображения сетки разбиения (Mesh window, которое содержит графическое изображение сетки разбиения);
- окно редактора сценария (Notepad, которое отображает содержимое используемого сценария).

Главное меню, как и во всех приложениях Windows, представляет собой линейку раскрывающихся меню.

Оно содержит следующие основные команды: *File* (Файл), *Controls* (Управление), *View* (Вид), *Stop* (Смон), *Edit* (Правка), *Help* (Помощь). Основные команды главного меню перечислены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Команда главного меню	Команда	Назначение
<i>File</i> (Файл)	<i>New Script</i> (Новый сценарий)	Создать новый сценарий
	<i>Open File</i> (Открыть файл)	Открыть существующий сценарий
	<i>Save Script</i> (Сохранить сценарий)	Сохранить сценарий под прежним именем
	<i>Save As</i> (Сохранить как)	Сохранить сценарий под новым именем
	<i>Close</i> (Закреть)	Закреть текущий сценарий
	<i>Import</i> (Импорт)	Импортировать данные из <i>AutoCad</i> в формате <i>DXF</i>
	<i>View</i> (Вид)	Повторно запустить графический вывод задачи <i>FlexPDE</i> , которая была выполнена и закончена ранее
	<i>Exit</i> (Выход)	Выйти из <i>FlexPDE</i>

Продолжение табл. 3.1

Команда главного меню	Команда	Назначение
<i>Controls</i> (Управление)	<i>Domain Review</i> (Просмотр области)	Перейти из режима редактирования сценария к построению и просмотру расчетной сетки в исследуемой области
	<i>Run Script</i> (Выполнение сценария)	Запустить сценарий на выполнение
	<i>Show Editor</i> (Показать редактор)	Перейти в режим редактирования сценария
	<i>Show Plots</i> (Показать графики)	Перейти к показу текущего состояния выходной информации сценария
<i>View</i> (Вид)	<i>Next</i> (Далее)	Загрузить следующие графики с результатами расчета
	<i>Back</i> (Назад)	Загрузить предыдущие графики с результатами расчета
	<i>Restart</i> (Перезапустить)	Перерисовать график
	<i>Last</i> (Последний)	Показать последней группы графики в файле результатов
	<i>Movie</i> (Проиграть)	Выполнить в виде слайд-шоу вывод графиков результатов ранее выполненного нестационарного или многостадийного расчета
	<i>Export Movie</i> (Экспорт видео)	Экспортировать полученные результаты в виде слайд-шоу в файл
	<i>Frame delay</i> (Задержка кадра)	Регулировать задержку между кадрами слайд-шоу
	<i>Stop</i> (Остановить)	Остановить вывод графиков результатов ранее выполненного расчета

Команда главного меню	Команда	Назначение
<i>Stop (Смон)</i>	<i>Stop Now (Остановить сейчас)</i>	Немедленно остановить расчет текущего сценария
	<i>Finish Retries (Остановить итерации)</i>	Остановить выполнение текущей итерации
	<i>Finish Iterations (Закончить итерации)</i>	Остановить выполнение после завершения текущей итерации
	<i>Finish Time Step (Завершить временной шаг)</i>	Остановить выполнение после завершения текущего временного шага
	<i>Pause (Пауза)</i>	Установить паузу в расчете сценария
<i>Edit (Правка)</i>	<i>Undo (Отменить)</i>	Отменить предыдущую команду
	<i>Cut (Вырезать)</i>	Вырезать фрагмент
	<i>Copy (Копировать)</i>	Копировать фрагмент в буфер обмена
	<i>Paste (Вставить)</i>	Вставить фрагмент из буфера обмена
	<i>Delete (Удалить)</i>	Удалить выделенное
	<i>Find (Найти)</i>	Вызвать диалоговое окно поиска
	<i>Font (Шрифт)</i>	Вызвать диалоговое окно установки шрифта
<i>Help (Помощь)</i>	<i>Print Script (Печать сценария)</i>	Печатать сценарий или результаты расчета
	<i>Help (Помощь)</i>	Получить помощь по <i>FlexPDE</i>
	<i>Register (Регистрация)</i>	Зарегистрировать <i>FlexPDE</i>
	<i>License (Лицензия)</i>	Вывести файл лицензии на экран
	<i>About (О программе)</i>	Вывести информацию о программе

Окно отображения состояния расчета содержит активные сообщения о состоянии решения. Формат выводимых данных в этом окне зависит от вида решаемой задачи. Общие сообщения таковы:

- затраты машинного времени (*CPU Time*);
- номер расчетного цикла (*Cycle*);
- число узлов сетки (*Nodes*);
- число конечных элементов (*Cells*);
- число неизвестных переменных (*Unknowns*);
- объем памяти, выделенный для решения задачи в КБ (*Mem(K)*);
- текущая оценка RMS ошибки решения (*RMS Error*);
- текущая оценка максимальной ошибки решения (*Max Error*).

Другие пункты, которые могут появляться во время выполнения задачи:

- текущее расчетное время (*Time*);
- величина текущего временного шага (*Dt*);
- номер циклического повторения решения задачи (*Stage*);
- сообщение текущего действия;
- сообщение о завершении расчета (*DONE*).

Основным элементом рабочего окна *FlexPDE* является окно редактора сценария. Сценарий описания задачи представляет собой текстовый файл без любых вставленных символов. Такие сценарии могут быть подготовлены не только во *FlexPDE*, но и в любом редакторе текста ASCII или любом редакторе, способном к экспорту чистого текстового файла ASCII. Содержание этого файла представляет собой ряд разделов, каждый из которых идентифицируется при помощи заголовка. В *FlexPDE* могут использоваться следующие основные разделы:

*TITLE* – заголовок программы;

*SELECT* – раздел устанавливает различные опции и средства управления;

*COORDINATES* – раздел задания типа используемых координат;

*VARIABLES* – раздел задания переменных задачи;

*DEFINITIONS* – раздел задания вспомогательных переменных задачи;

*INITIAL VALUES* – раздел задания начальных значений для нестационарных задач;

*EQUATIONS* – раздел задания дифференциальных уравнений в частных производных;

*CONSTRAINTS* – задание интегральных связей;

*EXTRUSION* – раздел расширения расчетной области на три измерения;

*BOUNDARIES* – раздел задания граничных условий;

*REGION 1* – задание областей для нескольких материалов;

*START(, )* – задание границ для области;

*TIME* – установка времени расчета для нестационарных задач;

*MONITORS* – задание параметров вывода промежуточных данных расчета;

*CONTOUR* – раздел вывода графических результатов в виде контурных изображений;

*ELEVATION* – раздел вывода графических результатов в виде графика для оговоренной области;

*PLOTS* – раздел вывода графических результатов;

*REPORT* – вывод результатов расчета в виде текстовых данных;

*HISTORIES* – вывод результатов расчета;

*END* – конец программы.

Некоторые из указанных разделов в конкретной задаче могут быть опущены. При этом, в то время как существует некоторая гибкость в размещении этих разделов, предполагается, что пользователь твердо придерживается упорядоченности, описанной выше.

Рассмотрим более подробно перечисленные разделы.

**Раздел *Title*** – необязательный и может содержать одну литеральную строку. В случае присутствия данного раздела в сценарии литеральная строка используется как метка заголовка для выводимых графиков.

**Раздел *Select*** не является обязательным и используется, когда необходимо ввести или отменить некоторые внутренние параметры. Переменные в данном разделе используются для управления процессом расчета и имеют predetermined имена. Некоторые переменные, доступные пользователю в *Select*, приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Название	Значение по умолчанию	Назначение
<i>ASPECT 4</i>	–	Максимальный коэффициент сжатия ячейки
<i>AUTOHIST</i>	<i>On</i>	Заставляет графики перерисовываться во время расчета
<i>AUTOSTAGE</i>	<i>On</i>	Устанавливает отсутствие паузы при расчете
<i>COLORCYCLE</i>	32	Максимальное количество цветов
<i>CONTOURS</i>	15	Число уровней на контурных графиках
<i>CUBIC</i>	<i>On</i>	Устанавливает использование кубических базисных функций
<i>DEBUG(GRID)</i>	<i>Off</i>	Показывает процесс отображения сетки
<i>ERLIM</i>	0,001	Точность расчета
<i>FONT</i>	1	Устанавливает тип шрифта
<i>NODELIMIT</i>	800	Максимальное число узлов решения
<i>NONLINEAR</i>	<i>AUTOMATIC</i>	Устанавливает нелинейный метод решения, даже если автоматический процесс расчета этого не требует
<i>PAINTED</i>	<i>Off</i>	Отображение заполненных цветом контурных графиков
<i>REGRID</i>	<i>On</i>	По умолчанию <i>FlexPDE</i> осуществляет адаптивное усовершенствование расчетной сетки
<i>QUADRATIC</i>	<i>On</i>	Устанавливает использование квадратичной базисной функции
<i>STATUSMESH</i>	<i>On</i>	Расчетная сетка показывается в <i>Mesh Window</i>
<i>NGRID</i>	10	Определяет число ячеек сетки в максимальном измерении

**Раздел *Coordinates*** (необязательный) определяет систему координат для конкретной задачи. При этом раздел задается в следующем виде:

*COORDINATES* <geom>,

где <geom> – тип задаваемой системы координат, может быть любой из видов, указанных в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Название	Значение
<i>CARTESIAN</i>	Декартовы координаты 'X' и 'Y'
<i>XCYLINDER</i>	Цилиндрические координаты с осевой координатой 'Z', находящейся на горизонтальной графической оси 'X', и радиальной координатой 'R', находящейся на вертикальной графической оси 'Y'
<i>YCYLINDER</i>	Цилиндрические координаты с радиальной координатой 'R', находящейся на горизонтальной графической оси 'X', и осевой координатой 'Z', находящейся на вертикальной графической оси 'Y'
<i>CARTESIAN3</i>	Декартовы координаты 'X', 'Y' и 'Z'

В данном разделе можно произвести переименование координат, в этом случае используется следующая запись:

*COORDINATES* <geom> ('Xname', 'Yname', {'Zname'}).

При этом применение переименования вызывает переопределение дифференциальных операторов.

**Раздел *Variables*** используется для определения переменных, используемых в сценарии. Каждая переменная определяет непрерывное скалярное поле по расчетной области. При задании имен переменных применяются следующие правила.

- Имена переменных должны начинаться с алфавитного символа. Они не могут начинаться с цифры или символа.
- Имена переменных должны быть уникальными и отличаться от символа *t*, который зарезервирован для переменной времени.

- Имена переменных могут иметь любую длину и любую комбинацию символов, цифр и (или) символов, отличных от зарезервированных слов.

- Имена переменных не должны содержать любые разделители. Составные имена могут быть сформированы с использованием символа ‘\_’.

- Имена переменных не могут содержать ‘-’, который зарезервирован для знака ‘минус’.

При этом программа не различает заглавные и строчные буквы, так переменная  $X$  и  $x$  обозначают одно и то же.

**Раздел *Definitions*** используется, чтобы объявить и назначить названия констант и функций, используемых в сценарии. При описании переменных в данном разделе придерживаются тех же правил, что и в разделе *Variables*. Дополнительно здесь возможно задание массивов или списков значений в форме:

$$\langle Name \rangle = ARRAY [ \langle value\_1 \rangle, \langle value\_2 \rangle, \dots \langle value\_n \rangle ],$$

например,

$$Xk = ARRAY (1, 2, 3, 4, 6.5).$$

Значения, заданные в списке, должны быть натуральными числами. Они не могут содержать координатные или зависимые переменные.

Использование средства *ARRAY* демонстрирует следующий пример:

#### *DEFINITIONS*

$Xc = array (1/3, 2/3, 3/3, 4/3, 5/3)$  {Список  $X$ -координат}

$Yc = array (1/3, 2/3, 3/3, 4/3, 5/3)$  {Список  $Y$ -координат}

#### *BOUNDARIES*

##### *Region 1*

*for*  $i=1$  *to* 5 {Индексированный цикл на  $X$ -позиции}

*for*  $j=1$  *to* 5 {Индексированный цикл на  $Y$ -позиции}

*Start* ( $xc [i] + rad, yc [j]$ ) {Массив точек}

*Arc* ( $center=xc [i], yc [j]$ )  $angle=360$  {сведенных в таблицу координат}

*Endfor*

*Endfor*

**Раздел *Initial values*** используется при решении нестационарных задач, когда необходимо задать начальное значение для времязависимых переменных. В выражении за именем переменной стоит оператор назначения '=', а справа – константа, функция, выражение или предварительно введенное определение, например:

*Initial values*

$X_k = 25 - x$

**Раздел *Equations*** используется, чтобы перечислить дифференциальные уравнения в частных производных, которые определяют зависимые переменные решаемой задачи. Уравнения, вводимые в сценарий, записываются в естественной форме, используя операторы табл. 3.4.

Таблица 3.4

Команда, функция или константа	Синтаксис	Название
<i>CURL</i>	<i>CURL(X)</i>	Ротор числа $X$
<i>DEL2</i>	<i>DEL2(X)</i>	Лапласиан числа $X$ , эквивалентный $Div(Grad(X))$
<i>DIV</i>	<i>DIV(X)</i>	Дивергент числа $X$
<i>GRAD</i>	<i>GRAD(X)</i>	Градиент числа $X$
<i>DX</i>	<i>DX()</i>	Дифференциальный оператор по $X$
<i>DXX</i>	<i>DXX()</i>	Вторая производная по $X$

В случае решения задачи, включающей в себя бигармонические уравнения, которые требуют использования более высоких порядков производных, они должны быть переписаны, используя промежуточные переменные так, чтобы содержать только производные второго порядка.

**Раздел *Constraints*** – необязательный и используется, чтобы применить дополнительные интегральные связи к решаемой системе. Эти связи используются для устранения неоднозначности, которая может возникнуть в установившихся системах, или в случае, если граничные условия содержат только производные зависимых переменных.

Раздел *Constraints* обычно содержит один или большее количество инструкций вида

$$\text{Integral}(\text{argument}) = \text{Expression}$$

Раздел **Extrusion** используется при решении дифференциальных уравнений, когда в качестве областей решения рассматриваются объемные 3D-объекты.

В качестве примера рассмотрим часть сценария, отвечающую за задание расчетной области в виде цилиндра радиусом  $R_0$  и высотой, равной единице:

```
EXTRUSION
SURFACE Z = 0 {Нижняя граница по оси Z}
SURFACE Z = 1 {Верхняя граница по оси Z}
BOUNDARIES
SURFACE 1 VALUE(U) = 100 {Задаем граничные условия снизу}
SURFACE 2 VALUE(U) = 0 {Задаем граничные условия сверху}
REGION 1
START (R0,0)
ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360 TO CLOSE {Задаем форму основания}
```

Результат выполнения данного кода иллюстрирует рис. 3.3.

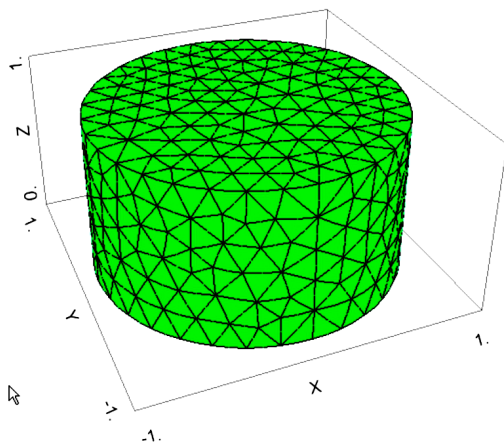


Рис. 3.3. Расчетная область в виде цилиндра

**Раздел *Boundaries*** (обязательный) используется, чтобы описать двумерную область или проекцию трехмерной области на основную плоскость и присоединить граничные значения и внешние источники на физических границах задачи. В *FlexPDE* осуществляет два основных типа задания граничных условий – *VALUE* и *NATURAL*. В граничные условия в форме *VALUE* (или по Дирихле) определяется значение, которое должна принять переменная на границе области решения. В граничных условиях в форме *NATURAL* задается значение потока на границе области решений. Кроме того, используется условие типа *NOBC*. Это условие применяется, чтобы выключить предварительно указанное граничное условие. Оно эквивалентно условию *NATURAL (VARIABLE)=0*.

*FlexPDE* позволяет также моделировать наличие скачкообразного изменения переменных на границах, вызванного, например, контактным термическим или электрическим сопротивлением. Для этого используются инструкции вида *CONTACT* и *JUMP*. Условие *CONTACT* – специальная форма условия *NATURAL*, которая означает, что на границе определяются вместо одного два значения неизвестной величины, и ее поток пропорционален разнице этих значений. Разница значений задается с помощью *JUMP*. Например, если на границе существует контактное термическое сопротивление, то граничное условие будет:  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \frac{T_1 - T_2}{R_T}$ , где  $R_T$  – кон-

тактное термическое сопротивление, а  $\vec{n}$  – нормаль к граничной поверхности. Это условие будет записано в *FlexPDE* следующим образом:

$$CONTACT(T) = JUMP(T)/R_T.$$

Отметим, что задание условия *CONTACT* на внутренней границе области приводит к дублированию узлов сетки на границе. Эти дубликаты связаны между собой условием *JUMP*.

В пределах *Boundaries* физическая область делится на части *Region*, *Features* и *Exclude* (подразделы). Каждый прикладной описатель должен иметь, по крайней мере, один подраздел *Region*.

**Подраздел *REGION*** используется, чтобы описать замкнутые области, которые составляют физическую геометрию задачи в двумерной плоскости, или двумерные проекции на основную плос-

кость в трехмерных задачах. Подразделы *REGIONS* включают области и подобласти с заданными материальными параметрами. Подразделы *REGION* начинаются с зарезервированного слова *START*, сопровождаемого физическими координатами отправной точки, затем описываются границы области, которые задаются прямолинейными отрезками или дуговыми сегментами, и замыкается область зарезервированным словом *CLOSE*. Координаты имеют стандартную математическую форму  $(X, Y)$ . Среди возможных графических примитивов, используемых во *FlexPDE*, существуют примитивы, указанные в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Примитив	Синтаксис	Название
<i>LINE</i>	<i>LINE TO (X,Y)</i>	Линия от точки <i>START</i> до точки с координатами $(X, Y)$
–	<i>LINE TO (X,Y)</i> <i>TO (X1,Y1)</i> <i>TO (X2,Y2) TO ...</i>	Полилиния, проходящая через точки с координатами $(X, Y)$ , $(X1, Y1)$ , $(X2, Y2)$ и др.
<i>ARC</i>	<i>ARC TO (X1,Y1) TO (X2,Y2)</i>	Дуга от точки с координатами $(X1, Y1)$ до точки с координатами $(X2, Y2)$
–	<i>ARC (RADIUS=R) TO (X,Y)</i>	Дуга радиусом $R$ до точки с координатами $(X, Y)$
–	<i>ARC (CENTER=X1,Y1) TO (X2,Y2)</i>	Дуга с центром в точке с координатами $(X1, Y1)$ , проведенная до точки с координатами $(X2, Y2)$
–	<i>ARC (CENTER=X1,Y1) ANGLE=angle</i>	Дуга с центром в точке с координатами $(X1, Y1)$ , проведенная на угол <i>angle</i> (в градусах)

**Подраздел *EXCLUDE*** (исключение) используется, чтобы описать замкнутые области, которые имеют пересекающиеся части в одном или большем количестве подразделов *REGION*. Область, описанная подразделом *EXCLUDE*, исключается из системы расчета. Подразделы *EXCLUDE* должны следовать за подразделами *REGION*, которые они перекрывают.

Подразделы *EXCLUDE* описываются тем же самым способом, как и подразделы *REGION*, и могут использовать также *LINE* и *ARC* сегменты.

В качестве примера можно рассмотреть следующий код:

```
REGION 1 {Задаем исходную расчетную область в виде квадрата}
```

```
START(-1,-1)
```

```
VALUE(U)=U0
```

```
LINE TO (1,-1) TO (1,1) TO (-1,1) CLOSE
```

```
EXCLUDE {Удаляем из расчета треугольную область}
```

```
START(-1,-1)
```

```
LINE TO (0,0) TO (1,-1) TO (-1,1) CLOSE
```

Результат выполнения данного кода иллюстрирует рис. 3.4.

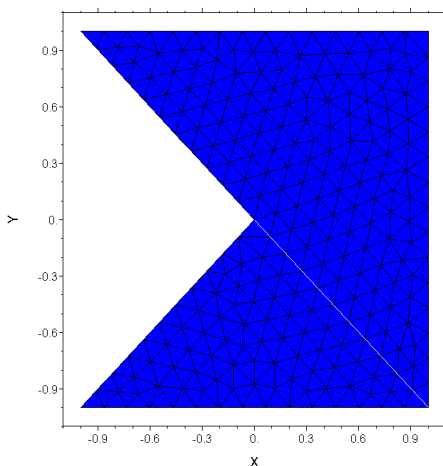


Рис. 3.4. Расчетная область, построенная с использованием подраздела *EXCLUDE*

Подраздел *FEATURE* используется, чтобы описать незамкнутые объекты, которые не включают подобласть с определенными материальными параметрами. Подразделы *FEATURE* формируются тем же самым способом, как и подразделы *REGION*, и могут использовать также *LINE* и *ARC* сегменты. Подразделы *FEATURE* не заканчиваются резервным словом *CLOSE*.

Подразделы *FEATURE* используются, когда проблема имеет внутренние линейные источники, когда желательно вычислить интегралы по нерегулярному пути, или когда требуется явное управление вычислительной сеткой. Пример применения данного подраздела иллюстрирует следующий программный код:

```
REGION 1 {Задаем расчетную область в виде квадрата}  
START(0,0) LINE TO (10,0) TO (10,10) TO (0,10) TO FINISH  
FEATURE {Задаем линию сетки}  
START(0,0) LINE TO (10,10)
```

При применении данных подразделов следует помнить, что все подразделы *REGIONS* должны быть перечислены прежде, чем будут упомянуты подразделы *EXCLUDE* или *FEATURE*. Соответственно, подразделы *EXCLUDES* должны быть перечислены до подразделов *FEATURE*.

Подразделы *REGION*, *EXCLUDE* и *FEATURE* могут иметь как численное, так и буквенное обозначение имен. В случае использования в качестве имени указанных подразделов цифровых обозначений, номера должны назначаться в порядке возрастания, начиная с первого. Более предпочтительным является задание имен подразделов в виде чисел.

Однако если в сценарии ставится задача вывода значения объемного интеграла для произвольной области, то в этом случае целесообразно задавать имена подразделов литеральными символами. В случае задания таких имен они должны иметь форму цитируемой строки и быть помещены немедленно после зарезервированного слова *REGION*, *EXCLUDE* или *FEATURE*. Назначенные имена должны быть уникальны в подразделах *REGION*, *EXCLUDE* и *FEATURE*.

Ранее были рассмотрены граничные условия, заданные для сегментов *LINE* и *ARC*. В дополнение к указанным граничным условиям во *FlexPDE* имеется возможность задания граничных условий для отдельных точек в форме *VALUE* и *LOAD*.

Граничные условия в форме *VALUE* для точки задаются посредством инструкции *POINT VALUE* (точечные граничные условия). Синтаксис данной инструкции иллюстрирует следующий пример:

```
POINT VALUE(VARIABLE) = Expression
```

Данная инструкция указывается после координатной спецификации. Заданное значение граничных условий будет наложено только на точку, координаты которой определены предшествующей спецификацией.

Граничные условия вида *POINT LOAD* могут быть добавлены помещением следующего программного кода:

*POINT LOAD(VARIABLE) = Expression*

Данная инструкция указывается после координатной спецификации. Заявленные граничные условия будут наложены только на точку, координаты которой определены предшествующей спецификацией.

При решении задач для 3D-объектов иногда необходимо определить различные отверстия или исключенные области в расчетной области. Это может быть сделано с использованием инструкции *VOID*, которая имеет синтаксис переопределения параметра. Например, следующий фрагмент кода показывает использование инструкции *VOID*:

```
EXTRUSION Z=0,1,2,3  
BOUNDARIES  
REGION 1  
START(0,0) LINE TO (3,0) TO (3,3) TO (3,0) TO CLOSE  
REGION 2  
LAYER 2 VOID  
START(1,1) LINE TO (2,1) TO (2,2) TO (2,0) TO CLOSE
```

Рис. 3.5 и 3.6 иллюстрируют изменение в расчетной области в результате применения данного программного кода.

**Раздел *Time*** используется в стационарных прикладных описателях, чтобы определить диапазон времени. Во *FlexPDE* поддерживаются следующие альтернативные формы задания временного диапазона:

```
FROM time1 TO time2  
FROM time1 INCREMENT TO time2  
FROM time1 TO time2 increment
```

Здесь *time1* – начальное время; *time2* – конечное время; *increment* – необязательная спецификация начального шага по времени.

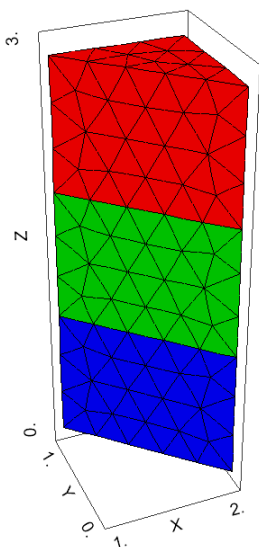


Рис. 3.5. Исходная расчетная область

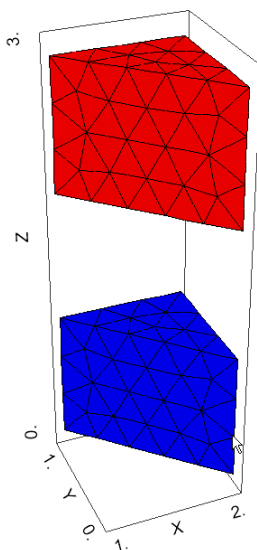


Рис. 3.6. Расчетная область, в которой посредством инструкции *VOID* исключен один слой

**Раздел *Monitors*** – необязательный и используется, чтобы перечислить промежуточные графики, которые выводятся в процессе решения задачи.

**Раздел *Plots*** – необязательный и используется, чтобы перечислить окончательные графики, которые будут выведены на экран по завершению решения задачи. Раздел *Plots* отличается от раздела *Monitors* также тем, что графики первого могут быть записаны в файл с расширением *.PGX* для последующего отображения после выполнения задачи.

Инструкции *Plots* и *Monitors* имеют одинаковую форму и функции. Разделы *Monitors* или *Plots* могут содержать один или большее количество спецификаций экрана следующих типов:

*CONTOUR (arg)* – выполняет вывод двухмерного контурного графика параметра (*arg*) с однородными интервалами уровня параметра;

*ELEVATION*(*arg1*, [*arg2*,...]) <*path*> – выполняет вывод двумерного графика, который отображает значение параметра(ов) вертикально по оси *Y*, а горизонтально (ось *X*), область локализации независимой переменной;

*GRID* (*arg1*, *arg2*) – рисует двумерную сетку вычислений с узловыми координатами, определенными двумя параметрами;

*SUMMARY*('string') – определяет текстовую страницу, содержащую информацию о данных, введенных в текстовой строке;

*VECTOR*(*arg1*, *arg2*) – рисует двумерное поле направленных стрелок, в которых *X*- и *Y*-компоненты стрелок задаются *arg1* и *arg2*.

Вид любого экрана может изменяться путем прибавления одного или нескольких предложений вида:

*AS* 'string' – изменяет метку на экране на выражение, указанное в строке;

*EXPORT* – записывает на диске файл, содержащий данные, представленные в разделах *Monitors* или *Plots*;

*INTEGRATE* – возвращает значение интеграла от функции, изображенной на графике;

*LIN*, *LOG*, *LINLOG*, *LOGLIN*, *LOGLOG* – изменяют заданные по умолчанию линейные масштабы вывода графиков на специальные (команда масштабирования состоит или из отдельного, или составного слова).

В случае использования односложного слова, например: *LIN* – задается линейный масштаб отображения графиков; *LOG* – графики будут иметь логарифмические оси. При использовании составных слов (*LINLOG*, *LOGLIN*, *LOGLOG*) первое слово применяет к логической оси *X*, второе – к логической оси *Y* и т.д.

*NOTIPS* – данный спецификатор отображает графики типа *Vector* как отрезки без стрелок.

*PAINTED* – заполняет области между контурными линиями цветом.

Любая спецификация экрана может сопровождаться одним или большим количеством следующих предложений с целью прибавления сообщений к графикам.

*REPORT expression* – данная спецификация добавляет внизу графика текст '*text expression=value expression*', где *expression* – любое выражение, включая выражения, содержащие интегралы.

В дополнение можно отметить, что в нестационарных задачах спецификациям экрана должна предшествовать инструкция, регламентирующая вывод графиков. Эта инструкция может иметь любую из нижеприведенных форм.

*FOR CYCLE = number* – в этом случае графики будут обновляться на каждом указанном временном шаге.

*FOR T = timeset1 [ timeset2 ... ]* – каждый *timeset* (временной шаг) может быть или определенным временем, или группой временных шагов, указанных как массив значений.

**Раздел *Histories*** – необязательный и определяет значения переменных, для которых записывается хронология изменения. Инструкции этого раздела имеют следующий вид:

*HISTORY (arg1 [ , arg2, ...])*

*HISTORY ( arg1 [ , arg2,...] ) AT (X1,Y1) [ (X2,Y2)...]*

При этом *X1, Y1, ...* определяют координаты точки в области, в которой регистрируется хронология изменения заданного параметра. Если точка не задана, то переменная должна быть скалярной величиной.

**Операторы и функции *FlexPDE*.** В *FlexPDE* используется около 150 различных команд, функций и констант. Некоторые из наиболее часто используемых при разработке сценариев приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Команда, функция или константа	Синтаксис	Название
<i>ABS</i>	<i>ABS(X)</i>	Модуль <i>X</i>
<i>ARCCOS</i>	<i>ARCCOS(X)</i>	Арккосинус <i>X</i>
<i>ARCSIN</i>	<i>ARCSIN(X)</i>	Арксинус <i>X</i>

Продолжение табл. 3.6

Команда, функция или константа	Синтаксис	Название
<i>ARCTAN</i>	<i>ARCTAN(X)</i>	Арктангенс $X$
<i>ATAN2</i>	<i>ATAN2(Y, X)</i>	Арктангенс ( $Y/X$ )
<i>BESSJ</i>	<i>BESSJ(N, X)</i>	Функция Бесселя 1-го рода $N$ -го порядка числа $X$
<i>BESSY</i>	<i>BESSY(N, X)</i>	Функция Бесселя 2-го рода $N$ -го порядка числа $X$
<i>BINTEGRAL</i>	<i>BINTEGRAL</i> ( <i>&lt;уравнение&gt;</i> , <i>&lt;имя границы&gt;</i> )	Интегральное значение <i>&lt;уравнения&gt;</i> для линейной области <i>&lt;имя границы&gt;</i>
<i>COS</i>	<i>COS(X)</i>	Косинус $X$
<i>COSH</i>	<i>COSH(X)</i>	Гиперболический косинус $X$
<i>CROSS</i>	<i>CROSS</i> ( <i>vector1</i> , <i>vector2</i> )	Возвращает векторную величину, равную сумме векторов
<i>DOT</i>	<i>DOT</i> ( <i>vector1</i> , <i>vector2</i> )	Возвращает скалярную величину для точки, равную сумме двух векторов
<i>ERF</i>	<i>ERF(X)</i>	$R$ -функция $X$
<i>ERFC</i>	<i>ERFC(X)</i>	Дополнительная $R$ -функция $X$
<i>EXP</i>	<i>EXP(X)</i>	Экспонента числа $X$
<i>EXPINT</i>	<i>EXPINT(X)</i>	Интеграл $\ln(X)$
<i>GAMMAF</i>	<i>GAMMAF(X)</i>	Гамма-функция (интеграл Эйлера 1-го рода)
	<i>GAMMAF(a, X)</i>	Интеграл Эйлера 2-го рода
<i>INTEGRAL</i>	<i>LINE_INTEGRAL</i> ( $X$ , <i>Region 1</i> )	Возвращает значение интеграла функции $X$ для области <i>Region 1</i> (1D-объект)

Команда, функция или константа	Синтаксис	Название
	$AREA\_INTEGRAL(X, Region\ 1)$	Возвращает значение интеграла функции $X$ для области $Region\ 1$ (2D-объект)
	$VOL\_INTEGRAL(X, Region\ 1)$	Возвращает значение интеграла функции $X$ для области $Region\ 1$ (3D-объект)
$LOG10$	$LOG10(X)$	Десятичный логарифм числа $X$
$LN$	$LN(X)$	Натуральный логарифм числа $X$
$MAGNITUDE$	$MAGNITUDE(vector1)$	Возвращает скалярную величину вектора
$MAX$	$MAX(arg1, arg2)$	В каждой точке возвращает максимальное из двух значений аргументов
$MIN$	$MIN(arg1, arg2)$	В каждой точке возвращает минимальное из двух значений аргументов
$SIN$	$SIN(X)$	Синус числа $X$
$NORMAL$	$NORMAL(vector1)$	Возвращает скалярную величину нормальной составляющей к границе области заданного вектора
$SINH$	$SINH(X)$	Гиперболический синус $X$
$SQRT$	$SQRT(X)$	Корень квадратный числа $X$
$SIGN$	$SIGN(X)$	Возвращает число, равное 1, если $X > 0$ , и $-1$ , если $X < 0$
$TAN$	$TAN(X)$	Тангенс числа $X$
$TANH$	$TANH(X)$	Гиперболический тангенс числа $X$

Помимо указанных функций и констант в *FlexPDE* используются стандартные математические операторы (табл. 3.7)

Таблица 3.7

Оператор	Выполняемая операция
–	Вычитание
+	Сложение
*	Умножение
/	Деление
^ или **	Возведение в степень

### 3.3. Варианты лабораторных работ

#### 3.3.1. Стационарное поле температур в поперечном сечении стержневого тепловыделяющего элемента

##### Цели работы.

1. Приобретение и закрепление навыков в разработке сценарных моделей решения задач теплообмена методом конечных элементов с помощью пакета *FlexPDE*.

2. Исследование влияния конструктивных и режимных параметров на поле температур в поперечном сечении стержневого тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ).

##### Задачи работы.

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, сформулировать в математическом виде поставленную задачу.

2. Разработать сценарий решения задачи, в котором указать наименование и величины констант и переменных (в том числе и вспомогательных), параметры граничных и начальных условий, решаемые дифференциальные уравнения и искомые зависимости.

3. Реализовать поставленную задачу в виде программного кода в среде *FlexPDE*.

4. Привести результаты выполненных расчетов и произвести их анализ.

5. Оформить отчет о выполнении работы.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Геометрические характеристики рассматриваемого тепловыделяющего элемента: диаметр твэла, толщина оболочки, диаметр внутреннего отверстия в топливе.

2. Теплофизические свойства топлива и оболочки, величина контактного термического сопротивления между топливом и оболочкой.

3. Рассматриваемые режимы работы: распределение энерговыделения по сечению твэла, температура теплоносителя и теплоотдача на поверхности оболочки.

4. Требуемая погрешность полученного решения.

В каждом варианте задания рассматривается два набора режимных параметров, обеспечивающих, соответственно, изотропное и анизотропное азимутальное распределение поля температур.

### ***3.3.2. Трехмерное стационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе***

#### **Цели работы.**

1. Приобретение и закрепление навыков в разработке сценарных моделей решения задач теплообмена методом конечных элементов с помощью пакета *FlexPDE*.

2. Исследование влияния конструктивных и режимных параметров на стационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе.

#### **Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, сформулировать в математическом виде поставленную задачу.

2. Разработать сценарий решения задачи, в котором указать наименование и величины констант и переменных (в том числе и вспомогательных), параметры граничных и начальных условий, решаемые дифференциальные уравнения и искомые зависимости.

3. Реализовать поставленную задачу в виде программного кода в среде *FlexPDE*.

4. Привести результаты выполненных расчетов и произвести их анализ.

5. Оформить отчет о выполнении работы.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Геометрические характеристики рассматриваемого фрагмента тепловыделяющего элемента: высота фрагмента, диаметр твэла, толщина оболочки, диаметр внутреннего отверстия в топливе.

2. Теплофизические свойства топлива и оболочки, величина контактного термического сопротивления между топливом и оболочкой.

3. Рассматриваемые режимы работы: стационарное распределение энерговыделения по высоте и сечению твэла, температура теплоносителя и теплоотдача на поверхности оболочки.

4. Требуемая погрешность полученного решения.

В каждом варианте задания рассматривается два набора режимных параметров:

1) с изотропным азимутальным распределением энерговыделения и условий теплообмена на поверхности оболочки;

2) с локальной областью измененного энерговыделения и/или условий теплообмена, моделирующих работу твэла в нештатном режиме.

### **3.3.3. Трехмерное нестационарное поле температур в стержневом тепловыделяющем элементе**

#### **Цели работы.**

1. Приобретение и закрепление навыков в разработке сценарных моделей решения задач теплообмена методом конечных элементов с помощью пакета *FlexPDE*.

2. Исследование влияния конструктивных и режимных параметров на изменение во времени поля температур в стержневом тепловыделяющем элементе.

#### **Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, сформулировать в математическом виде поставленную задачу.

2. Разработать сценарий решения задачи, в котором указать наименование и величины констант и переменных (в том числе и вспомогательных), параметры граничных и начальных условий, решаемые дифференциальные уравнения и искомые зависимости.

3. Реализовать поставленную задачу в виде программного кода в среде *FlexPDE*.

4. Привести результаты выполненных расчетов и произвести их анализ.

5. Оформить отчет о выполнении работы.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Геометрические характеристики рассматриваемого фрагмента тепловыделяющего элемента: высота фрагмента, диаметр твэла, толщина оболочки, диаметр внутреннего отверстия в топливе.

2. Теплофизические свойства топлива и оболочки, величина контактного термического сопротивления между топливом и оболочкой.

3. Рассматриваемые режимы работы: начальное распределение температуры твэла, пространственно временное распределение энерговыделения в твэле, температура теплоносителя и теплоотдача на поверхности оболочки.

4. Требуемая погрешность полученного решения.

В каждом варианте задания рассматриваются два набора режимных параметров:

1) с изотропным азимутальным распределением энерговыделения и условий теплообмена на поверхности оболочки;

2) с локальной областью измененного энерговыделения и/или условий теплообмена, моделирующих работу твэла в нештатном режиме.

### ***3.3.4. Двухмерное стационарное поле скоростей при течении несжимаемой вязкой жидкости в прямоугольном канале***

#### **Цели работы.**

1. Приобретение и закрепление навыков в разработке сценарных моделей решения задач теплообмена методом конечных элементов с помощью пакета *FlexPDE*.

2. Исследование влияния конструктивных и режимных параметров на поле скоростей в канале с препятствием.

**Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, сформулировать в математическом виде поставленную задачу.

2. Разработать сценарий решения задачи, в котором указать наименование и величины констант и переменных (в том числе и вспомогательных), параметры граничных и начальных условий, решаемые дифференциальные уравнения и искомые зависимости.

3. Реализовать поставленную задачу в виде программного кода в среде *FlexPDE*.

4. Привести результаты выполненных расчетов и произвести их анализ.

5. Оформить отчет о выполнении работы.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Геометрические характеристики рассматриваемого канала: продольный и поперечный размеры, размеры и местоположение препятствия (рис. 3.7).

2. Вязкость и плотность жидкости.

3. Граничные условия.

4. Требуемая погрешность полученного решения.

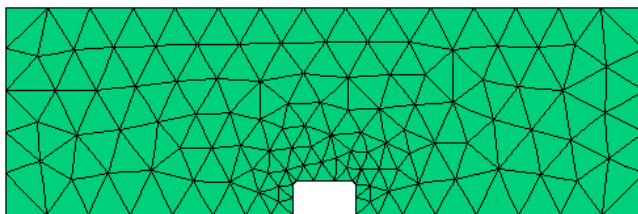


Рис. 3.7. Пример исследуемого канала

В каждом варианте задания рассматривается три–четыре набора исходных данных с разными геометрическими характеристиками препятствия и/или свойств жидкости для исследования их влияния на поле скоростей в канале.

### 3.3.5. Трехмерные стационарные поля температур и скоростей теплоносителя в тепловыделяющей сборке ВВЭР

#### Цели работы.

1. Приобретение и закрепление навыков в разработке сценарных моделей решения задач теплообмена методом конечных элементов с помощью пакета *FlexPDE*.

2. Знакомство с моделированием теплогидравлических процессов в тепловыделяющей сборке (ТВС) в приближении анизотропного пористого тела.

3. Исследование влияния конструктивных и режимных параметров на поля скоростей и температур теплоносителя в ТВС.

#### Задачи работы.

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, сформулировать в математическом виде поставленную задачу.

2. Разработать сценарий решения задачи, в котором указать наименование и величины констант и переменных (в том числе и вспомогательных), параметры граничных и начальных условий, решаемые дифференциальные уравнения и искомые зависимости.

3. Реализовать поставленную задачу в виде программного кода в среде *FlexPDE*.

4. Привести результаты выполненных расчетов и произвести их анализ.

5. Оформить отчет о выполнении работы.

**Варианты задания.** Распределение скоростей и температур теплоносителя в ТВС описывается в приближении анизотропного пористого тела:

$$\frac{\partial(\epsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial(\epsilon v)}{\partial y} + \frac{\partial(\epsilon w)}{\partial z} = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} - \\ - \mu_{ef} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + K_{xx} u = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} - \\ & - \mu_{ef} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + K_{yy} v = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial z} - \\ & - \mu_{ef} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + K_{zz} w - \varepsilon \rho g = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \lambda_{ef} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - q_V = 0. \quad (3.13)$$

Здесь  $\varepsilon = V_f / V$  – пористость по теплоносителю;  $V_f$  – объем ТВС, занятый теплоносителем;  $V$  – полный объем ТВС;  $\rho$  – плотность теплоносителя;  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости теплоносителя по  $x, y$  и  $z$ , соответственно (ось  $z$  направлена вдоль ТВС);  $\mu_{ef}$  – эффективная вязкость теплоносителя, определяющая перенос осредненного осевого импульса в направлении поперек сборки, которая зависит от коэффициента межканального обмена импульсом  $\mu^\Gamma$ ;  $K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}$  – главные компоненты коэффициента объемного сопротивления;  $p$  – давление теплоносителя;  $g$  – ускорение свободного падения;  $c_p$  – теплоемкость теплоносителя;  $\lambda_{ef}$  – эффективная теплопроводность теплоносителя, обусловленная молекулярной и турбулентной теплопроводностью жидкости, отклонениями скоростей потока теплоносителя и теплопереносом через твэлы;  $q_V$  – плотность теплоподвода к теплоносителю.

Геометрия рассматриваемой области представлена на рис. 3.8.

Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Геометрические характеристики рассматриваемого фрагмента ТВС: размеры, пористость по теплоносителю.

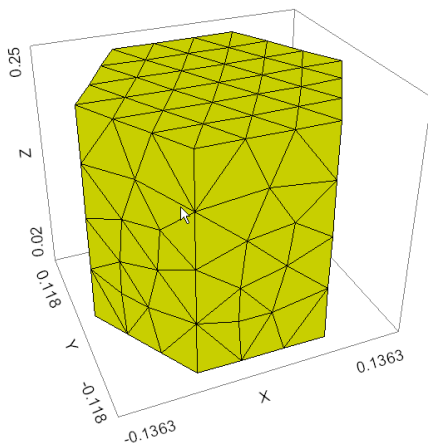


Рис. 3.8. Геометрия рассматриваемого фрагмента ТВС

2. Теплофизические свойства теплоносителя: его плотность и теплоемкость.

3. Эффективные коэффициенты переноса: теплопроводность  $\lambda_{ef}$ , вязкость  $\mu_{ef}$ , коэффициенты сопротивления потоку жидкости  $K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}$ .

4. Граничные условия.

5. Распределение теплоподвода к теплоносителю.

6. Требуемая погрешность полученного решения.

### 3.4. Контрольные вопросы

1. В чем заключаются основные отличия МКЭ от метода конечных разностей?

2. Что такое функция формы?

3. Каковы основные возможности программы *FlexPDE*?

4. Какие основные программные модули, существующие во *FlexPDE* для обеспечения решения задачи, вы знаете?

5. Какие основные этапы разработки сценария решения дифференциальных уравнений используются в программе *FlexPDE*?

6. Какие основные разделы имеет сценарий *FlexPDE*?

7. Как задается производная во *FlexPDE*?
8. Как и в каком разделе задается область решения уравнения во *FlexPDE*?
9. В каком виде и разделе задаются граничные условия во *FlexPDE*?
10. В каком разделе задаются начальные условия во *FlexPDE*?
11. Какие операторы интегрирования используются во *FlexPDE*?
12. Какие средства контроля и создания сеток используются во *FlexPDE*?
13. Чему по умолчанию равна относительная погрешность во *FlexPDE*?
14. Какие системы координат могут использоваться во *FlexPDE*?

## **4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕПЛОВЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АКТИВНОЙ ЗОНЕ РЕАКТОРОВ ТИПА ВВЭР**

### **4.1. Математическая модель**

Для корректного описания трехмерных тепловых и гидродинамических процессов в активной зоне реакторов типа ВВЭР, скомпонованной из бесчехловых сборок твэлов, используется многоуровневая модель. В этой модели наряду с расчетом полей температур, скорости и давления во всей активной зоне в приближении пористого тела (уровень «активная зона»), одновременно, в отдельных частях активной зоны производится расчет локальных значений (уровень «ячейка-твэл») и/или осредненных по сечению ячеек температур, скорости и давления (уровень «сборка твэлов»). На уровне локальных температур рассчитывается нестационарное распределение температур по радиусу тепловыделяющих элементов в каждой узловой точке по объему активной зоны. Решение задач более детального уровня позволяет определить все необходимые эффективные коэффициенты переноса импульса и энергии и тем самым замкнуть систему уравнений сохранения в пористом теле. Многоуровневый расчет корректно учитывает временные зависимости эффективных коэффициентов, что является достоинством метода при расчетах переходных процессов. Реализация такого подхода в полном объеме требует значительных вычислительных мощностей, поэтому большинство эффективных коэффициентов рассчитывается в модели в квазистационарном приближении с помощью соотношений, которые определяются заранее при проведении специальных экспериментальных или теоретических исследований.

#### ***4.1.1. Основные уравнения модели теплогидравлики активной зоны в приближении пористого тела***

В приближении пористого тела активная зона реактора представляет собою многокомпонентную среду. Количество компонентов в зависимости от уровня детализации задачи может быть про-

извольным. В описываемом варианте модели предполагается, что активная зона состоит из следующих компонентов:

- однофазный теплоноситель;
- тепловыделяющие элементы нескольких типов ( $k = 1, \dots, type$ );
- конструкционные элементы.

В принятой модели пористого тела среднее значение произвольного параметра  $\Phi$  может определяться как истинно-среднее

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{V_{\Phi}} \int_{V_{\Phi}} \Phi dV \quad \text{или} \quad \langle \Phi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_{\Phi}} \Phi dV. \quad \text{Они}$$

связаны между собой через долю соответствующего компонента  $\langle \Phi \rangle = \varepsilon_{\Phi} \bar{\Phi}$ ,  $\varepsilon_{\Phi} = V_{\Phi}/V$  (далее все знаки осреднения опущены).

Представительный объем осреднения  $V$  состоит из следующих частей:

$$V = V_f + \sum_{k=1}^{type} V_k + V_{construct}, \quad (4.1)$$

где  $V_f$ ,  $V_k$ ,  $V_{construct}$  – части объема  $V$ , приходящиеся на теплоноситель, твэлы  $k$ -го типа и конструкционные элементы, соответственно. Подробно геометрия представительного объема осреднения применительно к активной зоне ВВЭР будет описана в разд. 4.2.

Так как доля конструкционных элементов в зоне невелика и плотность энерговыделения в них мала, то распределение по активной зоне средней температуры конструкционных элементов  $T_{construct}$  принимается равным распределению средней температуры теплоносителя  $T_f$ .

Уравнения сохранения массы, импульса, энергии и уравнение состояния теплоносителя в модели пористого тела имеют следующий вид:

$$\frac{\partial(\varepsilon_f \rho_f)}{\partial \tau} + \text{div}(\varepsilon_f \rho_f \vec{u}) = 0, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\varepsilon_f \rho_f u_i)}{\partial \tau} + \text{div}(\varepsilon_f \rho_f \vec{u} u_i) = \\ & = \text{div}(\vec{\sigma}) - F_i - \varepsilon_f (\text{grad } P, \vec{e}_i) + \varepsilon_f \rho_f g_i, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$c_f \left( \frac{\partial(\varepsilon_f \rho_f T_f)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\varepsilon_f \rho_f \vec{u} T_f) \right) = \operatorname{div}(\vec{q}) + q_V, \quad (4.4)$$

$$\rho_f = \rho_f(P, T_f), \quad (4.5)$$

где  $\varepsilon_f \equiv \frac{V_f}{V}$  – пористость по теплоносителю;  $\tau$  – время;  $\rho_f$  – плотность теплоносителя;  $\vec{u}$  – вектор скорости теплоносителя;  $\vec{\sigma}$  – тензор напряжений, содержащий эффективную вязкость теплоносителя  $\mu_{ef}$ ;  $F_i = K_i \rho_f |\vec{u}| u_i$  –  $i$ -я проекция силы сопротивления потоку жидкости;  $P$  – давление теплоносителя;  $\vec{e}_i$  – единичный направляющий вектор  $i$ -й координаты;  $g_i$  –  $i$ -я проекция ускорения свободного падения;  $c_f$  – теплоемкость теплоносителя;  $\vec{q}$  – вектор теплового потока, содержащий эффективную теплопроводность теплоносителя  $\lambda_{ef}$ ;  $q_V$  – эффективная плотность энерговыделения в теплоносителе.

В уравнениях (4.2)–(4.5) скорости и температуры теплоносителя определены как истинно средние, а тепловой поток и компоненты тензора напряжений как средние по объему.

Эффективная плотность энерговыделения в теплоносителе обусловлена процессом теплоотдачи с поверхности тепловыделяющих элементов:

$$q_V \equiv \sum_{k=1}^{type} N_k \alpha_{V_k} (T_k - T_f), \quad (4.6)$$

где  $N_k$  – число твэлов  $k$ -го типа в единице объема активной зоны;  $T_k$  – средняя температура твэлов  $k$ -го типа;  $\alpha_{V_k}$  – объемный коэффициент теплопередачи от твэлов  $k$ -го типа к теплоносителю,  $\alpha_{V_k} \equiv \frac{S_k}{V} \frac{1}{R_k + 1/\alpha_k}$ ;  $S_k$  – площадь поверхности твэла  $k$ -го типа;  $\alpha_k$  – локальный коэффициент теплоотдачи от твэлов  $k$ -го типа к теплоносителю;  $R_k$  – термическое сопротивление между поверхностью и точкой с весом  $\rho_c$  и средней температурой твэла  $k$ -го типа.

Уравнения сохранения энергии для твэлов в модели пористого тела имеют вид

$$c_k \frac{\partial(\varepsilon_k \rho_k T_k)}{\partial \tau} = -\alpha_{V_k} (T_k - T_f) + \varepsilon_k q_{V_k}, \quad (4.7)$$

где  $T_k$  – средняя с весом  $\rho_c$  температура твэла  $k$ -го типа,

$$T_k \equiv \left( \int_{V_{fuel} + V_{clad}} \rho_c T dV \right)_k / ((\rho_c)_k V_k); \quad (\rho_c)_k - \text{среднее значение}$$

произведения плотности на теплоемкость твэла,  $(\rho_c)_k \equiv$

$$\equiv \left( \int_{V_{fuel} + V_{clad}} \rho c dV \right)_k / V_k; \quad V_k, V_{fuel}, V_{clad} - \text{объемы твэла, топлива и}$$

оболочки, соответственно,  $V_k = V_{fuel} + V_{clad}$ ;  $\varepsilon_k$  – пористость по

твэлам  $k$ -го типа,  $\varepsilon_k = \frac{V_k}{V}$ ;  $q_{V_k}$  – плотность энерговыделения в твэ-

лах  $k$ -го типа, которая определяется в результате нейтронно-физического расчета.

Уравнение (4.7) получено путем осреднения по объему твэла  $V_k$  уравнения теплопроводности. Такое представление позволяет объединить уравнения для средних температур топлива и оболочки в одно, что вдвое уменьшает количество решаемых уравнений. Для обратного преобразования средневзвешенной температуры  $T_k$  в средние температуры топлива или оболочки  $T_{kj}$ , необходимые для пересчета нейтронно-физических констант по их температурным зависимостям, используется соотношение:

$$T_{kj} = T_f + \frac{R_{kj} + 1/\alpha_k}{R_k + 1/\alpha_k} (T_k - T_f), \quad (4.8)$$

где  $R_{kj}$  – термическое сопротивление между поверхностью и точкой со средней температурой топлива или оболочки твэла  $k$ -го типа;  $\alpha_k$  – коэффициент теплоотдачи от твэлов  $k$ -го типа.

Для определения термических сопротивлений  $R_{kj}$  для каждого контрольного объема решаются одномерные уравнения теплопроводности

$$\left[ (\rho_c) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + q_V \right]_k \quad (4.9)$$

с граничными условиями третьего рода.

#### **4.1.2. Замыкающие соотношения модели теплогидравлики активной зоны**

Система уравнений (4.2)–(4.5), моделирующая трехмерные процессы тепломассопереноса в активной зоне реакторов ВВЭР в приближении пористого тела, содержит коэффициенты эффективной теплопроводности  $\lambda_{ef}$ , эффективной вязкости  $\mu_{ef}$  и коэффициент сопротивления потоку жидкости  $K$ . Корректное определение этих коэффициентов, а также термического сопротивления твэлов  $R_{kj}$  и коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_k$  в решающей степени влияет на достоверность результатов, получаемых с помощью расчетного комплекса. Для определения замыкающих соотношений модели теплогидравлики применительно к активной зоне реактора типа ВВЭР, содержащей сборки стержневых твэлов без чехлов, когда существенно проявляются трехмерность полей скоростей и температур в зоне и анизотропия переноса тепла и импульса, было выполнено исследование, результаты которого приводятся далее.

**Эффективная теплопроводность теплоносителя.** Эффективный перенос тепла в движущемся теплоносителе определяется как суперпозиция тепловых потоков, обусловленных молекулярной и турбулентной теплопроводностью жидкости, отклонениями скоростей потока теплоносителя и теплопереносом через твэлы:

$$\langle q \rangle = q^{\text{мол}} + q^{\text{тур}} + q^{\text{отк}} + q^{\text{ст}}. \quad (4.10)$$

Поток отклонения  $q^{\text{отк}}$  обусловлен мелкомасштабным (с масштабом, меньшим размеров объема осреднения  $V$ ) движением жидкости, которое стало «невидимым» в результате локального осредне-

ния по объему. По форме  $q^{\text{отк}}$  напоминает турбулентный поток тепла  $q^{\text{отк}} = \overline{(\rho_c)ut} - (\rho_c)\bar{u}\bar{t} = (\rho_c)u^\vee t^\vee$ , но  $u^\vee$  и  $t^\vee$  – не турбулентные пульсации, а отклонения скоростей и температур – разница между локальными значениями скоростей и температур и средними по объему в данной точке.

Так как твэлы не контактируют между собой, то глобальный поток тепла по твэлам в поперечном направлении отсутствует. Но перетечки тепла через твэлы «от жидкости к жидкости» существуют, если есть неравномерность в распределении температуры жидкости, обтекающей твэл, и определяются этой неравномерностью. Такой механизм переноса тепла учитывается в (4.10) членом  $q^{\text{ст}}$ .

Каждой составляющей теплового потока в (4.10) можно поставить в соответствие коэффициент эффективной теплопроводности так, что

$$\langle q \rangle = -(\lambda^{\text{мол}} + \lambda^{\text{тур}} + \lambda^{\text{отк}} + \lambda^{\text{ст}}) \text{grad } \bar{t} = -\bar{\lambda} \text{grad } \bar{t}. \quad (4.11)$$

При этом полная эффективная теплопроводность теплоносителя складывается из теплопроводностей, обусловленных различными механизмами переноса тепла

$$\bar{\lambda} = \lambda^{\text{мол}} + \lambda^{\text{тур}} + \lambda^{\text{отк}} + \lambda^{\text{ст}}. \quad (4.12)$$

В силу существенной анизотропии среды все коэффициенты теплопроводности в (4.12) являются тензорными величинами.

В зависимости от характера анизотропии составляющие коэффициента эффективной теплопроводности в (4.12) можно разбить на две группы. Первую группу составляют коэффициенты, обусловленные молекулярной теплопроводностью жидкости и теплопереносом через твэлы, вторую – коэффициенты, связанные с теплопереносом за счет турбулентной теплопроводности и за счет отклонения скоростей. Вид тензоров теплопроводности для потоков каждой группы определен в работах А.С. Корсуна.

Главными осями анизотропии тензоров теплопроводности первой группы являются направления вдоль и поперек сборки твэлов в активной зоне. В качестве главных компонентов тензора в первом приближении можно использовать эффективные коэффициенты теплопроводности в направлениях вдоль и поперек сборки твэлов

$\lambda_{\parallel}$  и  $\lambda_{\perp}$ . При этом в системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль твэлов, и в предположении ортотропной симметрии

$$\lambda_{zz} = \lambda_{\parallel}, \quad \lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \lambda_{\perp}. \quad (4.13)$$

Тепловые потоки второй группы обладают более сложной структурой анизотропии. Специальные исследования позволили приближенно привести тензор к диагональному виду в системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль оси сборки твэлов. При этом компоненты тензоров  $\lambda^{\text{тур}}$  и  $\lambda^{\text{отк}}$  или их суммы  $\lambda^{\text{дин}} = \lambda^{\text{тур}} + \lambda^{\text{отк}}$  имеют вид

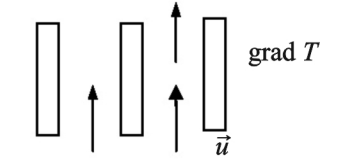
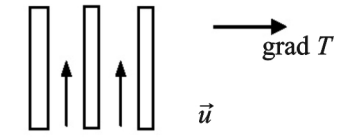
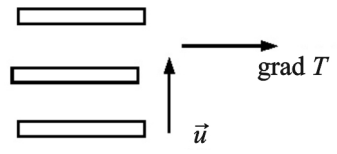
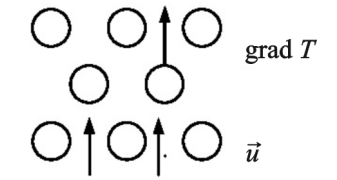
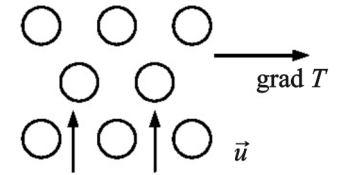
$$\begin{aligned} \lambda_{zz} &= \lambda_{111}U_z^2 + \lambda_{010}(U_y^2 + U_x^2), \\ \lambda_{yy} &= \lambda_{100}U_z^2 + \lambda_{000}(U_y^2 + U_x^2), \\ \lambda_{xx} &= \lambda_{100}U_z^2 + \lambda_{000}(U_y^2 + U_x^2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $U_i$  – компоненты безразмерной скорости теплоносителя ( $U_i = u_i / \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ ), под  $i$  имеются ввиду индексы  $x, y, z$ .

Соотношения (4.14) содержат четыре параметра, которые представляют собой «базовые» или «опорные» коэффициенты теплопроводности, т.е. коэффициенты эффективной теплопроводности при определенных сочетаниях направлений векторов скорости потока и градиента температуры по отношению к оси сборки твэлов. Схемы процессов для определения «опорных» коэффициентов и механизмы теплопереноса представлены в табл. 4.1.

В практике расчетов теплового режима активных зон обычно пренебрегают теплопереносом по жидкости в направлении вдоль активной зоны за счет эффективной теплопроводности теплоносителя ( $\lambda_{zz}$ ) по сравнению с конвективным переносом продольной скоростью. Такое упрощение допустимо, если число Пекле, построенное по эффективной продольной теплопроводности ( $Pe = \rho_c u_{zz} d_r / \lambda_{zz}$ ), достаточно велико ( $Pe \geq 10$ ). В противном случае необходимо ставить дополнительное граничное условие на выходе из активной зоны и менять процедуры численного расчета.

Таблица 4.1

Схема процесса	$\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ , механизм переноса
	$\lambda_{100}$ , турбулентный
	$\lambda_{111}$ , турбулентный и со скоростями отклонения
	$\lambda_{010}$ , турбулентный
	$\lambda_{001}$ , турбулентный и со скоростями отклонения
	$\lambda_{000}$ , турбулентный и со скоростями отклонения

Поперечная теплопроводность теплоносителя в соответствии с (4.12)–(4.14) и с учетом равенства нулю (по определению) компоненты  $\lambda_{100}^{\text{отк}} = 0$  определяется соотношением:

$$\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \lambda_{\perp}^{\text{мол}} + \lambda_{\perp}^{\text{ст}} + \lambda_{100}^{\text{тур}} \cdot U_z^2 + (\lambda_{000}^{\text{тур}} + \lambda_{000}^{\text{отк}}) \cdot (U_x^2 + U_y^2). \quad (4.15)$$

Далее приводятся рекомендации для определения опорных коэффициентов, фигурирующих в соотношении (4.15).

**Эффективная теплопроводность, обусловленная молекулярной теплопроводностью теплоносителя.** Для определения эффективной теплопроводности при переносе тепла поперек активной зоны ( $\lambda_{\perp}^{\text{мол}}$ ) в пределах эквивалентной ячейки сборки твэлов решалось уравнение теплопереноса при граничном условии  $\frac{\partial t}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$  на поверхностях твэлов и на линиях симметрии и при по-

стоянных значениях температур на входе  $t_{\text{вх}}$  и выходе  $t_{\text{вых}}$  из ячейки. Задача решалась численно для треугольной решетки твэлов в диапазоне шагов  $s/d = 1,05 - 2,0$ .

Результаты расчетов показали, что значения коэффициентов эффективной теплопроводности коррелируют с разностью  $\varepsilon - \varepsilon_1$  и для треугольной решетки обобщены единой зависимостью

$$\lambda_{\perp}^{\text{мол}} = \lambda(\varepsilon - \varepsilon_1), \quad (4.16)$$

где  $\lambda$  – молекулярная теплопроводность теплоносителя;  $\varepsilon$  – пористость решетки стержней;  $\varepsilon_1$  – пористость при плотной упаковке ( $s/d = 1,0$ ).

Формула для коэффициента молекулярного обмена теплом получена в результате экспериментальных исследований межканального обмена в треугольных сборках стержней

$$\mu_{\text{м}}^{\text{т}} = \frac{6,7(s/d - 1)}{\text{Re} \cdot s} \quad (4.17)$$

при  $1,10 \leq s/d \leq 1,40$ ;  $70 \leq \text{Re} \leq 1500$ . Пересчет по формуле (4.17) дает для эффективного коэффициента теплопроводности

$$\lambda_{\perp}^{\text{мол}} = \lambda \cdot 1,52 \frac{s/d - 1}{s/d}, \quad (4.18)$$

что хорошо согласуется с (4.16). В заданном диапазоне  $s/d$  расчеты по формулам (4.16) и (4.17) отличаются на 8–12 %.

**Эффективная теплопроводность, обусловленная теплопереносом через твэлы.** Механизм теплопереноса через твэлы в поперечном направлении и рекомендации по расчету коэффициента эффективной теплопроводности ( $\lambda_{\perp}^{ст}$ ) приводятся в работах А.С. Корсуна:

$$\lambda_{\perp}^{ст} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\alpha d} + \frac{1}{\lambda\beta_1} \right)^{-1}, \quad (4.19)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи на поверхности твэла;  $d$  – диаметр твэла;  $\lambda$  – теплопроводность жидкости;  $\beta_1$  – параметр подобия, введенный П.А. Ушаковым, равный для твэла с оболочкой:

$$\beta_1 = \frac{\lambda_{об} \frac{1 - m(2r_1/d)^2}{\lambda}}{1 + m(2r_1/d)^2}, \quad m = \frac{\lambda_{об} - \lambda_T}{\lambda_{об} + \lambda_T}, \quad (4.20)$$

$r_1$  – внутренний радиус оболочки твэла;  $\lambda_{об}$  – теплопроводность оболочки твэла;  $\lambda_T$  – теплопроводность топливной композиции.

**Эффективная теплопроводность, обусловленная турбулентным переносом тепла,** бывает двух типов.

*Эффективная теплопроводность в направлении поперек пучка при его продольном обтекании* ( $\lambda_{100}^{тур}$ ). Опорный коэффициент эффективной теплопроводности  $\lambda_{100}^{тур}$  можно определить, основываясь на экспериментальных данных. Его можно рассчитать, зная коэффициент межканального турбулентного обмена теплом  $\mu_{тур}^T$ .

Коэффициент межканального турбулентного и турбулентно-конвективного обмена при обтекании пучков «гладких» стержней измерялся многими авторами. Подробный анализ и обобщение экспериментальных данных различных авторов приводятся в работе Жукова А.В. и др. На основании полученной обобщающей зависимости и теоретических оценок, выполненных А.С. Корсуном для  $\lambda_{100}^{тур}$ , имеем

$$\lambda_{100}^{\text{ТР}}/\lambda = \Psi_{\text{ж}}(t) \cdot \text{Re}^{0,8} \text{Pr}, \quad (4.21)$$

где  $\Psi_{\text{ж}}(t) = 1,51 \cdot 10^{-3} / \sqrt{t-1}$ ,  $t = s/d$ .

*Эффективная теплопроводность в направлении поперек сборки при ее поперечном обтекании ( $\lambda_{000}^{\text{ТР}}$ ).* Рекомендации для определения этого коэффициента получены на основе результатов работ, посвященных описанию турбулентного переноса в поперечно обтекаемых сборках на базе  $k-\varepsilon$  моделей турбулентности.

Итоговая рекомендация имеет вид

$$\lambda_{000}^{\text{ТР}}/\lambda = \Psi_{000}^{\text{ТР}}(t) \cdot \text{Re} \text{Pr}, \quad (4.22)$$

где  $\Psi_{000}^{\text{ТР}}(t) = 0,0083(\varepsilon - \varepsilon_1) / \sqrt{\varepsilon(t)}$ .

**Эффективная теплопроводность, обусловленная переносом скоростями отклонения.** Систематические исследования механизма теплопереноса скоростями отклонений при обтекании пористых структур типа пучков стержней или труб выполнены А.С. Корсуном. На основании полученных результатов

$$\lambda_{000}^{\text{ОТК}}/\lambda = \Psi_{000}^{\text{ОТК}}(t) \cdot \text{Re} \text{Pr} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-0,231 \sqrt{\lambda_{\text{ТР}}} l_{\text{аз}}/d_{\Gamma}\right) \right], \quad (4.23)$$

где  $\Psi_{000}^{\text{ОТК}} = 1,30 \cdot \sqrt{\varepsilon(t)} \cdot (d_{\Gamma}(t) / d)^{-2}$ .

**Методика расчета коэффициента эффективной теплопроводности теплоносителя.** Напомним, что полная эффективная теплопроводность теплоносителя, обтекающего сборку твэлов, складывается из теплопроводностей, обусловленных различными механизмами переноса тепла в соответствии с (4.15):

$$\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \lambda_{\perp}^{\text{МОЛ}} + \lambda_{\perp}^{\text{СТ}} + \lambda_{100}^{\text{ТР}} \cdot U_z^2 + (\lambda_{000}^{\text{ТР}} + \lambda_{000}^{\text{ОТК}}) \cdot (U_x^2 + U_y^2). \quad (4.24)$$

Компоненты тензоров эффективной теплопроводности, которые определяются различными механизмами переноса, рассчитываются по формулам:

молекулярным переносом  $\lambda_{\perp}^{\text{МОЛ}}$  по (4.18),

теплопереносом через твэлы  $\lambda_{\perp}^{\text{СТ}}$  по (4.19),

турбулентным переносом  $\lambda_{100}^{\text{ТР}}$  и  $\lambda_{000}^{\text{ТР}}$  по (4.21) и (4.22),

переносом скоростями отклонения  $\lambda_{000}^{\text{ОТК}}$  по (4.23).

Во всех этих формулах число Рейнольдса рассчитывается по гидравлическому диаметру межтвэльного пространства  $d_{\Gamma}$  и полной истинно средней скорости в соответствующей точке активной зоны  $\bar{u}$ , равной  $\bar{u} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ . Компоненты безразмерной скорости в (4.15) равны  $U_i = u_i / \bar{u}$ .

Описание анизотропных свойств теплопереноса в такой существенно неизотропной среде, как активная зона, содержащей бесчехловые ТВС, является относительно новой темой. Большинство приведенных результатов получено расчетно-теоретическим путем, некоторые носят характер оценок и поэтому требуют дополнительного анализа при тестировании методики.

В практических расчетах тепловых режимов установок при использовании тех или иных аппроксимаций, выборе альтернативных расчетных рекомендаций следует учитывать, что использование *заниженных* значений любых компонентов в тензоре теплопроводности  $\bar{\lambda}$  приводит к *завышению* рассчитанных неравномерностей температурного поля, т. е. дает расчет с «запасом».

**Коэффициент объемного сопротивления.** Сила сопротивления, действующая на жидкость со стороны твэлов (см. (4.3)):

$$\vec{F} = K \cdot \vec{u}, \quad (4.25)$$

где  $K$  – коэффициент объемного сопротивления. В известных работах по модели пористого тела для определения компонентов силы сопротивления при обтекании сборки твэлов под произвольным углом рекомендованы соотношения

$$F_z = \rho \frac{\lambda_{\parallel}^{\text{ТР}}}{2d_{\Gamma}} \bar{u} u_z, \quad F_x = \rho \frac{\lambda_{\perp}^{\text{ТР}}}{2d_{\Gamma}} \bar{u} u_x, \quad F_y = \rho \frac{\lambda_{\perp}^{\text{ТР}}}{2d_{\Gamma}} \bar{u} u_y, \quad (4.26)$$

где  $\lambda_{\parallel}^{\text{ТР}}$  и  $\lambda_{\perp}^{\text{ТР}}$  – коэффициенты гидравлического сопротивления при чисто продольном и чисто поперечном обтекании сборок, соответ-

ственно. Формулы для их вычисления приводятся в книге Ф.М. Митенкова и др. При продольном обтекании

$$\lambda_{\parallel}^{\text{TP}} = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}} \Lambda(s/d), \quad \Lambda = 0,66 [1 + (s/d - 1)^{0,32}], \quad (4.27)$$

при поперечном обтекании

$$\lambda_{\perp}^{\text{TP}} = [10^{3,14} \text{Re}^{-0,22} - 0,42] \cdot (s/d - 1)^{-0,125}. \quad (4.28)$$

Сопоставления (4.25) и (4.26) показывают, что коэффициент сопротивления  $K$  является тензором с компонентами вдоль главных осей

$$k_{zz} = \rho \frac{\lambda_{\parallel}^{\text{TP}}}{2d_{\Gamma}} \bar{u}, \quad k_{xx} = k_{yy} = \rho \frac{\lambda_{\perp}^{\text{TP}}}{2d_{\Gamma}} \bar{u}. \quad (4.29)$$

Объемная сила сопротивления и градиент давления – наиболее значимые члены в уравнении сохранения импульса (4.3). Это означает, что погрешности в определении силы сопротивления непосредственно сказываются на точности определения поля скоростей. В этой связи необходимо отметить, что описание тензора сопротивления в виде (4.29) не имеет достаточного экспериментального обоснования и может рассматриваться как первое приближение.

**Эффективная вязкость теплоносителя.** В качестве эффективной вязкости потока теплоносителя, обтекающего сборки твэлов, принимают коэффициент вязкости, ответственный за перенос осредненного осевого импульса в направлении поперек сборки, который можно рассчитать, зная коэффициент межканального обмена импульсом  $\mu^{\Gamma}$ .

Используя для определения коэффициента межканального обмена импульсом  $\mu^{\Gamma}$  рекомендации из книги В.И. Субботина и др., для эффективного коэффициента вязкости получено

$$\nu_{\text{эф}}/\nu = 0,0143 \sqrt{s/d - 1} \cdot \text{Re}^{0,8}. \quad (4.30)$$

**Коэффициент теплоотдачи.** Обобщение экспериментальных данных по теплоотдаче при «косом» обтекании сборок твэлов выполнено в книге Ф.М. Митенкова и др. Средний по периметру

стержня коэффициент теплоотдачи рекомендуется рассчитывать по формуле

$$\bar{\alpha} = \alpha_{\text{поп}} (\sin \varphi)^{0,6} (2\varphi/\pi)^{0,4} + \alpha_{\text{прод}} (\cos \varphi)^{0,8} (1 - \varphi/\pi)^{0,2}, \quad (4.31)$$

где  $\varphi$  – угол обтекания сборки ( $\varphi = 0$  – продольное обтекание,  $\varphi = \pi/2$  – поперечное);  $\alpha_{\text{поп}}$  и  $\alpha_{\text{прод}}$  – коэффициенты теплоотдачи при поперечном и продольном обтекании сборок, которые при  $\text{Pr} \approx 1$ ;  $1,1 \leq s/d \leq 1,5$ ;  $10^3 \leq u_{\text{max}} d/\nu \leq 2,0 \cdot 10^5$  определяются по следующим соотношениям:

$$\alpha_{\text{прод}} = \frac{\lambda}{d_{\Gamma}} 0,023 \left( \frac{\bar{u} d_{\Gamma}}{\nu} \right)^{0,8} 1,1 \left( \frac{d_{\Gamma}}{d} \right)^{0,1}, \quad (4.32)$$

$$\alpha_{\text{поп}} = \frac{\lambda}{d} 0,34 \left( \frac{u_{\text{max}} d}{\nu} \right)^{0,6}.$$

Выполненный анализ показал, что в указанном диапазоне изменения параметров  $\alpha_{\text{прод}}/\alpha_{\text{поп}} = 0,26 \pm 0,04$ . Тогда вместо (4.31) можно записать

$$\bar{\alpha} = \alpha_{\text{прод}} \cdot [3,85(\sin \varphi)^{0,6} (2\varphi/\pi)^{0,4} + (\cos \varphi)^{0,8} (1 - \varphi/\pi)^{0,2}]. \quad (4.33)$$

Влияние нестационарности процессов теплопереноса на коэффициент теплоотдачи учитывается в расчетной методике с помощью специально разработанного программного модуля.

**Граничные условия на непроницаемой поверхности.** Переход к модели пористого тела приводит, кроме появления дополнительных неизвестных (объемного сопротивления, эффективных теплопроводности и вязкости), к неопределенности в условиях на границе пористого тела. Для средних скоростей традиционное условие прилипания на твердой поверхности, ограничивающей пористую среду, в общем случае не применимо. На непроницаемой поверхности граничные условия имеют вид

$$u_n (n = 0) = 0, \quad (4.34)$$

$$\left( \frac{\partial u_z}{\partial n} + \frac{u_z}{l_z} \right)_{n=0} = 0, \quad (4.35)$$

$$\left( \frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{u_\tau}{l_\tau} \right)_{n=0} = 0, \quad (4.36)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к ограничивающей поверхности;  $u_n$  – нормальная к стенке компонента скорости;  $u_z$  – компонента скорости вдоль оси сборки;  $u_\tau$  – касательная к стенке и нормальная к оси  $z$  компонента скорости;  $l_z$  и  $l_\tau$  – длины скольжения, соответственно.

Для определения  $l_z$  получено

$$\frac{s/\sqrt{3}}{l_z} = \left[ \left( \frac{d_{r\infty}}{d_{r1}} \right)^{10/7} - 1 \right] \cdot \Phi(P, \Omega_1), \quad (4.37)$$

$$\Phi(P, \Omega_1) = \left( 1 + \frac{2P}{1 + \sqrt{1 + 4P}} + \frac{P}{\Omega_1} \right), \quad (4.38)$$

где  $\Omega_1 = \omega_1/\omega_\infty$ ;  $\omega_1$ ,  $d_{r1}$ ,  $\omega_\infty$ ,  $d_{r\infty}$  – площади и гидравлические диаметры пристенной и внутренних ячеек, соответственно;  $P = (0,028 + 0,24(s/d - 1)) \text{Re}^{0,15}$ ,  $s/d = 1,0-1,5$ .

Длину скольжения для поперечной компоненты скорости можно оценить по формуле

$$s/l_\tau \sqrt{3} = (K_1 - 1) \Phi(P, \Omega_1). \quad (4.39)$$

Член  $(K_1 - 1)$  учитывает отличие пристенной ячейки от остальных:

$$(K_1 - 1) \approx \frac{t - H}{(H - 1)^{2,3}} (0,89H + 0,22t - 1,125), \quad (4.40)$$

где  $t = s / d$ ;  $H = 2b / d$ ,  $b$  – расстояние от центра крайнего твэла до стенки. Функция  $\Phi(P, \Omega_1)$  определяется по (4.38), но значения  $P$  и  $\Omega_1$  отличаются:  $P \approx 0,108 \text{Re}^{0,2} t^{-0,2} (4t^2 / \pi - 1)^{-2}$ ,  $\Omega_1 = \frac{b}{s}$ .

## 4.2. Программная реализация модели трехмерных тепловых и гидродинамических процессов в активной зоне реактора

### 4.2.1. Алгоритм численного решения уравнений теплогидравлики

При решении системы нестационарных трехмерных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами и сложными обратными связями (4.2)–(4.5) для вязкой, сжимаемой жидкости была использована идея метода маркеров и ячеек. В этом методе вместо уравнения сохранения массы (4.2) решается уравнение Пуассона для давления. Причем дискретный аналог уравнения Пуассона является линейной комбинацией дискретных аналогов исходных уравнений движения в частных производных. Дискретный аналог, построенный непосредственно из уравнения Пуассона в частных производных, в общем случае не согласуется с дискретными аналогами исходных уравнений движения.

Возможность использования метода маркеров и ячеек основывается на специальном выборе смещенных друг относительно друга разбиениях расчетной области. Обязательное наличие смещенных разбиений приводит к тому, что обычно метод используется только в рамках ортогональной геометрии. В данной работе метод распространен на контрольные объемы, имеющие форму правильных шестиугольников. Это позволяет при моделировании активной зоны (АЗ) рассматривать в качестве элементов разбиения поперечного сечения отдельные ТВС.

Продольное сечение разбиения расчетной области на смещенные контрольные объемы (КО) представлено на рис. 4.1. Поперечное сечение разбиения расчетной области на смещенные КО и тринадцатиточечный шаблон для описания переноса импульса в поперечном сечении показаны на рис. 4.2. Новый подход к описанию

переноса импульса в поперечном сечении позволил сократить вдвое количество поперечных проекций скорости.

Описание конвективного переноса импульса в поперечном направлении по схеме против потока (см. рис. 4.2) происходит следующим образом: сначала определяются нормальные составляющие вектора скорости на гранях с учетом выбранных направлений

$$\begin{aligned}
 \text{a: } u_{\perp a} &= \frac{1}{3}(u_3 + u_8 + u_5), \\
 \text{b: } u_{\perp b} &= \frac{1}{3}(u_4 + u_7 + u_2), \\
 \text{c: } u_{\perp c} &= \frac{1}{3}(u_{11} + u_2 + u_4), \\
 \text{d: } u_{\perp d} &= \frac{1}{3}(u_5 + u_{12} + u_3),
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

если нормальная составляющая вектора скорости направлена из КО, то потеря импульса пропорциональна произведениям

$$\begin{aligned}
 \text{a: } u_1 u_{\perp a}, \\
 \text{b: } u_1 u_{\perp b}, \\
 \text{c: } u_1 u_{\perp c}, \\
 \text{d: } u_1 u_{\perp d},
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

в противном случае приобретение импульса пропорционально произведениям

$$\begin{aligned}
 \text{a: } \frac{1}{2}(u_1 + u_9) u_{\perp a}, \\
 \text{b: } \frac{1}{2}(u_1 + u_6) u_{\perp b}, \\
 \text{c: } \frac{1}{2}(u_1 + u_{10}) u_{\perp c}, \\
 \text{d: } \frac{1}{2}(u_1 + u_{13}) u_{\perp d}.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

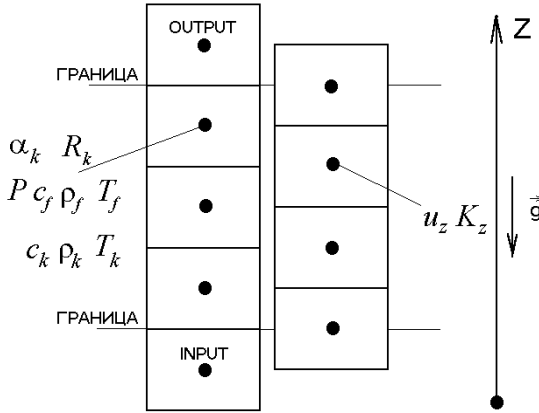
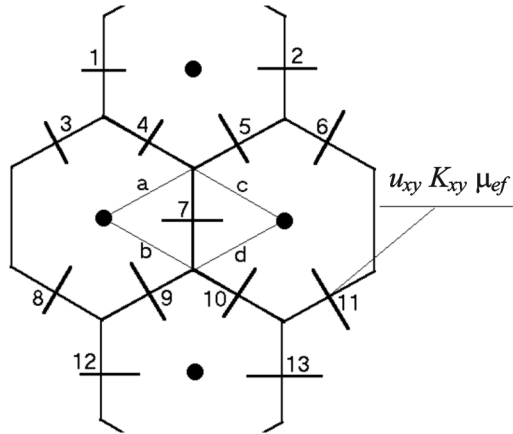


Рис. 4.1. Продольное разбиение расчетной области на смещенные контрольные объемы

Рис. 4.2. Поперечное разбиение расчетной области на смещенные контрольные объемы и тринадцатиточечный шаблон для описания переноса импульса в поперечном сечении



Дискретный аналог системы (4.2)–(4.5) строится методом интегрирования по контрольному объему. Используя теорему Гаусса–Остроградского, строим дискретный аналог уравнения (4.2) на КО для  $\rho_f$

$$\varepsilon_f \frac{\rho_f^{\tau+\Delta\tau} - \rho_f^\tau}{\Delta\tau} + \frac{1}{V_z} \left[ \sum_{l=1}^8 \left( \rho_f \vec{u}_l, (\varepsilon_f \vec{S})_l \right) \right]^{\tau+\Delta\tau} = 0, \quad (4.44)$$

и дискретный аналог уравнения (4.3) на контрольных объемах для  $u_z$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_f \frac{(\rho_f u_z)^{\tau+\Delta_\tau} - (\rho_f u_z)^\tau}{\Delta_\tau} = \\ & = \left[ \frac{1}{V_z} \left( - \sum_{l=1}^8 \rho_f \vec{u} u_z (\varepsilon_f S)_l \Big|_{\vec{n}_l} + \sum_{l=1}^6 \mu_{ef} \text{grad } u_z S_l \Big|_{\vec{n}_l} \right) - \right. \\ & \quad \left. - K_z \rho_f |\vec{u}| u_z - \varepsilon_f \frac{\Delta P}{\Delta_z} - \varepsilon_f \rho g \right]^{\tau+\Delta_\tau} \end{aligned} \quad (4.45)$$

и для  $u_{xy}$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_f \frac{(\rho_f u_{xy})^{\tau+\Delta_\tau} - (\rho_f u_{xy})^\tau}{\Delta_\tau} = \\ & = \left[ - \frac{1}{V_{xy}} \sum_{l=1}^4 \rho_f \vec{u} u_{xy} (\varepsilon_f S)_l \Big|_{\vec{n}_l} - K_{xy} \rho_f |\vec{u}| u_{xy} - \varepsilon_f \frac{\Delta P}{\Delta_{xy}} \right]^{\tau+\Delta_\tau}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где  $\vec{n}_l$  – внешняя нормаль к грани КО;  $S_l$  – площадь  $l$ -й грани КО;  $\Delta_\tau$  – временной шаг;  $u_{xy}$ ,  $u_z$  – поперечные и продольные проекции скорости, соответственно;  $V_{xy}$ ,  $V_z$  – объем КО для поперечных и продольных проекций скорости, соответственно.

Затем путем линейной комбинации дискретных аналогов (4.44)–(4.46) получаем уравнение Пуассона для давления на КО для  $\rho_f$

$$\nabla^2 P^{\tau+\Delta_\tau} = \Omega, \quad (4.47)$$

где  $\Omega$  – источник уравнения Пуассона.

Граничное условие (условие Неймана) для давления получается в результате проецирования уравнений нестационарного движения на нормаль к границе. В результате чего реализованы все возмож-

ные типы нестационарных граничных условий для скорости и давления:

- задано давление во всех КО на входе и выходе АЗ;
- задано давление в одних КО и скорости в других КО на входе и выходе АЗ;
- заданы скорости во всех КО на входе и выходе АЗ.

В одном и том же КО на границе АЗ скорость и давление одновременно не задаются.

Дискретный аналог уравнения сохранения энергии теплоносителя (4.4) имеет следующий вид:

$$c_f \epsilon_f \frac{(\rho_f T_f)^{\tau+\Delta\tau} - (\rho_f T_f)^\tau}{\Delta\tau} = \left[ \frac{1}{V_z} \left( -\sum_{l=1}^8 c_f \rho_f \vec{u} T_f (\epsilon_f S)_l \Big|_{\vec{n}_l} + \sum_{l=1}^6 \lambda_f \text{grad} T_f S_l \Big|_{\vec{n}_l} \right) + q_V \right]^{\tau+\Delta\tau} \quad (4.48)$$

с условием на границе АЗ:

если поток теплоносителя направлен во внутрь АЗ, то температура такого потока определяется из условия перемешивания в нижнем или верхнем коллекторе АЗ;

если поток теплоносителя направлен наружу АЗ, то температура такого потока равна температуре в КО на границе.

Система линейных уравнений (4.45)–(4.48) решается методом прогонки по направлениям итерационно и совместно с дискретными аналогами уравнений уровня «ячейка-твэл».

Для решения конечно-разностных одномерных уравнений теплопроводности уровня «ячейка-твэл» также используется метод прогонки. При этом используется неравномерное разбиение твэла по радиусу на кольцевые слои с одинаковой площадью поперечного сечения и учитывается наличие контактного термического сопротивления между топливом и оболочкой.

Описанная модель реализована в программном модуле ТРЕТОН, предназначенном для анализа теплогидродинамических процессов в активной зоне ВВЭР.

#### 4.2.2. Описание программного модуля ТРЕТОН

**Структурная схема программного модуля.** Программный код ТРЕТОН предназначен для теплогидравлического расчета трехмерных переходных процессов в активной зоне ВВЭР с бесчехловыми ТВС. В нем реализованы алгоритмы многоуровневого решения уравнений теплообмена и гидродинамики.

Программа ТРЕТОН написана на языке Фортран. Структурная схема программы приведена на рис. 4.3.

Определение искомых давлений, скоростей и температур теплоносителя и температур твэлов в программе осуществляется в цикле по времени как в случае моделирования переходных процессов, так и при расчете стационарных режимов. В последнем случае шаг по времени играет роль коэффициента, регулирующего скорость сходимости итераций к стационарному распределению.

На каждом временном шаге в программе сначала определяются поля скоростей и давления теплоносителя, которые используются затем при расчете температур твэлов и теплоносителя. Как отмечено в предыдущем разделе, в алгоритме численного решения вместо уравнения неразрывности используется уравнение Пуассона для давления, поэтому в итерационной процедуре определения полей скоростей и давлений проверка интегрального баланса массы теплоносителя в активной зоне используется в качестве критерия завершения итерационного процесса. Согласование полей температур в твэлах и теплоносителе выполняется также итерационно, при этом количество итераций фиксировано и задается на входе программы.

Процесс согласования полей температур контролируется путем проверки выполнения ряда локальных и интегральных тепловых балансов в АЗ. При расчете стационарных режимов выполнение баланса определяет момент завершения итераций, а в переходных режимах величины дисбалансов могут рассматриваться в качестве индикатора степени нестационарности процесса. В программе контролируются следующие тепловые балансы:

- для каждой ТВС в каждой расчетной точке по высоте проверяется совпадение выделенной энергии с энергией, переданной с поверхности в теплоноситель;

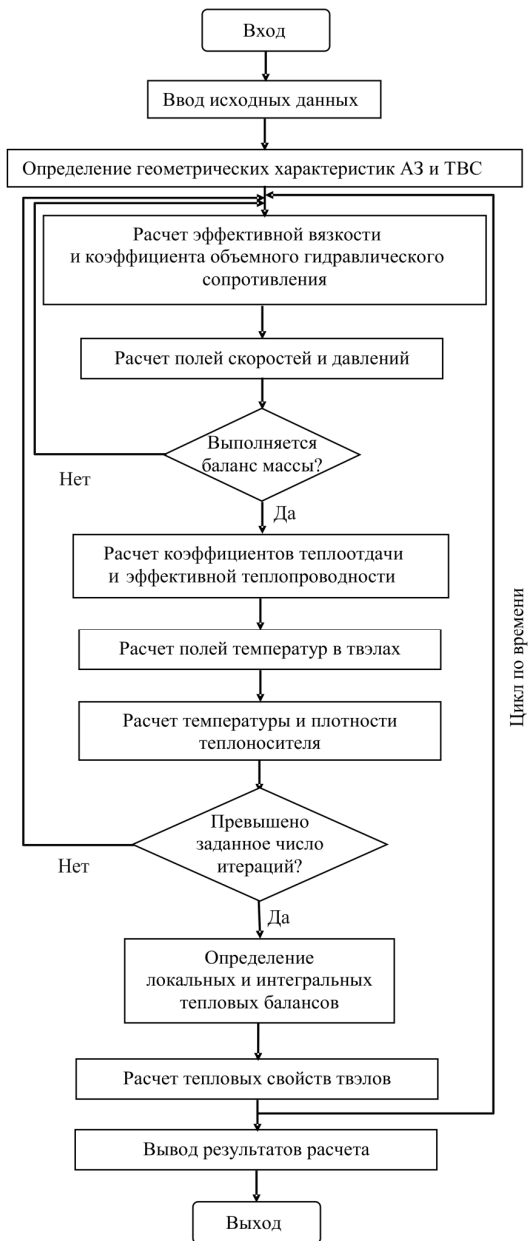


Рис. 4.3. Структурная схема программы ТРЕТОН

- определяется дисбаланс между полным энерговыделением в АЗ и энергией, отводимой теплоносителем из АЗ;
- в каждой расчетной точке разбиения АЗ проверяется выполнение стационарного дискретного аналога уравнения сохранения энергии для теплоносителя.

**Описание основных процедур программы.** Процедуры программы сгруппированы в ряд модулей, каждый из которых предназначен для выполнения указанных на структурной схеме функций.

*Модуль расчета геометрических характеристик АЗ и ТВС.*

- HeatHydroOnce считывает исходные данные из параметрического файла и вызывает подпрограммы определения геометрии АЗ и ТВС, а также теплофизических свойств твэла и теплоносителя.
- CrossConnection производит нумерацию граней ТВС по всей АЗ и определяет номера соседних элементов.
- HeatHydroGeometry определяет площади граней ТВС, их объемы и площади проходного сечения.
- RodOnce получает данные о радиусе твэлов и их эквивалентном диаметре из параметрического файла и рассчитывает относительные шаги решетки.
- RodGeometry рассчитывает площади занимаемые топливом и оболочкой.

*Модуль расчета замыкающих соотношений модели пористого тела.*

- Kin\_viscosity используется для расчета коэффициентов эффективной вязкости.
- FormFriction служит для определения коэффициентов объемного сопротивления потоку теплоносителя в продольном и поперечном направлениях.
- HeatConduction результатом процедуры являются коэффициенты эффективной теплопроводности.
- Alf служит для расчета коэффициентов теплоотдачи.

*Модуль расчета полей скоростей и давлений.*

- Viter служит для решения уравнений сохранения продольной и поперечных компонент импульса.
- Pes используется для подготовки источника в уравнении Пуассона для давления.

- Piter служит для решения уравнения Пуассона для давления.
- V\_blockade используется для задания блокировки части поперечного сечения АЗ при рассмотрении аварийных процессов.

*Модуль расчета полей температуры теплоносителя и твэлов.*

- Heat служит для решения уравнения сохранения энергии теплоносителя.
- Rod используется для решения уравнения теплопроводности в твэле (уровень «ячейка-твэл»).
- Rod\_average служит для определения средних температур оболочки и твэла, необходимых для нейтронно-физического расчета.
- InOut\_f определяет средние температуры теплоносителя на входе в АЗ и выходе из нее.

*Модуль расчета теплофизических свойств теплоносителя, топлива и оболочки твэлов.*

- Density используется для расчета плотности теплоносителя.
- RodProperty служит для определения коэффициентов теплопроводности, удельной теплоемкости и плотности топлива и оболочки.

### **Описание ввода основных исходных параметров.**

*Раздел parameter(..) файла Thehyco.fh:*

n=100 – количество разбиений по высоте активной зоны,  $n \geq 1$ ;  
 n\_rod=10 – количество разбиений по радиусу топливного столба твэла,  $n\_rod \geq 2$ ;

type=1 – количество разных типов твэлов;

Pi=3.1415926 – число  $\pi$ ;

Gravity=9.8 – ускорение свободного падения,  $m/c^2$ ;

C\_p1=4800 – удельная теплоемкость воды при нормальных условиях, Дж/(кг·К).

*Раздел RodList файла Thehyco.ini:*

tpr=0.75 3.86 4.25 4.55 – разбиение твэлов на контрольные объемы; указаны, соответственно, радиусы центрального отверстия твэла, границы топливного столба, центра оболочки, внешней границы оболочки, мм;

s\_mesh=12.75 – шаг твэлов, мм;

d\_mesh=9.1 – диаметр твэла, мм;

$R_{\text{contact}}=0.00024$  – контактное сопротивление топливо-оболочка,  $\text{м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$ .

*Раздел HEATandHYDROlist файла Thehydro.ini:*

$dr=0.234$  – поперечный размер расчетной области, м;

$dz=0.125$  – продольный размер расчетной области, м;

$n_{\text{RodsInTVC}}=312$  – количество твэлов в ТВС, шт.;

$\text{Disbalance}=0.01$  – расчетный дисбаланс;

$p_{\text{input}}=16200000$  – входное давление, Па;

$p_{\text{output}}=16042100$  – выходное давление, Па;

$\text{BlockadePorosity}=0.5$  – проницаемость блокады в поперечном сечении ТВС;

$N_{\text{Blockade}}=1$  – размер (количество разбиений) блокады по высоте активной зоны,  $1 \leq N_{\text{Blockade}} \leq n$ .

*Раздел crd файла Thehydro.ini.* Здесь указываются относительные поперечные координаты ТВС (расчетных элементов). Центральная кассета имеет координаты (0, 0).

Файл *T\_IN.txt*. Задается входная температура теплоносителя, °С. Номер строки соответствует номеру кассеты на картограмме (рис. 4.4).

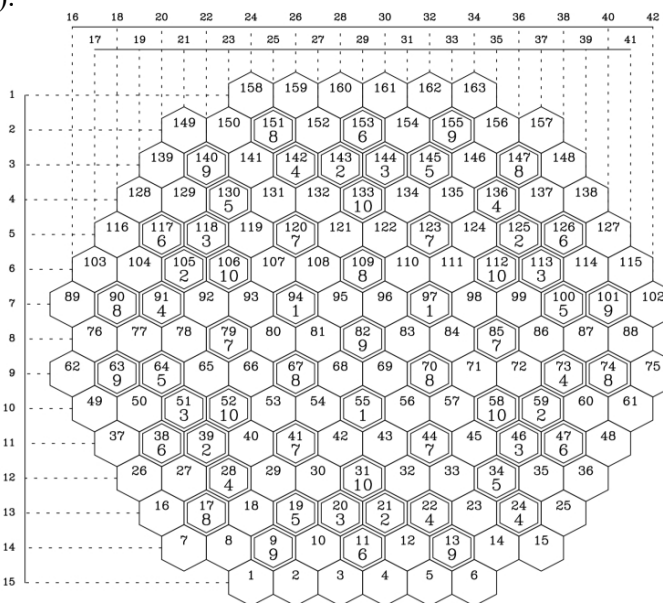


Рис. 4.4. Поперечное сечение активной зоны

*Файл TABL.* Находятся таблицы термодинамических свойств воды и водяного пара и таблицы критических расходов воды и пароводяной смеси.

*Файл Q6.txt.* Задается распределение энерговыделения по всем расчетным элементам, Вт. Номер строки соответствует номеру кассеты на картограмме (см. рис. 4.4), номер столбца соответствует порядковому номеру элемента, начиная снизу активной зоны. Размерность массива элементов  $163 \times n$ .

**Организация работы программного комплекса ТРЕТОН.** Для запуска программы необходимо наличие в одной директории следующих файлов:

TRETON.exe – скомпилированный файл программы;

ТНЕНУСО.ini – файл с параметрами для расчета;

T\_IN.txt – файл с входными температурами;

Q6.txt – файл с распределением энерговыделения;

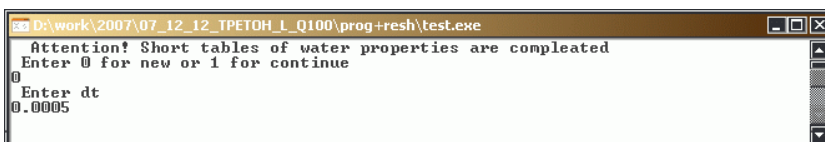
TABL – таблицы свойств;

ТНЕНУСО.dat – файл с начальными распределениями температур, скоростей и давлений (необходим в случае продолжения расчетов).

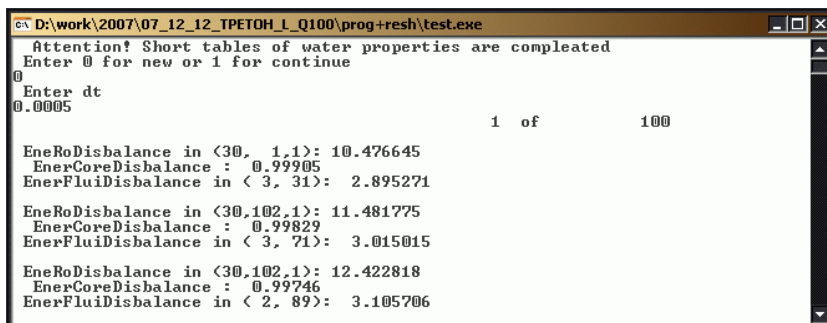
При запуске программы появится окно, в котором нужно выбрать 0 (для нового расчета) или 1 (для продолжения старого расчета) и нажать *Enter*:



Далее необходимо ввести шаг по времени  $dt$  (который фактически отвечает за степень сходимости). Его величина зависит от пространственного шага. Для выбранных разбиений эта величина составляет  $\sim 0,001$ :



После чего начнется расчет, в ходе которого будут отображаться текущие локальные и интегральные тепловые дисбалансы в АЗ:



```

D:\work\2007\07_12_12_TPETHH_1_Q100\prog+resh\test.exe
Attention! Short tables of water properties are compleated
Enter 0 for new or 1 for continue
0
Enter dt
0.0005
1 of 100
EneRoDisbalance in <30, 1,1>: 10.476645
EneCoreDisbalance : 0.99905
EneRFluidDisbalance in < 3, 31>: 2.895271
EneRoDisbalance in <30,102,1>: 11.481775
EneCoreDisbalance : 0.99829
EneRFluidDisbalance in < 3, 71>: 3.015015
EneRoDisbalance in <30,102,1>: 12.422818
EneCoreDisbalance : 0.99746
EneRFluidDisbalance in < 2, 89>: 3.105706

```

Расчет продолжается до тех пор, пока не будет получена точность, не более заданного *Disbalance*, или пока не кончится указанное в программе количество итераций. После каждой итерации происходит вывод в файл следующих основных результатов:

- температуры теплоносителя в каждой кассете по высоте АЗ;
- температуры внутренней и наружной поверхности оболочки твэла в каждой кассете по высоте АЗ;
- температуры топлива в каждой кассете по высоте АЗ;
- плотности теплоносителя в каждой кассете по высоте АЗ;
- давления теплоносителя в каждой кассете по высоте АЗ;
- скорости теплоносителя в каждой кассете по высоте АЗ;
- расхода теплоносителя в каждой кассете по высоте АЗ;
- тепловыделения в каждой кассете по высоте АЗ;
- распределения температурного поля в твэле.

Формат вывода данных для распределений по высоте АЗ следующий: номер столбца соответствует порядковому номеру элемента, начиная снизу АЗ. Для распределений, полученных в поперечном сечении АЗ, номер строки соответствует номеру кассеты на картограмме (см. рис. 4.4), а для распределений температур по радиусу твэла – порядковому номеру кольцевого слоя твэла, начиная от центра.

После завершения расчетов происходит также запись полученных трехмерных полей температур, скоростей, давлений, распределения энерговыведения в файл ТНЕНУСО.dat. Этот файл служит

для продолжения расчетов (или новых расчетов) с использованием полученных распределений в качестве начальных условий.

### 4.3. Варианты лабораторных работ

#### 4.3.1. Номинальный режим работы реактора ВВЭР

**Цель работы.** Исследование и анализ полей энерговыделения и теплогидравлических параметров реактора типа ВВЭР при работе в стационарном состоянии на номинальной мощности.

**Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, подготовить исходные данные для расчетов: входная температура теплоносителя, распределение энерговыделения по активной зоне, входное и выходное давление, геометрические размеры элементов и др.

2. Провести расчеты с указанной точностью.

3. Найти кассеты с максимальными температурами теплоносителя на выходе из АЗ, а также с максимальными температурами оболочки и топлива.

4. Построить для найденных и полученной при задании кассет следующие графики:

1) температуры теплоносителя, внутренней и наружной оболочки твэла по высоте АЗ;

2) температуры топлива по высоте АЗ;

3) плотности теплоносителя по высоте АЗ;

4) давления теплоносителя по высоте АЗ;

5) радиального распределения температуры в твэле, где наблюдается максимальная температура топлива.

5. Построить распределения подогревов и расходов теплоносителя для каждой ТВС в поперечном сечении АЗ.

6. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу, привести исходные данные и результаты численных расчетов, сделать заключение о полученных результатах.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Проект реактора.

2. Геометрические размеры твэла, ТВС, АЗ.
3. Количество твэлов в ТВС и ТВС в АЗ.
4. Тепловая мощность реактора.
5. Температура теплоносителя на входе в АЗ.
6. Давление теплоносителя на входе в АЗ.
7. Давление теплоносителя на выходе из АЗ.
8. Распределение энерговыделения в АЗ.
9. Точность расчетов.

#### ***4.3.2. Режимы работы ВВЭР на повышенной мощности***

**Цель работы.** Исследование и анализ полей энерговыделения и теплогидравлических параметров реактора ВВЭР при работе на повышенной мощности. Сравнение эксплуатационных параметров с номинальными.

##### **Задачи работы.**

1. В соответствии с индивидуальным заданием, выданным преподавателем, подготовить исходные данные для расчетов: входная температура теплоносителя, распределение энерговыделения по активной зоне, входное и выходное давление, геометрические размеры элементов и др.

2. Провести расчеты с указанной точностью.

3. Найти кассеты с максимальными температурами теплоносителя на выходе из АЗ, а также с максимальными температурами оболочки и топлива.

4. Построить для найденных и полученной при задании кассет следующие графики:

1) температуры теплоносителя, внутренней и наружной оболочки твэла по высоте АЗ;

2) температуры топлива по высоте АЗ;

3) плотности теплоносителя по высоте АЗ;

4) давления теплоносителя по высоте АЗ;

5) радиального распределения температуры в твэле, где наблюдается максимальная температура топлива.

Провести сравнение с аналогичными распределениями, найденным в лабораторной работе 4.3.1 для номинального режима работы.

5. Построить распределения подогревов и расходов теплоносителя для каждой ТВС в поперечном сечении АЗ.

6. Определить уровни превышения температур теплоносителя, оболочки и топлива по сравнению с номинальным режимом работы реактора.

7. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу, привести исходные данные и результаты численных расчетов, сделать заключение о полученных результатах и возможности безопасной работы реактора на данном уровне мощности.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Проект реактора.
2. Геометрические размеры твэла, ТВС, АЗ.
3. Количество твэлов в ТВС и ТВС в АЗ.
4. Уровень форсирования мощности реактора.
5. Температура теплоносителя на входе в АЗ.
6. Давление теплоносителя на входе в АЗ.
7. Расход теплоносителя.
8. Распределение энерговыделения в АЗ.
9. Точность расчетов.

#### ***4.3.3. Режимы работы ВВЭР с пониженным уровнем расхода теплоносителя***

**Цель работы.** Исследование и анализ полей энерговыделения и теплогидравлических параметров реактора ВВЭР при работе на неполном числе работающих главных циркуляционных насосов (ГЦН).

**Задачи работы.**

1. Подготовить исходные данные для расчетов: зоны с различными температурами теплоносителя на входе в реактор, распределение энерговыделения по АЗ с соответствующим уменьшением мощности реактора, входное и выходное давление, геометрические размеры элементов и др.

2. Провести расчеты с указанной точностью.

3. Найти кассеты с максимальными температурами теплоносителя на выходе из АЗ, а также с максимальными температурами оболочки и топлива.

4. Построить для найденных и полученной при задании кассет следующие графики:

1) температуры теплоносителя, внутренней и наружной оболочки твэла по высоте АЗ;

2) температуры топлива по высоте АЗ;

3) плотности теплоносителя по высоте АЗ;

4) давления теплоносителя по высоте АЗ;

5) радиального распределения температуры в твэле, где наблюдается максимальная температура топлива.

5. Построить распределения подогревов и расходов теплоносителя для каждой ТВС в поперечном сечении АЗ.

6. Определить уровни превышения температур теплоносителя, оболочки и топлива по сравнению с номинальным режимом работы реактора.

7. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу, привести исходные данные и результаты численных расчетов, сделать заключение о полученных результатах и возможности безопасной работы реактора при отключении ГЦН.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Проект реактора.

2. Геометрические размеры твэла, ТВС, АЗ.

3. Количество твэлов в ТВС и ТВС в АЗ.

4. Месторасположение и количество отключенных ГЦН.

5. Уровень снижения мощности реактора.

6. Температуры теплоносителя на входе в АЗ.

7. Давление теплоносителя на входе в АЗ.

8. Расход теплоносителя.

9. Распределение энерговыделения в АЗ.

10. Точность расчетов.

#### **4.3.4. Режимы работы ВВЭР при блокировке проходного сечения ТВС**

**Цель работы.** Исследование и анализ теплогидравлических параметров реактора ВВЭР при блокировке проходного сечения ТВС.

**Задачи работы.**

1. Подготовить исходные данные для расчетов: размер и положение блокировки проходного сечения ТВС в поперечном сечении АЗ, распределение энерговыделения по активной зоне, входное и выходное давление, геометрические размеры элементов и др.

2. Провести расчеты с указанной точностью.

3. Найти кассеты с максимальными температурами теплоносителя на выходе из АЗ, а также с максимальными температурами оболочки и топлива.

4. Построить для найденных и полученной при задании кассет следующие графики:

1) температуры теплоносителя, внутренней и наружной оболочки твэла по высоте АЗ;

2) температуры топлива по высоте АЗ;

3) скорости теплоносителя по высоте АЗ;

4) давления теплоносителя по высоте АЗ;

5) радиального распределения температуры в твэле, где наблюдается максимальная температура топлива.

5. Построить распределения подогревов и расходов теплоносителя в ТВС с блокировкой проходного сечения и соседних ТВС.

6. Определить уровни превышения температур теплоносителя и оболочки по сравнению с номинальным режимом работы реактора.

7. Оформить отчет о выполнении работы, в котором описать поставленную задачу, привести исходные данные и результаты численных расчетов, сделать заключение о полученных результатах и возможности безопасной работы реактора при отключении ГЦН.

**Варианты задания.** Индивидуальный вариант задания содержит следующую информацию.

1. Проект реактора.

2. Геометрические размеры твэла, ТВС, АЗ.

3. Количество твэлов в ТВС и ТВС в АЗ.

4. Местоположение ТВС с блокировкой проходного сечения.

5. Размер и проницаемость блокады.
6. Температуры теплоносителя на входе в АЗ.
7. Давление теплоносителя на входе в АЗ.
8. Расход теплоносителя.
9. Распределение энерговыделения в АЗ.
10. Точность расчетов.

#### 4.4. Контрольные вопросы

1. Назовите основные положения модели пористого тела.
2. Какие объемы осреднения характерны для АЗ реакторов в приближении модели пористого тела?
3. Какие условия используются на границе пористой среды?
4. Каковы основные идеи метода численного решения уравнений в программном комплексе ТРЕТОН?
5. Какие фрагменты используются в качестве элементов разбиения для компонент АЗ реактора?
6. Какие виды граничных условий могут быть реализованы?
7. Какие численные методы используются для решения уравнений в программном комплексе ТРЕТОН?
8. Каким образом осуществляется проверка согласования полей температур, скоростей, давлений? Какие балансы проверяются?
9. Какие основные подпрограммы комплекса ТРЕТОН вы знаете? Для чего они предназначены?
10. Каким способом задаются входные значения теплофизических параметров, полей энерговыделения?
11. Какой набор файлов необходим для работы программного комплекса ТРЕТОН?
12. Какие расчетные данные можно наблюдать при выполнении программы?
13. Каковы критерии завершения работы программы? Какие данные являются конечным результатом работы программного комплекса ТРЕТОН?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКОВ

1. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена: Учеб. пособие для теплофизич. и теплоэнергетич. спец. вузов / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов. М.: Высшая школа, 1990.
2. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. М.: Мир, 1991.
4. Joseph E. Flaherty. CSCI, MATH 6860. Finite element analysis. Lecture Notes: Spring 2000. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/>.
5. Дворецкий С.И., Ермаков А.А., Иванов О.О., Акулинин Е.И. Компьютерное моделирование процессов и аппаратов пищевой, био- и химической технологии в среде FlexPDE: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2006.
6. Корсун А.С. Эффективная теплопроводность пористых структур, составленных из пучков стержней или труб // Теплообмен ММФ\_4. Минск. 2000. Т. 10. С. 242–250.
7. Жуков А.В., Сорокин А.П., Матюхин Н.М. Межканальный обмен в ТВС быстрых реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1989.
8. Корсун А.С., Меринов И.Г., Харитонов В.С. Эффективная теплопроводность теплоносителя, омывающего стержневую сборку // Труды Четвертой Российской национальной конференции по теплообмену: в 8 т. Т.7. Радиационный и сложный теплообмен. Теплопроводность, теплоизоляция. М.: Издательский дом МЭИ, 2006. С. 235–238.
9. Корсун А.С., Сатановский Э.А. Эффективная теплопроводность за счет скоростей отклонения при поперечном обтекании теплоносителем сборок стержней. // Труды РНКТ-4. В 8 т. Т. 5. Двухфазные течения. Дисперсные потоки и пористые среды. М.: Издательство МЭИ, 2002. С. 231–234.
10. Субботин В.С. и др. Решение задач реакторной теплофизики на ЭВМ. М.: Атомиздат, 1979.
11. Митенков Ф.М., Головкин В.Ф., Ушаков П.А., Юрьев Ю.С. Проектирование теплообменных аппаратов АЭС. М.: Энергоатомиздат, 1988.
12. Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П. Справочник по гидравлическим расчетам. М.: Энергоатомиздат, 1990.
13. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. М.: Мир, 1990.

И.Г. Меринов, Ю.А. Маслов, М.В. Баясхаланов

Моделирование теплогидравлических процессов  
в реакторных установках  
и элементах теплообменного оборудования ЯЭУ

*Учебное пособие*

Редактор *М.В. Макарова*

Подписано в печать 07.12.2022. Формат 60×84 1/16.

Печ. л. 9,25. Уч.-изд. л. 9.25. Изд. № 007-1.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».  
155409 Москва, Каширское шоссе, 31.



