



Н. О. Агасян, С. Б. Хохлачев

022-86

22 3310
MFN

**ИНСТАНТОНЫ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ
СО СПОНТАННО-НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ**

МОСКВА 1986

Министерство высшего и среднего специального
образования СССР
Московский ордена Трудового Красного Знамени
инженерно-физический институт

Н.О.Агасян, С.Б.Хохлачев

ИНСТАНТОНЫ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ
СО СПОНТАННО-ПОРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

Утверждено
редсоветом института

Москва 1986

УДК 539.12

Агасян Н.О., Хохлачев С.Б. Инстантоны в калибровочных теориях со спонтанно-нарушенной симметрией. — М.: препринт МИФИ, 022-86, 1986, 16 с.

Предложена модификация петлевого разложения на фоне среднего поля, применимая при вычислении инстантонных вкладов в теориях, где отсутствуют топологически-тривиальные решения классических уравнений движения.

© Московский инженерно-физический институт, 1986 г.

Рукопись поступила в издательский отдел 4/IV-86г.
Ответственный за выпуск Н.О.Агасян

Л.-62997 Подписано в печать 29/V-1986г. Формат 60x84 1/16
Объем п.л 1 Уч.-изд.л. 1,0 Тираж 100 экз.
Изд. № 022-86 Заказ 1764 Цена 5 коп.

Типография МИФИ

Каширское шоссе, д.31

ВВЕДЕНИЕ

Впервые роль инстантонных флуктуаций в калибровочных теориях со спонтанно-нарушенной симметрией исследовал Тоофт [1] в связи с возможностью несохранения барионного заряда в теории электро-слабых взаимодействий Вайнберга-Салама. Вопросы, связанные с существованием топологически-нетривиальных решений классических уравнений движения, обсуждались в [2]. Совсем недавно ряд авторов сделал попытку учесть инстантоно-подобные полевые конфигурации в амплитуде распада протона в моделях Большого объединения $SU(5)$ [3] и $SO(10)$ [4].

Однако в теориях с нарушенной масштабной инвариантностью хорошо известный метод петлевого разложения на фоне среднего поля наталкивается на препятствие — нужного решения классических уравнений движения просто не существует. Инстантону выгодно, уменьшая свой размер φ (при этом понижается классическое действие), стянуться в точечную особенность с $\varphi = 0$. Поэтому стандартный квазиклассический метод не применим для расчета вкладов топологических псевдоконфигураций в различные физические амплитуды. Цель этой работы показать, как нужно модифицировать петлевое разложение, чтобы оно стало последовательным и в этом случае.

Статья построена следующим образом.

В разделе I мы вводим необходимые обозначения и показываем, как возникает нетривиальное инстантонное решение с $\varphi \neq 0$ в методе эффективного действия. Обсуждается физическая причина, по которой квантовые флуктуации приводят к существованию нетривиального решения.

В разделе 2 рассматривается масштабно-неинвариантная теория $SU(2)$ — калибровочного поля, взаимодействующего с Хиггсовским изодублетом. Формулируется модифицированный метод петлевого разложения в этой модели и вычисляется топологическая восприимчивость. Раздел 3 посвящен обсуждению инстантона в теории Вайнберга-Салама. В заключение обсуждаются полученные результаты.

I. КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА

Рассмотрим случай $SU(2)$ - калибровочной теории с изодублетом Хиггсовских частиц. Действие этой модели в евклидовом пространстве записывается в виде:

$$S[A_\mu, \Phi^+, \Phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{8\pi\alpha} F_{\mu\nu}^2 + (\nabla_\mu \Phi)^\dagger (\nabla_\mu \Phi) + V(\Phi^\dagger \Phi) \right\}. \quad (1)$$

Здесь $A_\mu = A_\mu^a \frac{\tau^a}{2}$ - вектор-потенциал калибровочного поля, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ - его тензор напряженности и $\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ - ковариантная производная.

Потенциальная энергия Хиггсовского поля $V = \lambda (\Phi^\dagger \Phi - \frac{v_0}{2})^2$.

Топологическая классификация калибровочных полей в этом случае совпадает с соответствующей классификацией в $K \times D$. Можно поэтому поставить задачу о вычислении вклада топологически нетривиальных флуктуаций в различные физические величины. Для этой цели применяется хорошо известный метод петлевого разложения на фоне среднего поля. При этом стандартный квазиклассический метод предполагает, что существует решение классических уравнений движения:

$$\frac{1}{4\pi\alpha} (\nabla_\mu F_{\mu\nu})^a = -\Phi^\dagger : \frac{\tau^a}{2} \nabla_\nu \Phi \quad (2)$$

$$\nabla_\mu \nabla_\mu \Phi = \frac{\partial V}{\partial \Phi},$$

вблизи которого производится усреднение по квантовым флуктуациям. Если бы масштабная симметрия не была нарушена, то уравнения (2) имели бы хорошо определенное инстантонное решение

$A_\mu^{ce}(x-x_0, \rho, \Omega)$, $\Phi^{ce}(x-x_0, \rho, \Omega)$, зависящее от параметров x_0 - центр инстантона, ρ - его масштаб, Ω - фаза, соответствующая глобальному изотопическому повороту. В процессе вычислений эти коллективные координаты заменили бы в функциональном интеграле нулевые моды.

В Хиггсовской фазе, однако, решения у классических уравнений движения не существует. В этом несложно убедиться, используя простые масштабные соображения. Сделаем следующее преобразование над полями

$$A_\mu(x) \rightarrow \frac{1}{\rho} A_\mu\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad \Phi(x) \rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

и перейдем в действии к интегрированию по

$$S(\rho) = \int d^4x \left[\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \rho^2 (\nabla_\mu \Phi)^\dagger (\nabla_\mu \Phi) + \rho^4 V(\Phi^\dagger \Phi) \right].$$

Дифференцируя это выражение по $\ln \rho$, найдем, что производная

$$\frac{\partial S}{\partial \ln \rho} = 2\rho^2 \int d^4x \left[(\nabla_\mu \Phi)^\dagger (\nabla_\mu \Phi) + 2\rho^2 V(\Phi^\dagger \Phi) \right] \geq 0$$

неотрицательна и, следовательно, инстантону выгодно, уменьшая ρ , стянуться в точечную особенность с $\rho=0$. С точки зрения уравнений это означает отсутствие солитонного решения.

С другой стороны, мы ожидаем, что учет квантовых флуктуаций приведет к тому, что среднее значение масштаба ρ окажется ненулевым. Хорошо известно, что в калибровочных теориях без Хиггсовых полей квантовые флуктуации "выбрасывают" ρ из области малых значений, а взаимодействие с Хиггсовским полем ведет к сжатию инстантона. Конкуренция этих явлений и приводит к существованию стабильного инстантона. При рассмотрении квантовых эффектов из-за наличия ультрафиолетовых расхождений возникает необходимость регуляризовать теорию. При масштабном растяжении $x_\mu \rightarrow x_\mu / \rho$ следует соответственно изменять и радиус ультрафиолетового обрезания $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0 \rho$. Это приводит к появлению дополнительных аномальных слагаемых

$$S(\rho) = \left(\frac{1}{8\pi^2 \alpha(\Lambda_0)} - \frac{6}{16\pi^2} \ln \rho \right) \int d^4x \left[\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \rho^2 (\nabla_\mu \Phi)^\dagger (\nabla_\mu \Phi) + \rho^4 V(\Phi^\dagger \Phi) \right].$$

Откуда находим, что стабильному инстантону отвечает $\rho_c \neq 0$, определяемое из уравнения

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \ln \rho} \right|_{\rho=\rho_c} = -\frac{6}{16\pi^2} \int d^4x \left[\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + 2\rho_c^2 (\nabla_\mu \Phi)^\dagger (\nabla_\mu \Phi) + 2\rho_c^4 V(\Phi^\dagger \Phi) \right] \stackrel{(3)}{=} 0$$

где в нашем случае $6 = \frac{22}{3} - \frac{1}{\epsilon} = \frac{43}{6}$.

Строго говоря мы должны были бы учесть, что параметры λ и β_0 также зависят от радиуса обрезания Λ_0 . Поля A_μ и Φ , входящие в (3) и являющиеся решениями квантовых уравнений движения, зависят от Λ_0 через α , λ , β_0 . Поэтому ρ_c должно находиться из такого уравнения, в котором учтена и эта зависимость параметров теории от Λ_0 . Однако, в однопетлевом

приближении в ситуации с большим значением Хиггсовского конденсата ϕ_0 перенормировки этих величин в поле инстантона не существенны. Таким образом, простые масштабные соображения, применимые в классическом случае для выяснения вопроса о существовании солитонного решения, не применимы в квантовой теории из-за возможного появления масштабных аномалий. Отметим здесь также, что именно из-за асимптотически-свободного характера теории по заряду α возникает устойчивая полевая конфигурация. В нуль-зарядной ситуации (большое число Хиггсовских мультиплетов) очевидно этого не произойдет.

Для того, чтобы проиллюстрировать высказанные выше соображения, воспользуемся методом эффективного действия, который позволяет получать квантовые уравнения для средних полей. Для достаточно больших ϕ_0 размер стабильного инстантона оказывается малым $\rho_c \sim 1/\phi_0$. В этой ситуации, как отмечалось выше, можно использовать однопетлевое эффективное действие и учитывать квантовые эффекты только в перенормировке заряда α (предполагается, что $\lambda \lesssim \alpha$). При этом эффективный заряд становится зависящим от координат и его необходимо дифференцировать при выводе квантовых уравнений. Ситуация здесь аналогична рассмотренному нами в соавторстве с А.Б.Мигдалом случаю малого инстантона в $K \times \mathbb{R}^4$ [5]. Поле такого инстантона вблизи его центра сильное и кроме того с хорошей точностью его можно считать однородным. Поэтому в главном логарифмическом приближении применимо известное выражение [6]. Вдали от центра ($x^2/\rho^2 \gg 1$) поле становится слабым и можно пользоваться обычным выражением для однопетлевой перенормировки α . С хорошей точностью можно записать интерполяционную формулу, объединяющую обе асимптотики [5]

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{6}{4\pi} e_u \frac{F(\xi) + \frac{1}{1+\xi^2}}{\rho_c^2 \Lambda^2}, \quad \xi_\mu = \frac{x_\mu}{\rho}, \quad F^2 = (F_{\mu\nu}^a)^2.$$

Таким образом, уравнения для средних полей инстантона имеют вид:

$$\frac{i}{4\pi} \nabla_\mu \left(\frac{1}{\alpha} F_{\mu\nu}^a \right) = -\Phi^+ i \frac{\tau^a}{2} \overleftrightarrow{\nabla}_\nu \Phi, \quad (4a)$$

$$\nabla_\mu \nabla_\mu \Phi = 2\lambda \Phi (\Phi^\dagger \Phi - \sigma_0^2/2), \quad (46)$$

где $1/\alpha = 1/\alpha (1 - F^2 \partial \ln \alpha / \partial F^2)$.

Фиксируем унитарную калибровку

$$\Phi(\xi) = \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Im } \sigma(\xi) = 0. \quad (5)$$

Поле $A_\mu^a(\xi)$ запишем в стандартном инстантонном виде:

$$A_\mu^a(\xi) = 2 \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \frac{\xi_\nu}{\xi^2} f(\xi^2).$$

Несложно убедиться, что выбор полей в такой форме согласуется с уравнениями (4). Для того, чтобы привести уравнения (4) к безразмерному виду, зведем поле $\mathcal{U}(\xi) = \sigma(\xi)/\sigma_0$, а также массы $m_A^2 = 2\lambda \sigma_0^2$, $m_\sigma^2 = 2\lambda \sigma_0^2$, соответствующие возбуждениям векторного и скалярного полей. Учитывая сказанное, получаем

$$\xi^2 \frac{d}{d\xi^2} \left(\xi^2 \frac{df}{d\xi^2} \right) - (2f^3 - 3f^2 + f) - \xi^2 \frac{\partial \ln \alpha}{\partial \xi^2} \xi^2 \frac{df}{d\xi^2} - \frac{m_A^2 \rho_c^2}{4} \xi^2 u^2 f = 0, \quad (6)$$

$$\xi^4 \frac{d^2 u}{(d\xi^2)^2} + 2\xi^2 \frac{du}{d\xi^2} - \frac{m_\sigma^2 \rho_c^2}{8} \xi^2 u(u^2 - 1) - \frac{3}{4} f^2 u = 0. \quad (7)$$

Граничные условия в системе (6-7) определяются следующим образом. Равенство единице топологического заряда

$$Q[A_\mu] = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4\xi \, {}_{12}F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$$

требует выполнения условий

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0$$

. Из уравнения (7) следует, что при $\xi^2 \rightarrow 0$ функция $u \rightarrow \text{const} \sqrt{\xi^2}$, а условие конечности действия приводит к $u^2(\infty) = 1$. Подчеркнем, что именно наличие "квантового слагаемого" пропорционально $\partial \ln \alpha / \partial \xi^2$ и делает систему уравнений осмысленной, т.е. имеющей нетривиальное решение.

С другой стороны, предполагая малость величины $m_A^2 \rho_c^2 \ll 1$ и вводя безразмерный параметр $\gamma = m_A^2 / m_\sigma^2$, можно решать систему (6-7) итерационным методом. При этом, в главном порядке в достаточно широкой области $\alpha \xi^2 < 1$ решение совпадает с найденным в работе [1]

$$f(\xi^2) = \frac{1}{1+\xi^2}, \quad u(\xi^2) = \left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Заметим, что оно применимо при более слабом ограничении

$\gamma = \pi/2\lambda \lesssim 1$, чем было предложено в [1] $\lambda \ll \alpha$. Эффективное действие на этой конфигурации легко вычисляется

$$S_{\text{eff}}(\rho_c) = \frac{2\pi}{\alpha(\rho_c)} \left(1 + \frac{3}{4} m_A^2 \rho_c^2 \right) + O(\alpha). \quad (9)$$

Откуда находим, что стабильному инстантону отвечает

$m_A^2 \rho_c^2 = \frac{6}{3\pi} \alpha(m_A)$, и тем самым оправданы сделанные выше предположения.

Обсудим теперь, к чему приводит наличие в теории малого параметра. Так как уже на классическом уровне масштабная симметрия разрушена, то никакой нулевой моды, связанной с масштабными растяжениями, не возникает. Однако, для малых значений ρ (в ситуации с большим ϕ_0), дающих доминирующий вклад в статистическую сумму, нарушение масштабной инвариантности мало, т.к. параметром служит, очевидно, $m_A^2 \rho^2$ и в пересальной точке он $\sim \alpha$. Малость этого параметра приводит к тому, что собственное значение ω_ρ оказывается малым $\omega_\rho \sim \alpha$. Таким образом, эта мода является аномально мягкой и выделенной относительно других ненулевых мод, и ее динамику нужно изучать особо.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Рассмотрим теперь, как нужно модифицировать петлевое разложение в поле инстантона в масштабно-неинвариантной теории $SU(2)$ - калибровочного поля, взаимодействующего с Хиггсовским изодублетом. Для конкретности будем говорить о вычислении топологической восприимчивости $\chi_T = \frac{1}{i\epsilon} \langle Q_T^2 \rangle$. Для этого в рамках газового приближения [7] достаточно найти одноинстантонный вклад в статистическую сумму

$$Z_1 = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\Phi \exp\{-S[A_\mu, \Phi^*, \Phi]\} S\{Q_T[A_\mu] - 1\}. \quad (10)$$

В этом приближении $\chi_T = \frac{Z}{Z_1} \frac{Z_1}{Z}$, где Z — полная статистическая сумма, а $\frac{Z}{2}$ возникает из-за необходимости учесть антиинстантоны.

Фиксируем унитарную калибровку (5) и перепишем (10) в виде:

$$Z_1 = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\zeta \exp\{-S[A_\mu, \zeta]\} S\{Q_T[A_\mu] - 1\}; \quad (11)$$

$$S[A_\mu, \zeta] = \int d^4x \left[\frac{1}{8\pi\alpha} \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4} \zeta^2 \frac{1}{2} A_\mu^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \zeta)^2 + \frac{\lambda}{4} (\zeta^2 - \zeta_0^2)^2 \right].$$

Бесконечный объем калибровочной группы сократится с соответствующим объемом в Z и поэтому не выписывается явно.

Следуя идеологии фонового поля, запишем поля A_μ и ζ в виде:

$$A_\mu(x) = \bar{A}_\mu(x - x_0, \rho, \Omega) + \zeta_\mu(x);$$

$$\zeta(x) = \bar{\zeta}(x - x_0, \rho, \Omega) + \chi(x),$$

причем $Q_T[A_\mu] = Q_T[\bar{A}_\mu] = 1$.

Топологическая классификация калибровочных полей диктует нам следующий вид $\bar{A}_\mu$:

$$\bar{A}_\mu = \Omega^\dagger \tau^a \Omega \frac{1}{f_{\mu 0}} \frac{(x - x_0)_\mu}{(x - x_0)^2} f\left(\frac{(x - x_0)^2}{\rho^2}\right);$$

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}\left(\frac{(x - x_0)^2}{\rho^2}\right), \quad \Omega = \exp\left\{i \frac{\tau^a}{2} \omega^a\right\}.$$

Параметры x_0 и ω^a — это коллективные координаты, связанные с симметричными нулевыми модами. Параметр ρ в рассматриваемом масштабно-неинвариантном случае не связан с нулевой модой. Однако, мы будем и его выделять из интеграла (11) наравне с x_0 и ω^a .

Для того, чтобы выделить коллективные координаты, воспользуемся известным методом Фаддеева-Попова. Определим функционал

$$\Delta(A, \bar{A}) \text{ соотношением}$$

$$1 = \Delta(A, \bar{A}) \int d\Omega d^4x_0 \frac{d\rho}{\rho} s^3 \left\{ \int d^4x t_2 (A_\mu - \bar{A}_\mu) \Psi_\mu^a[\bar{A}] \right\} \times \quad (12)$$

$$\times s^4 \left\{ \int d^4x t_2 (A_\mu - \bar{A}_\mu) \Psi_\mu^v[\bar{A}] \right\} s \left\{ \int d^4x t_2 (A_\mu - \bar{A}_\mu) \Psi_\mu^p[\bar{A}] \right\}.$$

Здесь мы ввели нормированные функции $\Psi_\mu^{(i)}[\bar{A}]$:

$$\Psi_\mu^a[\bar{A}] = \frac{1}{N_a} \frac{\partial}{\partial \omega} \bar{A}_\mu(x - x_0, \rho, \Omega) - \alpha(3) \text{ - вращательная мода,}$$

$$\Psi_\mu^v[\bar{A}] = \frac{1}{N_v} \frac{\partial}{\partial x_0} \bar{A}_\mu(x - x_0, \rho, \Omega) \quad \text{ - трансляционная мода,}$$

$$\Psi_\mu^p[\bar{A}] = \frac{1}{N_p} \frac{\partial}{\partial \ln \rho} \bar{A}_\mu(x - x_0, \rho, \Omega) \quad \text{ - инфинитезимальное}$$

изменение поля $\bar{A}_\mu$ при масштабном преобразовании.

Норма определена как обычно

$$N_i^2 = \int d^4x t_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \bar{A}_\mu \right)^2.$$

Якобиан перехода к новым переменным после несложных вычислений приводится к виду:

$$\Delta(A, \bar{A}) = \det_{(i,k)} \int d^4x t_2 \left\{ \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial t_i} \Psi_\mu^{(k)}[\bar{A}] - (A_\mu - \bar{A}_\mu) \frac{\partial \Psi_\mu^{(k)}[\bar{A}]}{\partial t_i} \right\}. \quad (13)$$

Вставив единицу (12) под интеграл в формуле (11) и выполнив трансляционный сдвиг, изотопический поворот, масштабное преобразование поля $A_\mu(x) \rightarrow \frac{1}{\rho} A_\mu(\frac{x}{\rho})$, растяжение Хиггсовского поля в ρ - раз $\phi(x) \rightarrow \phi(\sqrt{\rho})$ и, переходя к интегрированию по переменной $z_\mu = x_\mu / \rho$, приведем Z_1 к виду:

$$Z_1 = V_4 \int \frac{d\rho}{\rho^5} \eta(\rho), \quad (14)$$

где функция $\eta(\rho)$ - распределение инстантонов по масштабу ρ определена выражением

$$n(\rho) = \int \mathcal{D}e_\mu \mathcal{D}x \Delta(A, e) \prod_n \int d^4\xi \int d^2e_\mu \Psi_n^{(n)}[A] \times \exp\{-S[\bar{A}_\mu + e_\mu, \bar{\epsilon} + x]\}; \quad (15)$$

$$S[A_\mu, \bar{\epsilon}] = \int d^4\xi \left\{ \frac{1}{8\kappa^2} \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \rho^2 \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\epsilon})^2 + \frac{1}{4} \bar{\epsilon}^2 \frac{1}{2} A_\mu^2 + \rho^2 \frac{\lambda}{4} (\bar{\epsilon}^2 - \bar{\epsilon}_0^2)^2 \right] \right\}.$$

Воспользуемся представлением S - функции в виде интеграла и перепишем (15) в виде:

$$n(\rho) = \int \prod_n \frac{d\lambda_n}{2\pi i} \left(\int \mathcal{D}e_\mu \mathcal{D}x \Delta(A, e) \exp\{-S + \sum_n \lambda_n \int d^4\xi \int d^2e_\mu \Psi_n^{(n)}[A]\} \right). \quad (16)$$

При этом λ_n мы должны рассматривать как динамические переменные, т.к. по ним производится интегрирование.

В разделе I было показано, что инстантонного решения у классических уравнений движения не существует. Однако, если искать полевую конфигурацию $\bar{A}_\mu$, $\bar{\epsilon}$ ($\epsilon Q_T = 1$) в интеграле (16), т.е. при фиксированных коллективных координатах χ_0 , ρ , Ω , то перевальная точка в (16) при таких ограничениях существует и определяется решением уравнений

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} \Big|_{\bar{A}_\mu, \bar{\epsilon}} = \sum_n \bar{\lambda}_n \Psi_n^{(n)}[\bar{A}]; \quad (17)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\epsilon}} \Big|_{\bar{A}_\mu, \bar{\epsilon}} = 0. \quad (18)$$

Множители Лагранжа $\bar{\lambda}_n$ могут быть найдены следующим образом. Рассмотрим малый сдвиг поля e_μ в выделенных нами направлениях $e_\mu \rightarrow e_\mu + \sum_n \epsilon_n \Psi_n^{(n)}[\bar{A}]$. Тогда легко показать, что $\bar{\lambda}_n = \langle \lambda_n \rangle$ дается следующим выражением

$$\bar{\lambda}_n = \int d^4\xi \int d^2e_\mu \frac{\delta S}{\delta A_\mu} \Big|_{\bar{A}_\mu, \bar{\epsilon}} \Psi_n^{(n)}[\bar{A}]. \quad (19)$$

Заметим, что этот же результат может быть получен из уравнения (17) умножением его на $\Psi_n^{(n)}[\bar{A}]$ и последующим интегрированием по ξ .

В силу ортонормированности различных $\Psi_n^{(u)}[\bar{A}]$ получим (19). Мы видим, что $\bar{\lambda}_n$ связаны с изменением действия при соответствующем изменении коллективных координат. Если симметрия не разрушена, то соответствующие $\bar{\lambda}_n = 0$. Таким образом, единственный ненулевой множитель Лагранжа $\bar{\lambda}_p \neq 0$ связан с нарушением масштабной инвариантности классического действия

$$\bar{\lambda}_p = \frac{\bar{\epsilon}_0^2 p^2}{2N_p^2} \int d^4\xi \bar{u}^2 t_2 \bar{A}_\mu \hat{D}_p \bar{A}_\mu, \quad \bar{u} = \bar{\epsilon}/\bar{\epsilon}_0,$$

где $\hat{D}_p = (1 + \xi, \partial_\mu)$ — генератор масштабных преобразований.

Решение уравнений (17,18) $\bar{A}_\mu(\xi, p, \bar{\lambda}_p)$, $\bar{\epsilon}(\xi, p, \bar{\lambda}_p)$ дают перевальную точку в интеграле (16). Квазиклассическое разложение на фоне этой конфигурации оказывается вполне стандартным. В однопетлевом приближении получаем

$$w(p) = \Delta(\bar{A}) \exp \{-S[\bar{A}, \bar{\epsilon}]\} \int \mathcal{D}\Phi_a \prod_s \left\{ \int d^4\xi t_2 \Phi_\mu \Psi_\mu^{(u)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4\xi d^4\xi' \Phi_a(\xi) \hat{H}_{ae}(\xi, \xi') \Phi_e(\xi') \right\},$$

где $\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \bar{A}_\mu \\ \bar{\epsilon} \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_\mu \\ \chi \end{pmatrix}$, $\hat{H}_{ae} = \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi_a(\xi) \delta \Phi_e(\xi')} \Big|_{\bar{\Phi}}$, $\Delta(\bar{A}) = N_p N_u^3 N_t^4$.

Обсудим теперь ситуацию с большим $\bar{\epsilon}_0$, т.е. тот случай, когда нарушение масштабной симметрии для инстантонов с $p \sim p_c$ слабое, а соответствующая мода мягкая. Уравнения (17,18) имеют решение вида (8), при этом $\omega_p \sim \alpha(m_A) \ll 1$. Следовательно, поправки, идущие от фиксации p , (в уравнении (17) член $\sim \bar{\lambda}_p$), необходимо учитывать только в двухпетлевом приближении. Поэтому с однопетлевой точностью, используя результат работы [1], найдем

$$\chi_T = \frac{2^3}{T^2} e^{-0.59} \left(\frac{2\bar{u}}{\alpha(\lambda_0)} \right)^4 \int_0^\infty \frac{dp}{p^5} \exp \left\{ -\frac{2\bar{u}}{\alpha(\lambda_0)} + 6v_{cl} \lambda_0 p - \frac{3\bar{u}^2}{2} \bar{\epsilon}_0^2 p^2 \right\}.$$

Интегрируя по p и записывая результат в перенормированном виде, окончательно получим

$$\chi_T = 0,12 m_A^4 \left(\frac{2\pi}{\alpha_R} \right)^{e-\frac{\theta}{2}} \exp \left\{ -\frac{2\pi}{\alpha_R} \right\},$$

где $m_A^2 = \pi \alpha_R \phi_0^2$, $\alpha_R = \alpha(m_A)$, $e = 43/6$.

3. ИНСТАНТОН В МОДЕЛИ ВАЙНБЕРГА-САЛАМА

В этом разделе мы обсудим некоторые особенности, которые возникают при рассмотрении инстантонов в $SU(2) \times U(1)$ -модели Вайнберга-Салама. Лагранжиан модели в стандартных обозначениях записывается в виде:

$$\mathcal{L}_{WS} = \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (\nabla_\mu \Phi)^\dagger (\nabla_\mu \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2/2)^2,$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

$$\nabla_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a - ig' \frac{1}{2} B_\mu \right) \Phi$$

Очевидно, что топологическая классификация неабелевых полей A_μ^a полностью аналогична $SU(2)$ -теории. Поэтому должен существовать инстантон и, как обсуждалось выше, его имеет смысл рассматривать только в квантовой теории, в которой он существует как стабильная полевая конфигурация.

Однако, в отличие от случая $SU(2)$ -модели с Хиггсовским изодублированием в электро-слабой $SU(2) \times U(1)$ -теории оказывается, что в поле инстантона выгодно возбудиться абелеву поле B_μ и понизить тем самым действие всей топологической флуктуации. Другое отличие состоит в том, что из-за смешивания полей A_μ^3 и B_μ и различия в массах $W^\pm$ и Z -бозонов инстантон оказывается ассиметричным.

Перейдем к принятым нами Хевисайдовым единицам $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$, $\alpha' = g'^2/4\pi$. Фиксируем унитарную калибровку (5). Для неабелева поля воспользуемся анзацем

$$W_\mu^\pm = 2 \bar{\eta}_{\mu\nu}^\pm \frac{x_\nu}{x^2} f\left(\frac{x^2}{f^2}\right), \quad A_\mu^3 = 2 \bar{\eta}_{\mu\nu}^3 \frac{x_\nu}{x^2} h\left(\frac{x^2}{f^2}\right),$$

а для того, чтобы фиксировать вид поля B_M , рассмотрим его уравнение. Интересующие нас члены в лагранжиане следующие:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{4\mu\alpha'} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} \bar{\psi}^2 B_M^2 - \frac{1}{2} \bar{\psi}^3 \frac{x_\nu}{x^2} h \bar{\psi}^2 B_M.$$

Варируя, получаем уравнение

$$\frac{1}{4\mu\alpha'} \partial_\nu (\partial_\nu B_M - \partial_M B_\nu) - \frac{1}{4} \bar{\psi}^2 B_M = -\frac{1}{2} \bar{\psi}^3 \frac{x_\nu}{x^2} h \bar{\psi}^2. \quad (20)$$

Мы видим, что в правой части этого уравнения стоит источник, который генерирует абелево поле B_M и определяет его угловую зависимость

$$B_M = 2 \bar{\psi}^3 \frac{x_\nu}{x^2} \varphi \left(\frac{x^2}{\rho^2} \right). \quad (21)$$

Из предыдущего рассмотрения мы знаем, что инстантон оказывается распределенным в пространстве с малым характерным масштабом $\rho^2 \sim \alpha_w / m_w^2$. В области таких масштабов функции f и h совпадают и определяются классическим инстантоном решением

$f = h = \frac{\rho^2}{x^2 + \rho^2}$. Хиггсовское поле $\bar{\psi}$ в этой области ведет себя как и в рассмотренном выше случае: $\bar{\psi} = \bar{\psi}_c \left(\frac{x^2}{x^2 + \rho^2} \right)^{1/2}$.

Различие в функциях f и h проявляется только на расстояниях, сравнимых с обратными массами векторных мезонов

$$x^2 \sim 1/m_w^2, \quad 1/m_2^2.$$

Подставляя (21) в уравнение (20), получим

$$\xi^2 \frac{d}{d\xi^2} \left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi^2} \right) - \varphi + \frac{m_w^2 \rho^2}{4} f_0^2 \theta_w \xi^2 u^2 (h - \varphi) = 0, \quad \xi^2 = \frac{x^2}{\rho^2}. \quad (22)$$

Учитывая сказанное относительно функций h и $\bar{\psi}$ и в физически интересном случае малых углов смешивания $\theta_w \ll \frac{\pi}{2}$, найдем решение уравнения (22)

$$\Psi(\xi^2) = \frac{m_W^2 \rho^2}{8} \theta_W \left\{ 1 - \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) \operatorname{arctg} \xi^2 \right\},$$

которое применимо на расстояниях $x^2 \ll \frac{1}{m_W^2}$.

На масштабах расстояний $x^2 \sim 1/m_W^2$ происходит смешивание полей A_μ и B_μ — они образуют физические поля Z — бозона и фотона. При $x^2 \gg 1/m_W^2$ поля $W_\mu^\pm$, Z_μ и H — Хиггсовский бозон — убывают экспоненциально с соответствующими им массами. Электромагнитное поле ведет себя как поле диполя в 4-х мерном пространстве $A_\mu \sim \vec{r}_\mu \frac{\chi}{x^4}$. Действие на решение имеет вид:

$$S = \frac{2\pi}{\alpha_W} \left[1 + \frac{3}{4} m_W^2 \rho^2 (1 - \gamma \theta_W^2) \right] + O(\alpha_W),$$

где γ — положительное число порядка единицы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели модель, в которой топологическая классификация допускает существование инстантонов, в то время как классические уравнения движения таких нетривиальных решений не имеют. Мы показали, что в квантовой теории топологически-нетривиальное решение существует. В соответствии с этим предложена модифицированная схема петлевого разложения, которая позволяет вычислять вклады таких полевых конфигураций в различные физические величины.

Стабилизация инстантона в квантовой теории легко объясняется. Если мы рассматриваем эффективное действие S_{eff} , которое учитывает квантовые поправки на фоне инстантона, то, делая масштабное преобразование и вычисляя затем производную S_{eff} по логарифму параметра этого преобразования, мы получаем, что $\frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial \ln \rho} = \int d^4x \theta_{\mu\mu}(x)$, где $\theta_{\mu\mu}(x)$ — след тензора энергии-импульса, вычисленный на заданной полевой конфигурации. Мы видим, что в $\theta_{\mu\mu}(x)$ есть положительное слагаемое, связанное с нарушающим масштабную инвариантность членом в классическом действии и поэтому приводящего к коллапсу классического инстантона. На квантовом уровне в следе тензора энергии-импуль-

са появляется отрицательное слагаемое, связанное с квантовой аномалией. Наличие в теории этой аномалии в конечном итоге и ведет к стабилизации инстантона. Можно сказать, что инстантону соответствует размер, который находится из условия равенства нулю полного давления

$$\frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_c} = \int d^4x \, \mathcal{E}_{\text{eff}}(x) = 0.$$

Однако, следует отметить, что в спонтанно-нарушенных калибровочных теориях в физически наиболее интересных случаях эффективный заряд α оказывается малым. Поэтому вклад инстантонов в амплитуды различных процессов экспоненциально подавлен $\sim \exp \{-\text{const}/\alpha\}$ и следовательно с высокой точностью работает однопетлевое приближение.

Уметим также, что существование квантовых топологических солитонов может иметь место и в ряде других моделей. Например, в 2-мерной нелинейной σ -модели в магнитном поле (такая ситуация реализуется в слоистых магнетиках). Внешнее магнитное поле нарушает масштабную инвариантность классического действия и ведет к коллапсу инстантона. В то же время асимптотически-свободный характер теории и наличие квантовой аномалии приводит к тому, что при учете квантовых эффектов инстантон становится хорошо определенным объектом. Такого же типа явление должно иметь место и в случае инстантонов в плоском анизотропном ферромагнетике. Развита нами квазиклассическая схема может быть использована и в этих моделях.

ЛИТЕРАТУРА

1. t'Hooft G. Phys.Rev.Lett., 1976, 37, 8; Phys.Rev., 1976, D14, 3432
2. Романов В.Н., Фатеев В.А. ТМФ, 1977, т.33, №2, 286.
3. Kim J.E., Lee H.T. Phys.Lett., 1984, 141B, 205;
4. Li E., preprint CERN-TH. 3961-84 (1984).
5. Мигдал А.Б., Агасян Н.О., Хохлачев С.Б. Письма в ЖЭТФ, 1985, 41, 405.
6. Matinyan S.G. Savvidy G.K. Nucl.Phys., 1978, B134, 539
7. Callan C.G., Dashen R.P., Gross D.J. Phys.Rev., 1978, D17, 2717.