МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

С. М. Кнопова

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

005—84

Москва 1984

Министерство высшего и среднего специального
образования СССР
Московский ордена Трудового Красного Знамени
инженерно-физический институт

С.М.Кнопова

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Утверждено
редсоветом института

Москва 1984

УДК 517.91

Кнопова С.М. О методах решения некоторых задач распространения примеси в пористой среде. – М.: препринт МИФИ, 005-84, 1984, 16 с.

Предлагаются методы решения некоторых многомерных некорректных обратных задач, возникающих при изучении процессов распространения примеси в пористой среде.

Светлана Михайловна Кнопова

О методах решения некоторых задач распространения примеси в пористой среде

Рукопись поступила в издательский отдел 6/УII-84 г.

Редактор Н.М.Соболева

Техн.редактор Н.М.Воронцова

Ответственный за выпуск С.М.Кнопова

Л.- 83347 Подписано в печать 20/IX-1984 г. Формат 60х84 1/16
Объем 1 п.л. Уч.-изд.л. 0,75 Тираж 120 экз. Цена 10 коп.
Изд. № 005-84 Заказ 2302

Типография МИФИ, Каширское шоссе, д. 31

Известно, что при исследовании физических процессов непосредственное измерение параметров и характеристик явления возможно в относительно редких случаях. В некоторых случаях экспериментальные измерения вообще можно проводить лишь на некотором расстоянии от исследуемого объекта. Поэтому результаты измерений, как правило, бывают связаны с искомыми характеристиками объекта теми или иными операторными соотношениями.

Примером такой задачи может служить определение зависимости концентрации компонент газа в фиксированном объеме, расположенном в земле, по результатам измерений концентрации газа в атмосфере.

Распределение примеси в простейшем случае описывается уравнением диффузии, хотя, вообще говоря, возможны и другие процессы, которые часто значительно усложняют интерпретацию результатов наблюдений физических явлений. Математическая задача определения примеси в полости сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I рода. При этом в некоторых случаях (например, в стационарной двумерной задаче) ядро интегрального уравнения является функцией Грина соответствующей краевой задачи, а в ряде случаев получается интегральное уравнение типа свертки.

В зависимости от геометрии задачи рассматриваемая область, а следовательно, и интегральное уравнение будут иметь различную размерность. В большинстве случаев задача оказывается многомерной.

Рассматриваемые задачи можно решать методом регуляризации А.Н.Тихонова [1] . Однако обстоятельства, связанные с ограничениями машинной памяти и времени счета, в случае многомерной геометрии приводят к целесообразности использования других методов.

В данной работе предлагаются некоторые из таких методов применительно к задачам распространения примеси в среде.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$u(x)=\int_G \mathcal{K}(x,y)f(y)dy\,,\ x\in\bar{G}, \tag{1}$$

где интеграл берется по ограниченной N-мерной области G $(N>1)$, $x=(x_1,\ \dots\ ,x_N)$, $u(x)\in L_2(G)$ – известная функция, $\mathcal{K}(x,y)$ – функция Грина задачи

$$
\begin{cases} \Delta u = \varphi(x),\ x \in G \\ u\big|_{\partial G} = 0\ , \end{cases} \tag{2}
$$

а неизвестная функция $f(y) \in W_p^a(G)$ и является финитной в G. Пусть при точно заданной функции $u(x)$ существует единственное решение задачи (1).

Известно, что задача $\Delta u + \lambda u = 0$, $u\big|_{\partial G} = 0$ имеет полную ортонормированную в $L_2(G)$ систему собственных функций $\{v_n(x)\}$, отвечающих последовательности собственных значений $\{\lambda_n\}$ (λ_n возрастают $\sim |n|^2$, где $n = (n_1, \ldots, n_N)$). Согласно [2] λ_n являются собственными значениями, а $v_n(x)$ – собственными функциями самосопряженного расширения оператора Лапласа.

Поставим в соответствие функции $u(x)$ ее ряд Фурье по системе собственных функций $\{v_n(x)\}$

$$
u(x) \sim \sum_n u_n v_n(x),\ u_n = \int_G u(x) v_n(x)\, dx. \tag{3}
$$

Вместо частичных сумм ряда (3) рассмотрим так называемые средние Рисса порядка $s \geqslant 0$, имеющие вид

$$
E_\lambda^s u = \sum_{\lambda_n < \lambda} u_n v_n(x) \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s, \tag{4}
$$

где суммирование ведется по всем $\lambda_n < \lambda$.

Ряд (3) называется суммируемым в точке x средними Рисса порядка s к $u(x)$, если последовательности (4) сходятся в этой точке к $u(x)$ при $\lambda \to \infty$. При $s = 0$ суммируемость средними Рисса переходит в обычную сходимость.

Для произвольной функции $u(x) \in L_2(G)$ [2] почти всюду в G

$$
\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda^s u(x) = u(x),\ \text{при}\ \ s > 0, \tag{5}
$$

и значит $\|E_\lambda^s u - u\|_{L_2(G)} \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и $s > 0$.

Если функция $f(x)$ финитна в G и $f(x) \in W_p^a(G)$, причем справедливы неравенства

$$a \geqslant \frac{N-1}{2} - s,\ ap > N,\ p \geqslant 1,\ 0 \leqslant s < \frac{N-1}{2}, \tag{6}$$

тс средние Рисса спектрального разложения функции $f(x)$ $E_\lambda^s f$ сходятся к функции $f(x)$ равномерно на любом компакте $K \subset G$ [2].

Если воспользоваться средними Рисса спектральных разложений функций $u(x)$ и $f(x)$ (с учетом (5) возьмем $s > 0$) и возможностью для равномерно сходящихся рядов изменить порядок интегрирования и суммирования, то из соотношения (1) при выполнении условий (6) легко получить связь между коэффициентами Фурье функций $f(x)$ и $u(x)$:

$$f_n = \lambda_n u_n . \tag{7}$$

Таким образом, если функция $u(x)$ известна точно, то задача (1) решена, решением будет ряд $(\lambda \to \infty)$

$$f(x) = \sum_{\lambda_n} \lambda_n u_n v_n(x) \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s .$$

Пусть теперь функция $u(x)$ задана не точно, а с некоторой погрешностью δ :

$$\tilde{u}(x) = u_T(x) + \Delta u(x),$$

где $u_T(x)$ – точное значение $u(x)$, и

$$\| \tilde{u} - u_T \|_{L_2(G)} \leqslant \delta . \tag{8}$$

Из (8) легко показать справедливость оценки

$$| \tilde{u}_n - u_n | \leqslant c \cdot \delta,\ c = const \tag{8'}$$

для коэффициентов Фурье функций $\tilde{u}(x)$ и $u_T(x)$.

Задача (1) является некорректно поставленной. Предложенный выше алгоритм нахождения функции $f(x)$ сводится к задаче суммирования рядов Фурье, которая, как известно, не во всех пространствах обладает свойством устойчивости. Такие задачи должны решаться с помощью регуляризирующих алгоритмов [1] .

В качестве приближенного решения задачи (1) предлагается брать функцию

$$\tilde{f}_M(x)=\sum_{\lambda_n<\lambda_M}\tilde{f}_n\, v_n(x)\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_M}\right)^S, \tag{9}$$

где $0<s<\dfrac{N-1}{2}$, $\tilde{f}_n=\lambda_n\tilde{u}_n$, а M выбирается согласованно с δ .

Оценим

$$\|\tilde{f}_M-f\|_{W_p^a(G)}\le\|\tilde{f}_M-f\|_{W_p^a(K)}+\|\tilde{f}_M-f\|_{W_p^a(G\setminus K)},$$

$$\forall M\,\exists K\subset G:\ \|\tilde{f}_M-f\|_{W_p^a(G\setminus K)}=\|\tilde{f}_M\|_{W_p^a(G\setminus K)}<\frac{1}{M},$$

$$\|\tilde{f}_M-f\|_{W_p^a(K)}=\Big\|\sum_{\lambda_n<\lambda_M}\lambda_n\tilde{u}_n\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_M}\right)^S v_n(x)-\sum_{\lambda_n}\lambda_n u_n\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^S v_n(x)\Big\|_{W_p^a(K)}=$$

$$=\Big\|\sum_{\lambda_n<\lambda_M}\lambda_n\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_M}\right)^S(\tilde{u}_n-u_n)v_n(x)-\sum_{\lambda_M\le\lambda_n}\lambda_n u_n\left(1-\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)^S v_n(x)\Big\|_{W_p^a(K)}\le$$

$$\le\Big\|\sum_{\lambda_n<\lambda_M}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_M}\right)^S\lambda_n(\tilde{u}_n-u_n)\,v_n(x)\Big\|_{W_p^a(K)}+$$

$$+\Big\|\sum_{\lambda_M\le\lambda_n}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^S\cdot\lambda_n\cdot u_n\cdot v_n(x)\Big\|_{W_p^a(K)}\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{M}\lambda_n\,|\tilde{u}_n-u_n|\cdot\|v_n(x)\|_{W_p^a(G)}+$$

$$+\Big\|\sum_{\lambda_M\le\lambda_n}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^S\lambda_n u_n v_n(x)\Big\|_{W_p^a(K)}\le C(M)\cdot M^3\cdot\delta+\varphi(M),$$

где

$$C(M)=C_1\cdot\max_{1\le n\le M}\left\{\|v_n(x)\|_{W_p^a}\right\},\quad C_1-const,$$

$$\varphi(M)=\Big\|\sum_{\lambda_M\le\lambda_n}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s\cdot\lambda_n u_n\cdot v_n(x)\Big\|_{W_p^a(K)}.$$

При $M\to\infty\,(\lambda\to\infty):\varphi(M)\to 0$, так как при сделанных предположениях в выражении $\varphi(M)$ под знаком нормы стоит остаток равномерно сходящегося ряда. Если $M=M(\delta)$ выбирать таким образом, чтобы $C(M)M^3\delta\to 0$, $(M\to\infty)$ при $\delta\to 0$, то $\tilde{f}_M(x)$ будет сходиться в метрике $W_p^a(G)$ к точному решению $f(x)$ задачи (1), и предлагаемый алгоритм нахождения приближенного решения будет являться регуляризируюшим.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1

Пусть в уравнении (1) ядро $\mathcal{K}(x,y)$ является функцией Грина задачи (2), $u(x)\in L_2(G)$, $f(x)$ – финитная в G функция класса $W_p^a(G)$ и выполняются неравенства (6) и (8). Тогда функция $\tilde{f}_M(x)$, определяемая соотношением (9), сходится в метрике $W_p^a(G)$ к точному решению уравнения (1) при условии, что $C(M)M^3\delta\to 0$ при $\delta\to 0$, $M(\delta)\to\infty$.

Следствие. Так как из сходимости в метрике W_p^a следует сходимость по норме L_p, то при сделанных предположениях

$$\tilde{f}_M(x)\xrightarrow{L_p(G)}f(x).$$

Замечание. Если известно, что обычный ряд Фурье для точно заданной функции $u(x)$ сходится по норме $L_2(G)$, то везде выше можно положить $s=0$ и брать обычные ряды Фурье.

Отметим, что проблеме сходимости кратных рядов Фурье посвящены, например, работы [2] – [4]. В работе [5] рассматриваются вопросы равномерной сходимости рядов по собственным функциям несамосопряженного эллиптического оператора.

Пусть теперь $f(x)$ – финитная в G функция класса $L_p(G)$. Множество таких функций обозначим $\overset{\circ}{L}_p(G)$. Будем говорить, что спектральное разложение функции $f(x)$ суммируемо средними Рисса порядка s в $\overset{\circ}{L}_p(G)$, если для любого компакта $K \subset G$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \| E_\lambda^s f - f \|_{L_p(K)} = 0 . \tag{10}$$

Согласно [2] (10) выполняется для любой функции $f(x) \in \overset{\circ}{L}_p(G)$, когда

$$p \geqslant 1 \quad \text{и} \quad s > (N-1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| .$$

Коэффициенты Фурье функции $u(x)$ равны

$$u_k = \int_G u(x) v_k(x) dx = \int_G \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y) v_k(x) dy\, dx . \tag{11}$$

Если в (11) можно поменять порядок интегрирования (например, это можно сделать согласно теореме Фубини [6], если

$$\int_G \int_G |\mathcal{K}(x,y) f(y) v_k(x)| dy dx < +\infty) ,$$

то

$$\int_G \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y) v_k(x) dy dx = \int_G \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y) v_k(x) dx dy \tag{12}$$

и легко показать, что тогда останется справедливым равенство (7).

Пусть, по-прежнему, справедливо (8). В качестве приближенного решения опять возьмем функцию $\tilde{f}_M(x)$, определяемую соотношением (9).

Оценим

$$\|\tilde{f}_M - f\|_{L_p(G)} \leq \|\tilde{f}_M - f\|_{L_p(K)} + \|\tilde{f}_M - f\|_{L_p(G \setminus K)} ,$$

$$\forall M \; \exists K \subset G : \|\tilde{f}_M - f\|_{L_p(G \setminus K)} = \|\tilde{f}_M\|_{L_p(G \setminus K)} < \frac{1}{M} ,$$

$$\|\tilde{f}_M - f\|_{L_p(K)} = \|\tilde{f}_M - E^s_{\lambda_M} f + E^s_{\lambda_M} f - f\|_{L_p(K)} \leq$$

$$\leq \|f - E^s_{\lambda_M} f\|_{L_p(K)} + \Big\|\sum_{\lambda_K < \lambda_M} \Big(1 - \frac{\lambda_K}{\lambda_M}\Big)^s \lambda_K (\tilde{u}_K - u_K) v_K(x)\Big\|_{L_p(K)} \leq$$

$$\leq \|f - E^s_{\lambda_M} f\|_{L_p(K)} + \tilde{C}(M)\ M^3\ \delta,$$

где $\tilde{C}(M) = C' \cdot \max\limits_{1 \leq K \leq M} \{\|v_K(x)\|_{L_p(G)}\}$. При $p = 2$: $\tilde{C}(M) = C'$, C' – $const$. Мы видим, что если $M = M(\delta)$ таково, что $\tilde{C}(M)\, M^3(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$, $M \to \infty$, то $\tilde{f}_M(x) \xrightarrow{L_p(G)} f(x)$, когда $\|f - E^s_{\lambda_M} f\|_{L_p(K)} \to 0$.

Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2

Пусть $u(x) \in L_2(G)$, $f(x) \in \overset{\circ}{L}_2(G)$, ядро уравнения (1) является функцией Грина задачи (2), справедливы (12) и (8). Тогда функция (9) $\tilde{f}_M(x)$ сходится в метрике $L_2(G)$ к точному решению уравнения (1) для всех $S > 0$, если $M^3(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$, $M(\delta) \to \infty$.

Теорема 3

Пусть $u(x) \in L_2(G)$, $f(x) \in \overset{\circ}{L}_p(G)$, $p \geq 1$, ядро $\mathcal{K}(x,y)$ является функцией Грина задачи (2) и справедливы (12) и (8). Тогда функция (9) $\tilde{f}_M(x)$ сходится в метрике $L_p(G)$ к точному решению уравнения (1), если $\tilde{C}(M) M^3(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$, $M(\delta) \to \infty$ и если $S > (N-1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$ (N – размерность области G).

Отметим один частный случай.

Пусть $f(x) \in \overset{\circ}{L}_2(G)$ и справедливо (12). Иногда из условия (8) следует, что $\left[\sum\limits_{K=1}^{\infty} \lambda_K^2 (\tilde{u}_K - u_K)^2\right]^{1/2} \leq \psi(\delta)$, где $\psi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда в качестве приближенного решения задачи (1) можно брать

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\lambda_K < \lambda} \lambda_K \tilde{u}_K \Big(1 - \frac{\lambda_K}{\lambda}\Big)^s v_K(x)\ ,\ s > 0, \qquad (13)$$

где суммирование ведется по всем k (необрезанный ряд). Это справедливо в силу того, что задача суммирования рядов Фурье устойчива из ℓ_2 в L_2 [1]. Если ряд (3) сходится почти всюду в G, то в (13) можно положить $s = 0$ и приближенным значением искомой функции $f(x)$ будет

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tilde{u}_k v_k(x). \tag{14}$$

При сделанных предположениях $\tilde{f}(x)$, определяемая по формуле (13) или (14), будет сходиться по норме $L_2(G)$ к точному решению уравнения (1) $f(x)$ при $\delta \to 0$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Фредгольма I рода для случая, когда ядро уравнения зависит от разности аргументов (уравнение типа свертки):

$$\int_{T_N} \mathcal{K}(x-y) f(y) dy = u(x), \tag{15}$$

где интегрирование ведется по N-мерной ограниченной области $T_N = \{x : 0 \leq x_i < 2\pi,\ i = 1, \dots, N\}$, $N \geq 1$, ядро $\mathcal{K}(x) \in L_1(R^N)$, заданная функция $u(x) \in L_p(R^N)$, $p \geq 1$, искомое решение $f(x) \in F(T_N)$, F – некоторое банахово пространство.

Как известно, задача (15) является некорректно поставленной и должна решаться с использованием регуляризирующих алгоритмов.

Считаем, что при точно заданной правой части $u(x)$ уравнение (15) имеет единственное решение. Точно заданной функции $u(x)$ поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$\sum_{|k|} u_k e^{i(k,x)}, \tag{16}$$

где

$$u_k = (2\pi)^{-N} \int_{R^N} u(x) e^{-i(k,x)} dx,$$

$$k = (k_1, \dots, k_N),\ (k,x) = \sum_{j=1}^{N} k_j x_j,\ |k| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_N^2}.$$

В (16), как и всюду ниже, суммирование ведется по кругам.

Относительно точного решения задачи (15) $f(x)$ предполагаем, что это 2π-периодическая по каждой переменной функция, принадлежащая классу Гельдера $G^a(T_N)$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера $G^a(T_N)$ при $a=\ell+\varkappa$, где ℓ - целое неотрицательное число, $0 \leqslant \varkappa < 1$, если для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, где все $\alpha_j \geqslant 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, такого, что $|\alpha| = \ell$, для модуля непрерывности выполнено условие $\omega(\delta, D^\alpha f) = O(\delta^\varkappa)$. $(D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N}, \ D_j = -i \dfrac{\partial}{\partial x_j})$.

Напомним, что

$$\omega(\delta, \varphi) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x\in D \\ y\in D}} |\varphi(x) - \varphi(y)| .$$

При сделанных предположениях относительно искомой функции $f(x)$, если выполняется условие

$$a > N/2, \tag{17}$$

то ряд Фурье

$$\sum_{|k|} f_k e^{i(k,x)}, \ f_k = (2\pi)^{-N} \int_{T_N} f(x) e^{-i(k,x)} dx \tag{18}$$

сходится абсолютно и равномерно в N-мерном кубе T_N к функции $f(x)$ [2].

Пусть справедливо равенство

$$\int_{R^N}\int_{T_N} \mathcal{K}(x-y) f(y) e^{-i(k,x)} dy\, dx = \tag{19}$$

$$= \int_{T_N}\int_{R^N} \mathcal{K}(x-y) f(y) e^{-i(k,x)} dx\, dy.$$

(В частности, согласно теореме Фубини [6] (19) справедливо, если

$$\int_{R^N}\int_{T_N} |\mathcal{K}(x-y)f(y)|\,dy\,dx < +\infty)$$

Тогда, подставляя в определение u_K (16) $u(x)$ из (15), используя (19) и определение f_K (18), легко получить связь между коэффициентами Фурье рядов (16) и (18):

$$f_K = \frac{u_K}{\tilde{\mathcal{K}}(K)}, \tag{20}$$

где $\tilde{\mathcal{K}}(\omega) = \int_{R^N} \mathcal{K}(z) e^{-i(\omega,z)} dz$ – Фурье преобразование ядра $\mathcal{K}(z)$.

Таким образом, если справедливо (19), то решением уравнения (15) с точно известной правой частью $u(x)$ будет ряд (18) с коэффициентами f_K, определяемыми соотношением (20). В силу предположения (17) этот ряд равномерно на T_N сходится к $f(x)$.

Пусть теперь $u(x)$ известна не точно, а приближенно, причем выполняется неравенство

$$\|\tilde{u} - u\|_{L_p(R^N)} \le \delta, \tag{21}$$

где $\tilde{u}(x)$ – приближение к $u(x)$.
Обозначим через $\tilde{u}_K$ коэффициенты Фурье для функции $\tilde{u}(x)$.

Из (21) следует оценка

$$\begin{gathered} |\tilde{u}_K - u_K| \le (2\pi)^{-N} \int_{R^N} |\tilde{u}(x) - u(x)|\,dx \le \\ \le (2\pi)^{-\frac{N}{p}} \|\tilde{u} - u\|_{L_p(R^N)} \le (2\pi)^{-\frac{N}{p}} \cdot \delta. \end{gathered} \tag{22}$$

Будем теперь искать приближенное решение $\tilde{f}(x)$ задачи (15). Уклонение приближенного решения от точного станем оценивать по метрике пространства C. Предложенный выше алгоритм нахождения решения уравнения (15) сводится к суммированию рядов Фурье. Задача суммирования рядов Фурье с приближенно известными коэффициентами не обладает свойством устойчивости, если решение ищется в пространстве C [1].

В качестве устойчивого метода нахождения приближенного решения задачи (15) предлагается следующий метод.

Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha, \omega)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1°. $\Phi(\alpha,\omega)$ – определена для всех $\alpha \geqslant 0$, $\omega \in R^N$ и непрерывна по всем своим аргументам.

2°. Для $\forall \alpha \geqslant 0$, $\omega \in R^N$: $0 \leqslant \Phi(\alpha,\omega) \leqslant 1$.

3°. При $\alpha \to 0$: $\Phi(\alpha,\omega) \to 1$ равномерно в любой области $|\omega|<A$, $A = const$.

4°. Существует $\sum\limits_{k} \left|\dfrac{\Phi(\alpha,k)}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\right| = C(\alpha) < +\infty$ для $\forall \alpha > 0$ или равносильное требование:

$$\frac{\Phi(\alpha,\omega)}{\tilde{\mathcal{K}}(\omega)} \in L_1(R^N), \ \forall \alpha > 0.$$

(Отметим, что для функций, рассматриваемых в работе [7],

$$\Phi(\alpha,\omega) = F[\varphi_\alpha(x)] = \Phi(\alpha\cdot\omega),$$

где $F[\varphi_\alpha]$ – Фурье преобразование функции $\varphi_\alpha(x) = \alpha^{-N}\varphi\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, а $\varphi(x)$ такие, что $\varphi(x) \in L_1(R^N)$ и $\int_{R^N}\varphi(x)\,dx = 1$, свойства 1° – 3° выполняются автоматически.)

В качестве приближенного решения уравнения (15) предлагается брать функцию

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|k|} \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\,\Phi(\alpha,\omega)\, e^{i(k,x)}, \tag{23}$$

где параметр α нужно выбирать согласованно с уровнем погрешности правой части (15) δ.

Оценим

$$\left|\tilde{f}(x) - f(x)\right| = \left|\sum_{|k|} \frac{e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\left(u_k - \tilde{u}_k\Phi(\alpha,k)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{|k|} \frac{e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\, u_k\left(1 - \Phi(\alpha,k)\right)\right| +$$

$$+ \left|\sum_{|k|} \frac{e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\,\Phi(\alpha,k)\left(u_k - \tilde{u}_k\right)\right| \leqslant$$

$$\le \left|\sum_{|k|\le M} \frac{e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)} u_k (1-\varphi(\alpha,k))\right| +$$

$$+\left|\sum_{|k|>M} \frac{e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)} u_k (1-\varphi(\alpha,k))\right| +$$

$$+\sum_{|k|} \left|\frac{\varphi(\alpha,k)}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\right| |u_k-\tilde{u}_k| \le$$

$$\le \left|\sum_{|k|\le M} \frac{e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)} u_k (1-\varphi(\alpha,k))\right| +$$

$$+\sum_{|k|>M} \left|\frac{u_k e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\right| + (2\pi)^{-\frac{N}{p}} \delta\, c(\alpha). \qquad (24)$$

Мы воспользовались (22).

Первое слагаемое в правой части (24) стремится к 0 при $\alpha \to 0$ в силу свойства 3° функции $\varphi(\alpha,k)$. Второе слагаемое представляет собой остаток сходящегося ряда, так как ряд (18), как отмечалось выше, сходится абсолютно. Поэтому, выбирая достаточно большие значения M, можно добиться того, чтобы это слагаемое стало меньше δ. Следовательно, если функция $\alpha=\alpha(\delta)$ выбрана таким образом, что $\alpha(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ и

$$c(\alpha)\cdot\delta\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0, \qquad (25)$$

то $\tilde{f}(x)\to f(x)$ в метрике $C(T_N)$.

Таким образом, справедлива

<u>Теорема 4</u>

Если $f(x)\in G^a(T_N)$, $a>N/2$, и является 2π–периодической функцией по каждой переменной, $\mathcal{K}(x)\in L_1(R^N)$, $u(x)\in L_p(R^N)$, $p\ge 1$, функция $\varphi(\alpha,\omega)$ удовлетворяет свойствам $1^\circ - 4^\circ$ и справедливы (19) и (21), то при $\delta\to 0$ ряд (23) сходится по норме $C(T_N)$ к точному решению уравне–

ния (15), если $\alpha=\alpha(\delta)$ выбрано таким образом, что $c(\alpha)\,\delta \to 0$ при $\delta \to 0$ и $\alpha(\delta)\to 0$ при $\delta \to 0$.

Теперь оценим уклонение приближенного решения от точного по норме $L_p(T_N)$.

Так как $\|e^{i(k,x)}\|_{L_p(T_N)}=(2\pi)^{\frac{N}{p}}$, $p \geqslant 1$, имеем (аналогично (24))

$$\|\tilde{f}(x)-f(x)\|_{L_p(T_N)} \leqslant \Big\|\sum_{|k|\leqslant M} \frac{e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)} u_k(1-\Phi(\alpha,k))\Big\|_{L_p(T_N)} +$$

$$+\Big\|\sum_{|k|>M} \frac{e^{i(k,x)}}{\tilde{\mathcal{K}}(k)} u_k(1-\Phi(\alpha,k))\Big\|_{L_p(T_N)} + \sum_{|k|}\Big|\frac{\Phi(\alpha,k)}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\Big|\,|u_k-\tilde{u}_k|\cdot\|e^{i(k,x)}\|_{L_p(T_N)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{|k|\leqslant M}\Big|\frac{u_k}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}(1-\Phi(\alpha,k))\Big|_{|k|>M} + \sum\Big|\frac{u_k}{\tilde{\mathcal{K}}(k)}\Big| + (2\pi)^{-\frac{N}{p}}\cdot c(\alpha)\cdot\delta\Big)\cdot(2\pi)^{\frac{N}{p}}.$$

В силу свойства 3° функции $\Phi(\alpha,\omega)$ и абсолютной сходимости ряда (18) справедлива

Теорема 5

При выполнении условий теоремы 4 имеет место сходимость приближенного решения (23) $\tilde{f}(x)$ к точному решению уравнения (15) $f(x)$ по норме пространства $L_p(T_N)$ при $\delta \to 0$, если $\alpha(\delta)\to 0$ при $\delta \to 0$ и $c(\alpha)\,\delta \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$.

Можно показать, что соотношение (20) будет справедливо и без выполнения (19) для случая, когда ядро уравнения (15) является 2π-периодической функцией по каждой переменной, а ряд (16) сходится поточечно к функции $u(x)$, которая при сделанных предположениях относительно $\mathcal{K}(x)$ и $f(x)$ сама будет 2π-периодической. При этом поточечная сходимость ряда (16) к $u(x)$, если, например, $u(x)\in L_2(R^N)$, будет иметь место, когда $u(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $k = [N/2]$, $N>1$ [8].

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение

В теоремах 4 и 5 вместо выполнения равенства (19) можно предположить 2π-периодичность ядра $\tilde{\mathcal{K}}(x)$ и поточечную сходимость ряда (16) к $u(x)$. Утверждения теорем при этом останутся в силе.

***

В заключение приношу глубокую благодарность В.Я.Арсенину и Т.И.Савеловой за ценные замечания и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.

2. Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений I. – УМН, 1976, т. 31, № 6, с. 28 – 83.

3. Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений II. – УМН, 1977, т. 32, № 1, с. 107 – 130.

4. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. – ДУ, 1980, т. 16, № 5, с. 771 – 794, № 6, с. 980 – 1009.

5. Ильин В.А. Об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного эллиптического оператора. – ДАН СССР, 1984, т. 274, № 1, с. 19 – 22.

6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976.

7. Савелова Т.И. Об устойчивом суммировании рядов Фурье. – ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 4, с. 830 – 835.

8. Левитан Б.М. О суммировании кратных рядов и интегралов Фурье. – ДАН СССР, 1955, т. 102, № 6, с. 1073 – 1076.