МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Ю.В. Пятков С.Н. Федотов

ФАКУЛЬТЕТ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Лабораторный практикум по курсу «МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ»

Москва 2001

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Ю.В. Пятков С.Н. Федотов

Лабораторный практикум
по курсу
«МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ»

Москва 2001

УДК 53.08(076.5)
ББК 30.10я7
П 99

Пятков Ю.В., Федотов С.Н. **Лабораторный практикум по курсу «Методы обработки результатов измерений»:** *Уч. пособие.* М.: МИФИ, 2001. — 96 с.

Учебное пособие содержит описание четырех лабораторных работ. Все работы выполняются на компьютере с использованием пакета MORI, в котором моделируется работа экспериментальной установки и производятся расчеты статистических характеристик. Кроме того, для студентов, владеющих навыками работы с пакетом MATHCAD, представляется дополнительная возможность выполнить лабораторные работы самостоятельно, моделируя данные и производя необходимые вычисления.

Рекомендуется для студентов третьего курса факультета «Т», факультета СФФ, физического колледжа, для студентов ряда кафедр факультета «Ф».

Рецензент канд. физ.-мат. наук В.В. Борог

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ
в качестве учебного пособия

ПРЕДИСЛОВИЕ

Специфика измерений в ядерной физике обусловлена вероятностным характером изучаемых процессов и явлений. Это обстоятельство приводит к тому, что окончательный результат эксперимента принципиально известен не точно, а с некоторой погрешностью. Очевидно, что экспериментатора интересует истинное значение случайной величины, так называемое «генеральное» среднее, которое, вообще говоря, получается усреднением по бесконечному числу замеров. Однако на практике число измерений конечно и, следовательно, имеет место большее или меньшее приближение к истинному среднему. Таким образом, необходимой стадией любого экспериментального исследования является процедура получения оценок изучаемых случайных величин и обоснование надежности этих оценок. В каждом конкретном случае сложность этой процедуры различна, но, как правило, корректное решение задачи невозможно без использования основных разделов математической статистики: методов оценивания, статистической проверки гипотез, метода наименьших квадратов, оценки надежности. Изучению всех этих вопросов и посвящено настоящее пособие.

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

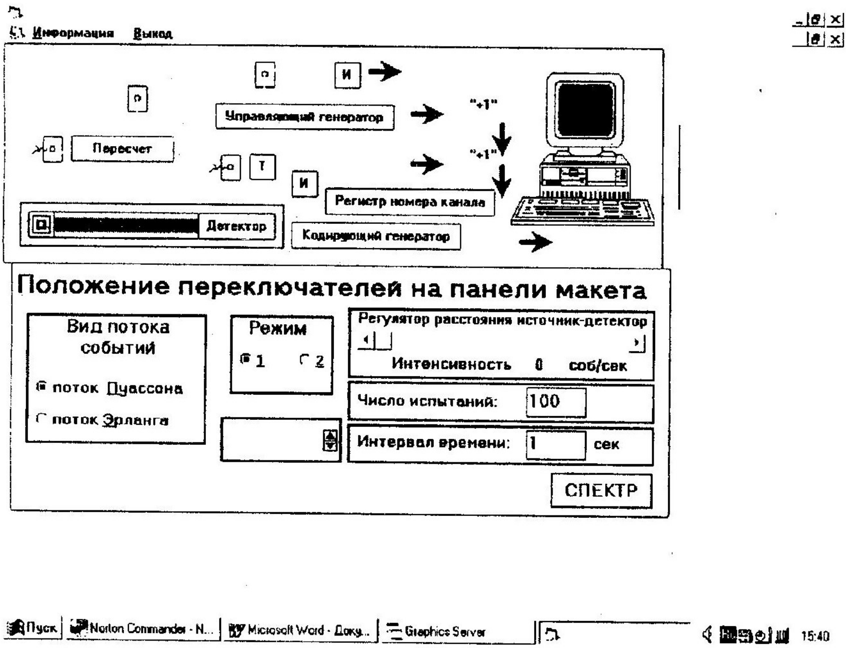


Рис.1.1. Мнемоническая схема, отображающая реальную физическую установку для получения и исследования пуассоновского потока

В качестве объекта изучения и обработки в рамках лабораторных работ настоящего практикума используются выборки из пуассоновского потока событий. Специальная программа (MORI) моделирует методом Монте — Карло такой поток, эквивалентный по статистическим свойствам потоку, образуемому, например, актами регистрации в полупроводниковом детекторе α-частиц радиоактивного препарата с большим (десятки лет) периодом полураспада. При входе в программу MORI на экране монитора появляется мнемоническая схема (рис.1.1), отображающая реальную физическую установку для получения и исследования пуассоновского потока событий. Схема снабжена необходимыми кнопками для задания режимов работы «установки» и параметров проводимого «эксперимента». Предусмотрено два режима «измерений».

Режим 1 — измерение числа событий пуассоновского потока за фиксированный интервал времени. На рис.1.2 представлена временная диаграмма работы «установки» в этом режиме. Акты регистрации α-частиц образуют во времени пуассоновский поток событий (ось *а*). Таким образом, под событием понимается акт регистрации частицы. Производится счет событий потока за равные промежутки времени τ (ось *б*). Число событий, сосчитанных за время τ (ось *в*), случайно. Эта дискретная случайная величина — число событий пуассоновского потока, произошедших за фиксированное время — распределена по закону Пуассона.

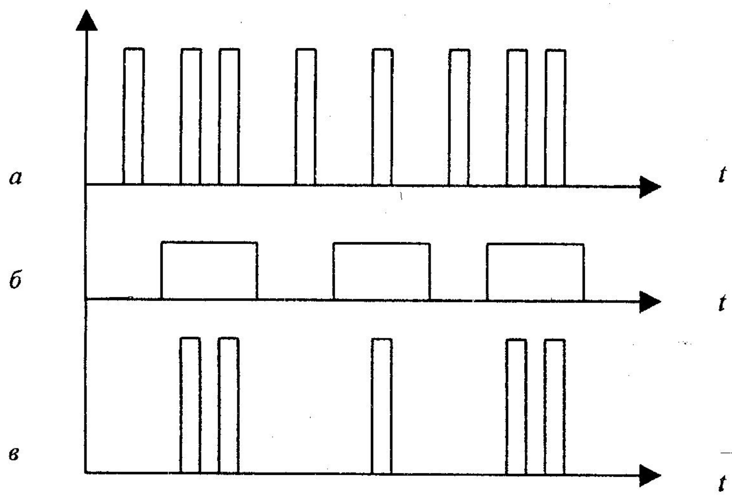


Рис.1.2. Схема, иллюстрирующая РЕЖИМ 1 работы лабораторной установки — измерение числа событий за фиксированный интервал времени

В реальном физическом макете этот режим реализуется следующим образом. Импульс тока, возникший в детекторе в результате регистрации α-частицы усиливается и через схему пропускания «И» (на рис.1.1 — верхняя) поступает в регистр номера канала. Технически регистр номера канала представляет собой счетчик в стандарте КАМАК, опрашиваемый PC через контроллер крейта. Схема «И» открыта лишь в течение рабочего такта управляющего генератора, задающего таким образом интервал времени Δt, в течение которого считаются события входного потока. По окончании рабочего такта управляющего генератора выдается команда на запись «+1» в канал многоканального счетчика, номер которого (канала) равен числу, записанному в регистр номера канала (т.е. числу событий входного потока, попавших в интервал Δt).

Режим 2 — измерение временного интервала между событиями пуассоновского потока. Временная диаграмма работы «установки» показана на рис.1.3. На оси *а* показаны моменты регистрации α-частиц, образующие во времени пуассоновский поток событий. Интервалы между соседними событиями (ось *б*) заполняются периодически следующими импульсами кодирующего генератора (ось *в*). В данном случае случайной величиной является длина временного интервала между событиями пуассоновского потока. Очевидно, это уже непрерывная случайная величина, но также связанная с пуассоновским потоком и распределенная, в отличие от предыдущего случая, экспоненциально.

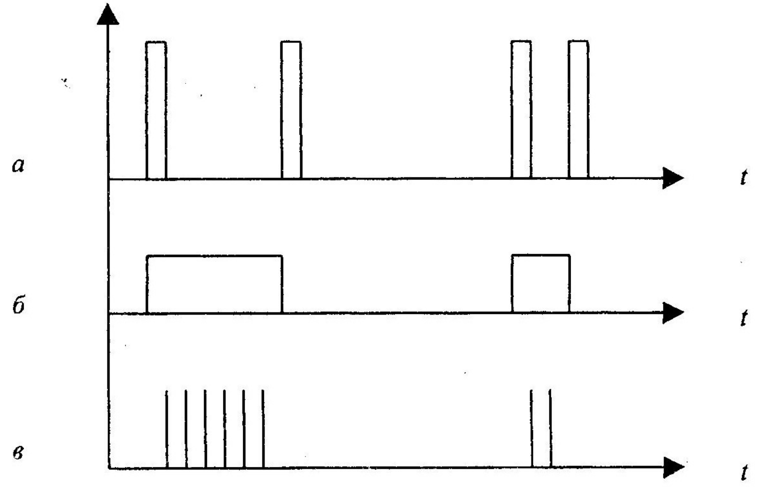


Рис.1.3. Временная диаграмма работы установки в режиме 2

В реальном физическом макете режим 2 реализуется следующим образом. Сигналы, образующие входной поток, поступают на счетный вход триггера Т, имеющего также управляющие входы R и S. Один из них переводит триггер в состояние «+1», открывающее схему пропускания «И» (на рис.1 — нижняя). Импульсы с выхода кодирующего генератора начинают проходить в регистр номера канала, связанный с PC. Это продолжается до тех пор, пока на счетный вход триггера не придет второй импульс. После чего триггер поменяет состояние (из «1» в «0») и закроет схему пропускания. В результате в регистре номера канала оказывается записанным код интервала времени между двумя импульсами входного потока. В момент переброса триггера из «1» в «0» выдается команда на запись «+1» в канал многоканального счетчика, причем номер канала совпадает с кодом, содержащимся в регистре номера канала. Таким образом, в i-м канале многоканального счетчика запоминается число случаев, когда длительность интервала между событиями входного потока была равна i единицам времени. Этой единицей является период следования импульсов кодирующего генератора. В рассмотренном режиме макет работает как многоканальный временной анализатор.

Отметим, что оба описанных режима работы могут применяться не только для исследования собственно пуассоновского потока событий, но и потоков Эрланга, получающихся пересчетом событий исходного пуассоновского потока (например, на «2», «4», «8», см. рис.1.1).

Работа 1

СВОЙСТВА ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ

***Цель:** исследование условий, при которых реальный физический процесс может быть описан как пуассоновский поток событий, изучение основных свойств пуассоновского потока, а также часто встречающихся на практике потоков, порожденных пуассоновским.*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение пуассоновского потока событий

Хорошей математической моделью поведения во времени ряда фундаментальных физических явлений, таких, как радиоактивный распад ядер, является пуассоновский поток событий (пуассоновский процесс).

Пуассоновский поток событий как математический объект аксиоматически определяется следующим образом.

Пуассоновским называется поток случайных по времени наступления событий, обладающих свойствами ординарности, стационарности и отсутствия последействия.

Свойство ординарности означает, что вероятность $P_1(\Delta t)$ произойти одному событию за Δt есть величина того же порядка малости, что и Δt, то есть $P_1(\Delta t) = n\Delta t$, где $n = \mathrm{const}$. Величина $P_{k>1}(\Delta t)$ есть величина более высокого порядка малости:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{k>1}(\Delta t)}{\Delta t} = 0 .$$

Свойство стационарности означает, что вероятность появления события зависит лишь от длительности интервала t и не зависит от того, где этот интервал расположен на временной оси, т.е. свойства потока не меняются во времени.

Отсутствие последействия означает: на непересекающихся временных интервалах вероятность появления некоторого числа событий в одном интервале не зависят от того, что произошло в другом интервале.

Основные свойства пуассоновского потока событий

Свойство 1. Для того, чтобы последовательность событий во времени образовала пуассоновский поток (т.е. удовлетворяла требованиям, сформулированным выше), необходимо и достаточно, чтобы вероятность $P_k(t)$ наступления k событий за время t определялась формулой

$$P_k(t) = \frac{(nt)^k}{k!} \mathrm{e}^{-nt}, \tag{1.1}$$

где n — интенсивность потока, т.е. среднее число событий, происходящих в единицу времени. Выражение (1.1) называют распределением (законом) Пуассона.

Для определения первых моментов распределения Пуассона (1.1) удобно воспользоваться аппаратом производящих функций.

Используя определение для производящей функции $f(s)$ дискретного распределения P_k

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot s^k,$$

несложно получить выражение для производящей функции распределения Пуассона:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!} \mathrm{e}^{-nt} s^k = \mathrm{e}^{nt(s-1)}.$$

Среднее значение случайной величины, распределенной по закону Пуассона, $k^{-} = f'(1) = nt$. Дисперсия

$$D(k) = f''(1) + f'(1) - (f')^2(1) = nt.$$

Свойство 2. Интервал времени между двумя последовательными событиями пуассоновского потока — величина случайная. Легко получить распределение этой величины. Пусть одно из событий произошло в момент $t = 0$. Вероятность $P(t)$ того, что следующее событие произойдет позже, чем заданное t, тождественна вероятности ненаступления события до момента t, т.е. $P_{k=0}(t) = \exp(-nt)$ (см. (1.1)). С другой стороны, вероятность того, что следующее событие произойдет раньше момента t, равная $(1 - P_{k=0}(t))$, представляет собой функцию распределения интервалов между последовательными событиями. Следовательно, искомая плотность распределения длительности интервалов между событиями пуассоновского процесса

$$P(t) = d/dt(1 - P_{k=0}(t)) = n\exp(-nt), \qquad (1.2)$$

где n — по-прежнему интенсивность потока. Функция (1.2) называется экспоненциальным законом распределения.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что среднее значение длительности временного интервала между событиями пуассоновского потока составляет величину, обратную интенсивности: $\tau = 1/n$; а дисперсия $D(t) = 1/n^2$. Наиболее вероятный интервал (мода) в соответствии с (1.2) равен 0.

Связь между распределениями: биноминальным, нормальным и распределением Пуассона

Известно, что вероятность k благоприятных исходов в серии из N независимых испытаний описывается биноминальным распределением:

$$P_N(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}, \qquad (1.3)$$

где p — вероятность благоприятного исхода в одном испытании, а среднее число благоприятных исходов в серии N испытаний

$$\bar{k} = Np. \qquad (1.4)$$

Выразим p из (1.4) и подставим в (1.3):

$$P_N(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!}\left(\frac{\bar{k}}{N}\right)^k \left(1-\frac{\bar{k}}{N}\right)^{N-k},$$

при $N \to \infty$, $p \to 0$, но $N_p = \text{const}$, получим:

$$P_N(k) = \frac{(\bar{k})^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\bar{k}}{N}\right)^N}_{\to e^{-\bar{k}}} \underbrace{\frac{((N-k+1)...n)}{N^k}\left(1-\frac{\bar{k}}{N}\right)^{-k}}_{\to 1}.$$

Окончательно

$$P(k) = \frac{(\bar{k})^k}{k!}e^{-\bar{k}}. \tag{1.5}$$

Таким образом, при $\bar{k} << N$ и $N \to \infty$ вероятность k благоприятных исходов в серии из N независимых событий может быть приближенно вычислена с помощью распределения Пуассона (1.5).

Полученный вывод замечателен тем, что дает возможность применять на практике логически ясную схему биноминального эксперимента для опознания случайных величин, распределенных по закону Пуассона.

Следующее рассуждение позволяет сформулировать условие, при котором распределение Пуассона может быть аппроксимировано нормальным распределением (распределением Гаусса). Разобьем мысленно интервал времени t, в течение которого производится счет событий пуассоновского потока на малые интервалы: Δt_i, $i = 1, 2, ..., m$. Каждому интервалу Δt_i соответствует какое-то число распадов N_i, такое, что $\sum_i N_i = N$. Таким образом, случайную величину N можно трактовать как композицию независимых случайных величин N_i, каждая из которых распределена по закону Пуассона. При достаточно большом числе интервалов, когда $m \to \infty$, согласно центральной предельной теореме итоговое распределение случайной величины должно быть нормальным. Сформулированное условие выполняется при $\bar{k} >> 1$. Тогда:

$$P(k) = \left[1/\sqrt{(2\pi\bar{k})}\right] \exp[-(\bar{k}-k)^2/2\bar{k}].$$

Реальные потоки, встречающиеся в практике физического эксперимента, порожденные пуассоновским потоком

Реально наблюдаемые процессы лишь приближенно могут быть описаны распределениями (1.1), (1.2).Необоснованное применение к реальным потокам выводов, справедливых только для пуассоновского потока, приводит на практике к серьезным ошибкам. Вопрос о применении модели пуассоновского потока к изучаемому явлению должен специально исследоваться методами статистики, например, с помощью критериев согласия. Рассмотрим два потока, порожденных пуассоновским потоком.

Поток событий конечной длительности. Условие отсутствия последействия выполняется для событий нулевой длительности, то есть точечных событий. Конечная длительность события в реальных физических ситуациях связана, например, с наличием «мертвого» времени τ у детекторов излучений и других приборов ядерной физики. Для наиболее часто встречающегося на практике случая $n\tau \ll 1$ вероятность $P_k(t)$ прихода k событий длительностью τ за время t, если начала таких событий образуют пуассоновский поток, дается формулой:

$$P_k(t) = \frac{(n(t-k\tau))^k}{k!} e^{-n(t-k\tau)}. \qquad (1.6)$$

Для среднего и дисперсии распределения (1.6) имеем:

$$\bar{k} = nt/(1+n\tau)\,; \qquad (1.7)$$

$$D(k) = nt/(1+n\tau)^3. \qquad (1.8)$$

Таким образом, для потока событий конечной длительности, порожденного пуассоновским потоком, дисперсия числа событий, зарегистрированных за фиксированный (единичный) интервал времени, уже не равна среднему. При оценке интенсивности потока по одному измерению известное выражение $n = N \pm \sqrt{N}$ теряет свой обычный смысл, так как $\sqrt{N}$ уже не является среднеквадратичной погрешностью измерения оценки интенсивности потока.

Поток событий после пересчета. Счет событий, связанных с пуассоновским потоком — распространенная операция в ядернофизическом эксперименте, например, в радиометрии ионизирующих излучений. Функцию счета событий реализуют электронные счетчики, состоящие обычно из двоичных или десятичных пересчетных ячеек. Если на вход двоичной пересчетной ячейки поступает пуассоновский поток сигналов, то на выход проходит только каждый второй сигнал входного потока. Соответственно на выход счетчика из m ячеек проходит только каждый 2^m сигнал. Число $k = 2^m$ называется коэффициентом пересчета. Сигналы на выходе счетчика с коэффициентом пересчета k образуют поток Эрланга k-го порядка. Интервалы времени между событиями, образующими поток Эрланга k-го порядка, имеют распределение вида:

$$P(t) = n[(nt)^{k-1}/(k-1)!]e^{-nt}, \tag{1.9}$$

где n — интенсивность исходного пуассоновского потока, порождающего поток Эрланга.

Легко видеть, что для любого $k > 1$, наиболее вероятный интервал уже отличен от 0 (сравните с (1.2)). Важно учитывать это обстоятельство при разработке аппаратуры ядерной электроники, обрабатывающей события, образующие во времени потоки, порожденные пуассоновским потоком.

Составное (обобщенное) распределение Пуассона

В некоторых задачах ядерной физики модель пуассоновского потока не применима для описания соответствующих потоков событий из-за нарушения свойства ординарности. Рассмотрим пример.

Пусть стационарный поток света падает на фотокатод фотоэлектронного умножителя. Число фотоэлектронов, покидающих фотокатод за время t подчиняется закону Пуассона (1.1). Каждый фотоэлектрон, попадая на первый динод выбивает один или несколько электронов с динода со сравнимыми вероятностями. В данном примере можно выделить два типа событий: первичные и вторичные. Первичные события заключаются в вылете фотоэлектронов с фотокатода и описываются распределением (1.1). Вторичные события заключаются в вылете электронов с динода и по своей природе порождаются (индуцируются) первичными. Число вторичных событий за время t, приходящихся на одно первичное есть целочисленная случайная величина с законом распределения вида:

Значения случайной величины	1	2	...	i	...	m
Вероятности значения случайной величины	P_1	P_2	...	P_i	...	P_m

Такой процесс называется двухкаскадным. Основываясь на теории каскадных процессов для случайной величины — числа вторичных событий за время t, можно получить ее производящую функцию

$$f_2(s) = e^{nt(\psi(s)-1)}, \tag{1.10}$$

где распределение, соответствующее производящей функции $f_2(s)$ называется составным распределением Пуассона; $\psi(s)$ — производящая функция числа вторичных событий, индуцированных одним первичным; n — интенсивность пуассоновского потока (первый каскад).

РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

А. Исследование свойств пуассоновского потока событий

I. Изучение распределения числа событий за фиксированный интервал времени в пуассоновском потоке событий.

Запустить программу MORI 1.

Выбрать меню «Лабораторная работа № 1» и любой пункт рабочего задания кроме 1-го.

Пользуясь возможностями программы получить выборку чисел событий за фиксированный интервал времени. Объем выборки равен 10, интенсивность потока 1 соб/с. Интервал времени 10 с. Результаты записать в табл.1.2.

II. Изучение распределения временных интервалов в пуассоновском потоке событий.

Запустить программу MORI.

Выбрать меню «Лабораторная работа № 1» и любой пункт рабочего задания кроме 1-го.

Получить выборку временных интервалов между случайными событиями, распределенными по экспоненциальному закону. Объем выборки 10, интенсивность потока 0,1 соб/с. Результаты записать в табл.1.3.

Представить полученные в пунктах AI и AII экспериментальные результаты в виде сгруппированных выборок и получить по этим выборкам оценки среднего $\widetilde{x}$ и дисперсии $D(x)$ обеих генеральных совокупностей в соответствии с определениями

$$\widetilde{x} = (1/m)\sum_{j=1}^{m} x_j n_j \,; \quad D(x) = [1/(m-1)]\sum_{j=1}^{m} n_j (x_j - \widetilde{x})^2 .$$

Здесь x_j — значения случайной величины; n_j — абсолютная частота j-го значения случайной величины x; m — объем выборки.

III. Качественное сравнение экспериментально получаемого распределения числа событий за фиксированный интервал времени в пуассоновском потоке и теоретического распределения Пуассона.

Получить выборку чисел, распределенных по закону Пуассона. Интенсивность потока 3 соб/с, объем выборки 100 соб.

В меню «Теоретические распределения» получить значения теоретического распределения Пуассона для того же среднего, что и в предыдущем пункте. Результаты — экспериментальные частоты и теоретические вероятности — записать в табл.1.4 и сравнить их графически.

IV. Исследование изменения формы распределения Пуассона при изменении среднего генеральной совокупности.

Получить три выборки значений случайной величины, распределенной по закону Пуассона. Интенсивности потока задать 0.1, 1, 10 соб/с. Объем каждой выборки 10000 соб. Пользуясь меню «Характеристики выборки» получить оценки среднего и дисперсии для каждой из трех выборок. Зарисовать графики полученных экспериментальных распределений.

Б. Исследование потоков, порожденных пуассоновским потоком. Поток Эрланга

I. Получить выборки значений случайных величин, связанных с потоком Эрланга. Набор выполнить в соответствии с табл.1.1.

Таблица 1.1

Параметры выборок из потоков Эрланга

Интенсивность исходного пуассоновского потока, соб./с	Режим измерений	Коэффициент пересчета исходного пуассоновского потока	Объем выборки (событий)
2	I	2	10000
		4	—
	II	2	—
		4	—
4	I	2	—
		4	—
	II	2	—
		4	—
0,2	I	2	—
		4	—
	II	2	—
		4	—
0,4	I	2	—
		4	—
	II	2	—
		4	—

Воспользовавшись меню «Характеристики выборки» получить оценки среднего и дисперсии полученных распределений. Сравнить форму и два первых момента полученных в этом пункте распределений с аналогичными распределениями для пуассоновского потока. Объяснить разницу.

В. Исследование составного распределения Пуассона

Настоящий пункт рабочего задания выполняется методом стохастического моделирования (Монте — Карло)(см. приложение 1). Моделируется уже упоминавшийся в теоретическом введении физический процесс, происходящий в фотоэлектроном умножителе (ФЭУ).

При облучении фотокатода ФЭУ стационарным потоком света покидающие фотокатод электроны образуют во времени пуассоновский поток интенсивностью 1 c^{-1}. Каждый фотоэлектрон, попадая на динод ФЭУ, может выбить 1, 2, 3 электрона с вероятностями соответственно: $P_1 = 0{,}2$; $P_2 = 0{,}5$; $P_3 = 0{,}3$. Требуется найти среднее число и дисперсию числа электронов, образующихся на диноде за время Δt.

Решение задачи методом Монте — Карло («бумажный эксперимент»)

1. Получить выборку чисел, распределенных по закону Пуассона. Объем выборки $m = 4$, интенсивность потока $n = 0{,}1$ соб/с, интервал $\Delta t = 5$ с. Результаты занести в табл.1.5.

2. По выборке «число электронов после динода» получить оценку среднего числа электронов и их дисперсии за время Δt.

Решение задачи в рамках теории вероятностей

1. Получить выражение для производящей функции f_2 изучаемого двухкаскадного процесса и среднего числа электронов, образующихся на диноде за время Δt.

2. Получить выражение для дисперсии числа электронов, образующихся на диноде за время Δt, воспользовавшись общей формулой для дисперсии двухкаскадного процесса:

$$D_\Sigma = \bar{k}_1 D_2 + D_1 \bar{k}_2^2,$$

где $\bar{k}_1$, D_1 — среднее число и дисперсия первичных событий; $\bar{k}_2$, D_2 — среднее число и дисперсия вторичных событий, индуцированных одним первичным.

3. Сравнить численные значения оценок среднего и дисперсии, найденных по результатам «бумажного эксперимента» и расчетов, произведенных в этом пункте рабочего задания.

Оформление отчета

Отчет должен содержать:

1) краткое описание алгоритма получения числа событий за фиксированный интервал времени в ручном и автоматическом (см. описание макета) режиме проведения эксперимента;

2) краткое описание алгоритма получения распределения временных интервалов в пуассоновском потоке событий в ручном и автоматическом режиме проведения эксперимента;

3) полученные по данным табл.1.2 и 1.3 оценки среднего и дисперсии соответствующих генеральных совокупностей;

4) экспериментально полученную в п. AIII выборку, нормированную на «1» и представленную в виде полигона частот (на том же графике должны быть нанесены значения вероятностей теоретического распределения Пуассона);

5) вывод о влиянии среднего генеральной совокупности на динамику изменения формы распределения Пуассона (п.AIV);

6) вывод о связи каждой из выборок, полученных в п.Б, с пуассоновским потоком событий;

7) полностью заполненные бланки табл.1.2-1.5.

Таблица 1.2

Пуассоновский поток событий.
Распределение числа событий за фиксированный интервал времени

Абсолютная частота													
Значение случайной величины													

Оценка среднего = Оценка дисперсии =

Таблица 1.3

Распределение временных интервалов

Абсолютная частота													
Значение случайной величины													

Оценка среднего = Оценка дисперсии =

Таблица 1.4

Сравнение экспериментально полученных абсолютных частот с расчетными вероятностями

Значение случайной величины	Абсолютная частота значений случайной величины	Относительная частота значений случайной величины (сумма частот = 1)	Массив вероятностей. Распределение Пуассона
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

Оценка среднего =

Таблица 1.5

Составное распределение Пуассона.
Решение задачи методом Монте — Карло

Элементы исходной выборки по числу фотоэлектронов																				
Равномерно распределенные числа REN																				
Число вторичных электронов на I первичный																				
Число электронов на диноде за Δt Σ																				
Выборочное среднее число электронов за Δt																				
Выборочная дисперсия для числа электронов за Δt																				

Решение задачи в рамках теории вероятностей

Формула для математического ожидания двухкаскадного процесса	
Формула для дисперсии двухкаскадного процесса Д(К)	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Контрольные вопросы *для допуска* студента к выполнению лабораторной работы

1. Дайте определение пуассоновского потока событий.

2. Напишите выражение для вероятности $P_k(t)$ — наступления k событий за время t — в пуассоновском потоке событий интенсивностью n соб/с.

3. Напишите выражения для функции плотности распределения вероятностей случайной величины — длительности временных интервалов между последовательными событиями пуассоновского потока событий интенсивностью n соб/с.

4. Дайте определение производящей функции целочисленной случайной величины.

5. Чему равны матожидание и дисперсия случайной величины — числа событий за время t в пуассоновском потоке событий интенсивностью n соб/с?

6. Чему равны матожидание и дисперсия случайной величины — длительности временных интервалов между последовательными событиями пуассоновского потока событий интенсивность n соб/с?

7. Чему равен наиболее вероятный интервал времени между двумя последовательными событиями пуассоновского потока событий интенсивность n соб/с?

8. Дайте определение потока Эрланга k-го порядка и напишите выражение для плотности распределения вероятностей случайной величины — длины временного интервала между двумя последовательными событиями потока Эрланга. (Интенсивность исходного пуассоновского потока равна n соб/с.)

9. Напишите выражение для производящей функции составного распределения Пуассона. (Рассмотреть двухкаскадный процесс, первый каскад которого — обычный пуассоновский поток событий.)

10. Напишите выражение для плотности распределения вероятностей случайной величины — числа благоприятных исходов k в серии из n независимых испытаний. Вероятность благоприятного исхода в одном испытании равна p.

11. Напишите выражение для плотности распределения вероятностей случайной величины — числа событий k длительностью τ за время t, если их начала образуют пуассоновский поток событий.

12. При каких исходных допущениях возможен предельный переход распределения Пуассона в распределение Гаусса? Начиная с каких численных значений параметра распределения Пуассона возможен этот переход?

13. Можно ли пользоваться формулой для оценки интенсивности потока $N \pm \sqrt{N}$, где N — число отсчетов пересчетного устройства за единицу времени, если каждый отсчет есть регистрация события длительностью τ?

14. Выпишите условия, при которых биномиальное распределение может быть аппроксимировано распределением Пуассона.

15. Чему равен средний интервал времени между двумя последовательными событиями потока Эрланга k-го порядка? (Интенсивность исходного пуассоновского потока события равна n соб/с.)

Контрольные вопросы *при защите* студентом выполненной лабораторной работы

1. Приведите примеры реальных физических ситуаций, для описания которых подходит модель потока со случайным во времени наступлением отдельных событий. В каких из них нарушаются свойства стационарности, ординарности и отсутствия последствия?

2. Идентичны ли распределения интервалов между двумя соседними событиями пуассоновского потока с одной стороны и между случайным моментом времени и ближайшим к нему событием пуассоновского потока — с другой?

3. Пусть любое событие исходного пуассоновского потока событий (интенсивность n соб/с) может исчезать с вероятностью $p =$ $= 1/2$. Будет ли при этом результирующий поток событий пуассоновским? (Воспользоваться свойствами производящей функции каскадного процесса.)

4. Пусть производится пересчет событий исходного пуассоновского потока на k. Как (качественно) выглядит распределение временных интервалов между событиями результирующего потока для $k = 1, 2, 8, 10$? (Проанализируйте сумму случайных интервалов времени.)

5. По какому закону распределено число отсчетов в каждом канале многоканального анализатора, например, при снятии гамма-спектра с помощью ППД?

6. Какое практическое и важное следствие следует из того обстоятельства, что в потоке событий конечной длительности матожидание численно не равно дисперсии?

7. Получите выражение для относительного среднеквадратичного отклонения случайной величины — длительности интервала времени между двумя событиями пуассоновского потока.

8. Как получаются конкретные значения дискретной случайной величины в методе Монте — Карло?

Контрольные вопросы *по теме типа зачетных*

1. Будет ли суперпозиция двух независимых пуассоновских потоков событий пуассоновским потоком? Чему равны матожидание и дисперсия результирующего потока? (Воспользоваться свойствами производящей функции.)

2. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей случайной величины — числа событий за время t — в условиях нарушения условия стационарности в определении пуассоновского потока событий? (Вывод формулы.)

3. Сформулируйте условие квазистационарности при рассмотрении пуассоновского потока событий при нарушении свойств стационарности.

4. Выведите формулы для матожидания и дисперсии случайной величины — числа вторичных событий за время t — при рассмотрении двухкаскадного процесса, в котором первый каскад представляет собой обычный пуассоновский поток событий. (Используйте аппарат производящих функций каскадных процессов.)

5. Получите формулу для относительного среднеквадратичного отклонения случайной величины - длительности интервала времени между двумя событиями пуассоновского потока событий.

6. Обоснуйте применимость распределения Пуассона к описанию явления р/а распада.

Работа 2

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ И КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

***Цель**: освоение методов и практических приемов статистической проверки различных гипотез, а именно: о численных значениях параметров изучаемой генеральной совокупности, о принадлежности выборки к той или иной генеральной совокупности (законе распределения генеральной совокупности).*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основные определения

На разных стадиях обработки экспериментальной информации возникает необходимость в формулировке и экспериментальной проверке некоторых предположительных утверждений (называемых гипотезами) относительно природы или величины неизвестных параметров рассматриваемой стохастической схемы.

Процедура обоснования высказанной гипотезы с имеющимися в нашем распоряжении выборочными данными x_1, x_2, ..., x_n осуществляется с помощью того или иного (специальным образом сконструированного) статистического критерия (правила, рецепта) и называется статистической проверкой гипотез.

В результате проверки статистической гипотезы может быть сделан вывод, что данные наблюдений противоречат высказанной гипотезе и, следовательно, от этой гипотезы следует отказаться, либо что данные не противоречат высказанной гипотезе и, следовательно, ее можно принять в качестве одного из допустимых решений.

Последний результат вовсе не означает, что проверяемая гипотеза является наилучшей и единственно верной: просто эта гипотеза не противоречит имеющимся у нас выборочным данным. Возможно, таким же свойством (не противоречить опытным данным) обладают и другие гипотезы. Таким образом, даже статистически проверенную гипотезу H следует расценивать не как раз и навсегда установленный факт, а лишь достаточно правдоподобное, не противоречащее опытным данным утверждение.

Введем некоторые необходимые понятия и определения.

1. Нулевой (основной) называют проверяемую (выдвинутую) гипотезу; обозначают ее H_0.

2. Альтернативной (конкурирующей) гипотезой называют гипотезу, которая противоречит основной; обозначают ее H_1.

3. Простой называют гипотезу, которая содержит только одно предположение. Например, гипотеза $H : \lambda = 10$, где λ — параметр распределения Пуассона, есть простая гипотеза.

4. Гипотеза, состоящая из конечного или бесконечного числа простых гипотез, называется сложной. Например, сложная гипотеза $H : \lambda > 10$ состоит из бесконечного множества простых гипотез вида $H_i : \lambda = A_i$, где A_i — любое число больше 10.

5. Ошибка первого рода состоит в том, что в результате проверки будет отвергнута правильная гипотеза, когда она в действительности верна. Вероятность совершить ошибку первого рода называется уровнем значимости: обычно обозначается α или ε.

6. Ошибка второго рода состоит в том, что в результате проверки будет принята проверяемая гипотеза, когда она неверна, а на самом деле справедлива гипотеза, конкурирующая с проверяемой. Вероятность совершить ошибку второго рода обычно обозначают β.

7. Мощность критерия относительно альтернативной гипотезы есть вероятность события «ошибка второго рода не допущена» и равна, следовательно, $(1 - \beta)$.

8. Пусть W — множество всех возможных значений критерия. Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Областью допустимых значений (областью принятия гипотезы) называют совокупность значений критерия, когда нулевую гипотезу принимают. Критическая область может быть правосторонней, левосторонней и двусторонней.

Общая логическая схема статистической проверки гипотезы (статистического критерия)

По своему назначению и в зависимости от конкретных решаемых задач статистические критерии очень разнообразны. Однако их объединяет общность логической схемы, по которой они конструируются. Коротко логическую схему можно описать следующим образом.

1. Выдвигаем гипотезу H_0.

2. Задаемся уровнем значимости α. Отметим, что всякое статистическое решение, т.е. решение, принимаемое на основании ограниченного (конечного) числа наблюдений x_1, x_2, ..., x_n, с неизбежностью сопровождается некоторой вероятностью ошибочного заключения как в ту, так и в другую стороны. Например, в какой-то небольшой доле случаев α гипотеза H_0 может оказаться отвергнутой, тогда как на самом деле она верна, или наоборот, в какой-то доле случаев β мы можем принять основную гипотезу H_0, тогда как на самом деле она ошибочна, и верна конкурирующая гипотеза H_1. При фиксированном объеме выборки величину вероятности одной из этих ошибок можно задать по своему усмотрению. Обычно для конечной выборки x_1, x_2, ..., x_n задаются величиной α. Ее конкретное значение зависит от сопоставления потерь, которые мы понесем в случае ошибочных заключений в ту или иную сторону: при этом чем весомее для нас потери от ошибочного отвержения гипотезы H_0, тем меньшей выбирается величина α. Обычно пользуются некоторыми стандартными значениями уровня значимости : $\alpha = 0.1$; 0.05; 0.025; 0.01; 0.005; 0.001. Например, $\alpha = 0.05$ означает, что в среднем в пяти случаях из ста мы будем ошибочно отвергать гипотезу H_0 при использовании данного статистического критерия.

3. Задаемся некоторой функцией от результатов наблюдения (т.е. функцией выборки) $\gamma^{(n)} = \gamma(x_1, x_2, ..., x_n)$. Эта функция в различных учебниках называется по-разному: проверочная статистика, критическая статистика, статистический критерий. Функция $\gamma^{(n)}$, как и всякая функция выборки, сама является случайной величиной и в предположении справедливости гипотезы H_0 подчиняется некоторому хорошо изученному закону распределения с плот-

ностью $f_{\gamma(n)}(u)$. Содержательный смысл критерия $\gamma^{(n)}$ заключается в том, что его значением определяется мера расхождения выборочных данных x_1, x_2, ..., x_n с проверяемой гипотезой H_0.

4. Из таблиц распределения $f_{\gamma(n)}(u)$ находим критические точки: левую $\gamma_{\alpha/2}^{\min}$ и правую $\gamma_{\alpha/2}^{\max}$, которые разделяют всю область мыслимых значений случайной величины $\gamma^{(n)}$ на три части: область неправдоподобно малых (I), неправдоподобно больших (III), и правдоподобных значений (II). Отметим, что это имеет смысл делать только в условиях справедливости гипотезы H_0. Область (I + III) называется критической областью. Область II — областью допустимых значений. В тех случаях, когда основную опасность для нашей гипотезы H_0 представляют односторонние отклонения, т.е. либо «слишком малые», либо «слишком большие» значения $\gamma^{(n)}$, находят только одну критическую точку: $\gamma_{\alpha}^{\min}$ или $\gamma_{\alpha}^{\max}$.

5. В выражение для $\gamma^{(n)}$ подставляем имеющиеся конкретные данные выборки x_1, x_2, ..., x_n и получаем численное значение. Если окажется, что вычисленное значение критерия $\gamma^{(n)}$ принадлежит области допустимых значений, то гипотеза H_0 считается не противоречащей выборочным данным. Если же численное значение $\gamma^{(n)}$ попадает в критическую область, то делается вывод, что выдвинутая гипотеза противоречит экспериментальным данным и ее следует отклонить (этот вывод, очевидно, сопровождается вероятностью ошибки, равной α!) Таким образом, решение, принимаемое на основании любого статистического критерия, может оказаться ошибочным как в случае отклонения проверяемой гипотезы H_0 (с вероятностью α), так и в случае ее принятия (с вероятностью β при выбранной альтернативной гипотезе). Очевидно, из двух критериев, которые характеризуются одной и той же вероятностью отвергнуть на самом деле правильную гипотезу H_0, следует выбрать тот, который сопровождается меньшей ошибкой второго рода или, что то же самое, большей мощностью $(1 - \beta)$.

Наряду со строгим количественным определением мощности критерия относительно альтернативной гипотезы, на качественном уровне можно ввести понятие «чувствительности критерия» как «способности» критерия различить две близкие гипотезы.

Гипотезы о виде распределения исследуемой случайной величины

Если при обработке ряда наблюдений x_1, x_2, ..., x_n некоторой случайной величины ξ, закон распределения которой не известен, но есть основания предположить, что он имеет какой-то конкретный вид А (например, Гаусса, Пуассона, и так далее), то обычно проверяют гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена по закону А. Иными словами, это приводит к необходимости проверки гипотез типа H: $F_{\text{эмп}}(x) = F_{\text{теор}}(x,\theta)$, где $F_{\text{эмп}}(x)$ — эмпирическая функция распределения, $F_{\text{теор}}(x)$ — гипотетическая функция распределения, которая может быть задана либо однозначно $F_0(x)$ (и тогда $F_{\text{теор}}(x) = F_0(x)$, где $F_0(x)$ — полностью известная функция), либо с точностью до принадлежности к некоторому параметрическому семейству $F(x,\theta)$ (и тогда $F_{\text{теор}}(x) = F(x,\theta)$, где θ — вектор параметров), значения которых не известны, но могут быть оценены по выборке.

Проверка гипотез этого типа осуществляется с помощью так называемых критериев согласия с известными законами распределения. Ниже рассматривается один из них, а именно: критерий χ^2 («хи-квадрат»), или критерий Пирсона.

Основная идея критерия состоит в следующем. Допустим по выборке объема n получено эмпирическое распределение в виде:

Значения случайной величины	x_1	x_2	x_3	x_k
Эмпирические частоты	n_1	n_2	n_3	n_k

Здесь $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — объем выборки.

На уровне значимости α нужно проверить гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена по какому-то закону А.

Процедура проверки нулевой гипотезы, по существу, основана на сравнении эмпирических n_i и теоретических n_i' частот. Очевидно, что чем ближе друг к другу значения n_i и n_i', тем обоснованнее наше предположение о виде проверяемого закона А. При этом в качестве статистического критерия проверки нулевой гипотезы о виде закона распределения генеральной совокупности используют случайную величину

$$\gamma^{(n)} = \sum_i \frac{(n_i - n_i')}{n_i'},$$

которая служит количественной мерой близости эмпирического и теоретического распределения изучаемой величины. Эта статистика при выполнении определенных условий подчиняется закону распределения χ^2 с f степенями свободы. По определению,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f} \xi_i^2,$$

где случайные величины ξ_i распределены нормально со средним «0» и дисперсией «1». Величина f в последней формуле равна числу **независимых** слагаемых (число переменных — минус число уравнений, связывающих эти переменные, если такие связи имеются).

Таким образом, статистика $\gamma^{(n)}$ будет распределена по χ^2, если каждое слагаемое распределено нормально со средним «0» и дисперсией «1». При этом безразлично, к какой генеральной совокупности принадлежит выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Явный вид функции плотности вероятности распределения χ^2 известен:

$$P_f(\chi^2) = (1/2)^{f/2}\Gamma(f/2)(\chi^2)^{(f/2-1)}\exp(-\chi^2/2),$$

где χ^2 следует понимать как переменную.

Сформулируем теперь последовательность действий, которыми надо пользоваться на практике при обработке экспериментальных результатов с целью проверки гипотезы о принадлежности последних к какой-либо генеральной совокупности, имеющей закон распределения А с числом параметров, равным s.

1. Весь диапазон значений исследуемой случайной величины разбивается на несколько (r) интервалов группирования Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_r$ не обязательно одинаковой длины. Это разбиение на интервалы необходимо подчинить следующим условиям:

а) в каждый интервал группирования Δ_i должно попасть не менее $7 \div 10$ выборочных значений, при этом желательно, чтобы в разные интервалы попало примерно одинаковое число точек;

б) общее число интервалов должно быть максимальным при соблюдении условия а);

в) если диапазон значений исследуемой случайной величины — вся числовая прямая (полупрямая), то крайние интервалы группирования будут полупрямыми (соответственно один из них).

2. По выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ находятся статистические оценки $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, от которых зависит закон распределения А с функцией распределения $F(x, \theta)$, например, методом моментов, методом максимального правдоподобия и так далее.

3. Подсчитывается число ν_i точек, попавших в каждый i-й интервал группирования Δ_i и вычисляются теоретические вероятности попадания исследуемой случайной величины в Δ_i, т.е. вероятности

$$P_i = F_{\text{теор}}(x_i^0; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) - F_{\text{теор}}(x_{i-1}^0; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$$

(x_{i-1}^0 и x_i^0 есть левый и правый концы i-го интервала Δ_i).

4. Вычисляется «экспериментальное» значение критерия χ^2 по формуле

$$\chi^2_{\text{эксп}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}.$$

5. Число степеней свободы $\chi^2_{\text{эксп}}$ находится из условия $f = r - s - 1$, где r — число интервалов разбиения; s — число параметров предполагаемого распределения, *оцениваемых по той же выборке*. Действительно, как отмечалось выше, по определению, число степеней свободы в χ^2 распределении равно числу независимых слагаемых. В сумме для вычисления $\chi^2_{\text{эксп}}$ всего слагаемых r штук, из них независимых только $f = r - s - 1$ штук, так как их связывает s уравнений для оценки неизвестных параметров распределения $P(x)$ и соотношение

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_i = n .$$

Если, например, предполагают, что генеральная совокупность распределена по закону Пуассона с неизвестным параметром, т.е. $s = 1$, то $f = r - 1 - 1 = r - 2$, если генеральная совокупность распределена по закону Гаусса, т.е. $s = 2$, то $f = r - 1 - 2 = r - 3$ и т.п.

6. Из таблиц χ^2-распределения для заданного уровня значимости α находится критическое значение «хи-квадрат» (имеется в виду таблица, содержащая решения уравнения):

$$\int_{\chi_0^2}^{\infty} p(\chi^2)\, d\chi^2 = \alpha .$$

7. Проверяется, попадает ли экспериментальное значение χ^2 в область допустимых значений критерия. Если $\chi^2_{\text{эксп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза о том, что исследуемая случайная величина действительно подчиняется закону распределения $F_{\text{теор}}(x, \theta)$, принимается (разумеется на уровне значимости α) и наоборот отвергается, если $\chi^2_{\text{эксп}} > \chi^2_{\text{кр}}$.

Гипотезы о равенстве выборочного среднего гипотетическому среднему нормальной генеральной совокупности

Этого типа гипотезы принадлежат к гипотезам относительно неизвестных значений параметров рассматриваемой генеральной совокупности.

Допустим, имеется выборка из нормальной генеральной совокупности x_1, x_2, ..., x_n объема n; по ней найдено выборочное среднее

$$\overline{X} = (1/n)\sum x_i .$$

Если объем выборки достаточно велик, выборочное среднее будет подчиняться нормальному распределению вероятностей независимо от вида распределения каждой величины x_i вследствие центральной предельной теоремы.

Генеральное среднее $\overline{X}$ не известно, но есть основания предполагать, что оно равно a_0. Требуется при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу о равенстве генерального среднего гипотетическому значению a_0, т.е. H_0: $\overline{X} = a_0$. В принципе возможны две ситуации: а) генеральная дисперсия известна и равна некоторому значению σ_0^2; б) генеральная дисперсия не известна и ее надо оценивать по выборке. По этой причине проверка нулевой гипотезы осуществляется с применением различных критериев, а именно: критерия Лапласа (а) и критерия Стьюдента (б).

Отметим, что в обоих случаях критическая область строится в зависимости от выбора конкурирующей гипотезы либо H_1: $\overline{X} \neq a_0$ (двусторонняя область), либо H_1: $\overline{X} > a_0$ (правосторонняя), либо H_1: $\overline{X} < a_0$ (левосторонняя).

Генеральная дисперсия известна. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы используется случайная величина $U = (\bar{x} - a_0)/\sigma(\bar{x})$. Здесь $\bar{x}$ распределено нормально, $\sigma(\bar{x})$ — среднеквадратичное отклонение случайной величины, связанное с дисперсией соотношением $\sigma(\bar{x}) = \sigma_0 / \sqrt{n}$. При этом, если нулевая гипотеза верна, то случайная величина $u = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n} / \sigma_0$ распределена нормально с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной 1, плотность вероятности $f(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \times \exp(-u^2/2)$. В статистических руководствах различным образом табулируется нормальное распределение, чаще всего в виде

$$\Phi_0(x) = (1/\sqrt{2\pi})\int_0^x \exp(-x^2/2)dx .$$

Проверка нулевой гипотезы при конкурирующей H_1: $\overline{X} \neq a_0$ проводится по следующей схеме.

1. Задаемся уровнем значимости.

2. Выбираем вид области, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была бы равна α. В данном случае критическая область двусторонняя.

Отметим, что наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда «левая» и «правая» критические точки выбираются таким образом, чтобы вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области была бы равна $\alpha/2$.

Так как U нормальная нормированная величина, а распределение ее симметрично относительно нуля, критические точки будут симметричны относительно нуля, поэтому достаточно найти только правую точку $u_{\text{кр}}$. Тогда критическая область будет $u < -u_{\text{кр}}$, $u > u_{\text{кр}}$; область принятия нулевой гипотезы — $(-u_{\text{кр}},\ u_{\text{кр}})$. Из таблиц $\Phi_0(x)$ (так называемая функция Лапласа) $u_{\text{кр}}$ находится согласно уравнению $\Phi_0(u_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2$.

3. Вычисляем экспериментальное значение критерия по данным выборки $u_{\text{эксп}} = (\overline{X} - a_0)\sqrt{n}/\sigma_0$.

4. Сравниваем $u_{\text{эксп}}$ и $u_{\text{кр}}$. Если $|u_{\text{эксп}}| < u_{\text{кр}}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу; если $|u_{\text{эксп}}| > u_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу отвергаем.

Процедура проверки нулевой гипотезы при конкурирующей H_1: $\overline{X} > a_0$ отличается от вышеописанной только выбором вида критической области. В этом случае правосторонняя критическая область строится так, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была бы равна принятому уровню значимости α. Критическая точка находится из уравнения $\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2$.

Генеральная дисперсия не известна. Для проверки нулевой гипотезы используется случайная величина

$$t = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma(\bar{x})},$$

где

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 .$$

Можно показать, что t подчиняется распределению Стьюдента с плотностью вероятности:

$$P_f(t) = \frac{1}{\sqrt{f\pi}} [\Gamma\{(f+1)/2\} / \Gamma(f/2)](1 + t^2/f)^{-(f+1)/2}$$

($f = n - 1$ — число степеней свободы).

Процедура проверки нулевой гипотезы при конкурирующих гипотезах H_1: $\overline{X} \neq a_0$ и H_1: $\overline{X} > a_0$ полностью аналогичны вышеописанным. Единственное отличие в том, что критические точки находятся из таблиц распределения Стьюдента.

РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

Выполняется в программе MORI.

А. Проверка гипотез о виде распределения

I. Влияние выбора числа интервалов разбиения на «чувствительность» критерия χ^2.

1. Получить выборку объема 150 значений случайной величины, распределенной по закону Пуассона со средним 4. Результаты записать в табл.2.1.

Таблица 2.1

Влияние выбора числа интервалов разбиения на чувствительность критерия χ^2

Значения случайной величины	Абсолютные частоты значений	Массивы вероятностей. Распределение Пуассона			Массивы вероятностей. Нормальное распределение Среднее = Дисперсия =		
		Значения вероятностей в распределение Пуассона (среднее =)	Сумма вероятностей по интервалам разбиения		Значения функции вероятности	Сумма вероятностей по интервалам разбиения	
			Число интервалов разбиения =	Число интервалов разбиения =		исло нтералов азбиеия =	Число интервалов разбиения =
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
χ^2 экспериментальное							
χ^2 критическое							
Уровень значимости							

2. Проверить с помощью критерия χ^2 гипотезу о принадлежности полученной выборки генеральной совокупности, распределенной по закону Пуассона. Для этого, пользуясь меню «Характеристики выборки» и «Программы обработки»:

а) найти вероятности каждого значения случайной величины, распределенной по закону Пуассона со средним, равным выборочному среднему, полученному в предыдущем пункте задания. Значения вероятностей записать в табл.2.1;

б) воспользовавшись соответствующей программой, вычислить значение χ^2 экспериментального (число интервалов разбиения 4). Результат записать в табл.2.1;

в) воспользовавшись меню «Статистические таблицы» для уровня значимости 0.05 и соответствующего числа степеней свободы найти критическое значение χ^2. Сравнить это значение χ^2 с найденным в предыдущем пункте экспериментальным значением и сделать вывод о принадлежности выборки генеральной совокупности, распределенной по закону Пуассона. Результат записать в табл.2.1.

3. Проверить с помощью критерия χ^2 гипотезу о принадлежности уже полученной выборки нормальной генеральной совокупности. Дисперсию генеральной совокупности считать известной и равной оценке среднего, полученной в п.2. Число интервалов разбиения 4.

4. Повторить выполнение заданий пп.2, 3, но число интервалов разбиения выбрать оптимальным в соответствии с рекомендациями, приведенными в теоретическом введении.

II. Влияние объема выборки на «чувствительность» критерия χ^2.

1. Выполнить задания пп.2, 3, но для объема выборки $n = 1000$ и одного и того же оптимального числа интервалов разбиения данных. Результаты записать в табл.2.2. Сделать вывод о влиянии объема выборки на чувствительность критерия, если под этим понимать «способность» критерия различить две близкие гипотезы.

Влияние объема выборки на чувствительность критерия χ^2

Значения случайной величины	Абсолютные частоты значений случайной величины	Массив вероятностей. Распределение Пуассона		Массив вероятностей. Нормальное распределение. Среднее = Дисперсия =	
		Значения вероятностей в распределении Пуассона (среднее =)	Сумма вероятностей по интервалам разбиения. Число интервалов разбиения =	Значения функции вероятности	Сумма вероятностей по интервалам разбиения. Число интервалов разбиения =
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
χ^2 экспериментальное					
χ^2 критическое					
Уровень значимости					

Б. Проверка простых гипотез

1. Исследование влияния априорной информации на чувствительность критерия при проверке простых гипотез. Результаты записать в табл.2.3:

а) получить выборку чисел объема 10 из генеральной совокупности, распределенной по закону Пуассона со средним 5;

б) вычислить экспериментальное значение критерия Лапласа для проверки гипотезы о равенстве «истинного» среднего генеральной совокупности a_0 некоторому заданному числу. Дисперсию генеральной совокупности считать известной и равной среднему. Проверить гипотезу для значений

$$a_0 = \overline{N} + 0{,}5\overline{N}\,; \qquad (*)$$

$\alpha = 0{,}05$

$$a_0 = \overline{N} + 0{,}1\overline{N}\,, \qquad (**)$$

где $\overline{N}$ — выборочное среднее;

в) гипотезы о равенстве «истинного» среднего генеральной совокупности a_0 некоторому заданному числу (*), (**) проверить, считая, что выборка взята из нормальной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией. Уровни значимости при проверке гипотез в пп.б) и в) положить одинаковыми. Сравнить результаты проверки гипотез в пп.б) и в);

г) проверить гипотезу о равенстве «истинного» среднего генеральной совокупности a_0 некоторому заданному числу (**) с помощью критерия Лапласа при различных конкурирующих гипотезах H_i:

$$H_1\colon\ \overline{X} \neq a_0\,;$$

$$H_2\colon\ \overline{X} > a_0\,;$$

$$H_3\colon\ \overline{X} < a_0\,.$$

Таблица 2.3

Проверка простых гипотез

<table>
<tr><td rowspan="2">Значения случайной величины</td><td rowspan="2">Абсолютные частоты значений случайной величины</td><td colspan="6">Критерий Лапласа</td><td colspan="6">Критерий Стьюдента</td></tr>
<tr><td colspan="3">$a_0 = \overline{N} + 0,05\,\overline{N}$</td><td colspan="3">$a_0 = \overline{N} + 0,1\,\overline{N}$</td><td colspan="3">$a_0 = \overline{N} + 0,05\,\overline{N}$</td><td colspan="3">$a_0 = \overline{N} + 0,1\,\overline{N}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="12">Экспериментальное значение критерия</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="12">Уровень значимости</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="12">Теоретическое значение критерия для гипотез</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>H_1</td><td>H_2</td><td>H_3</td><td>H_1</td><td>H_2</td><td>H_3</td><td>H_1</td><td>H_2</td><td>H_3</td><td>H_1</td><td>H_2</td><td>H_3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Среднее =

Дисперсия =

Оформление отчета

Отчет должен содержать:

заполненные бланки табл.2.1-2.3;

краткое описание алгоритма проверки гипотез о виде распределения генеральной совокупности;

вывод о влиянии количества интервалов разбиения на чувствительность критерия χ^2;

вывод о влиянии объема выборки на чувствительность критерия χ^2.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Контрольные вопросы *для допуска* студента к выполнению лабораторной работы

1. Что называется статистической гипотезой?
2. Какая гипотеза называется основной; альтернативной; простой; сложной?
3. Дайте определение понятия «уровень значимости» при проверке статистической гипотезы.
4. Что называется мощностью критерия относительно альтернативной гипотезы при проверке статистической гипотезы?
5. Что такое ошибка первого рода при проверке статистической гипотезы?
6. Что такое ошибка второго рода при проверке статистической гипотезы?
7. Напишите соотношение, связывающее мощность критерия и ошибку второго рода.
8. Что называется областью допустимых значений для выбранного критерия проверки статистической гипотезы?
9. Что называется критической областью для выбранного критерия проверки статистической гипотезы? Какие типы критических областей Вы знаете?
10. Какой критерий применяется для проверки статистической гипотезы о значении математического ожидания нормально распределенной случайной величины с известной дисперсией?
11. Сформулируйте критерий Стьюдента проверки статистической гипотезы о матожидании нормально распределенной случайной величины с неизвестной дисперсией. Напишите выражение для оценок среднего и дисперсии по выборке.
12. Дайте формулировку суждения о выдвинутой гипотезе, если вычисленное значение критерия принадлежит области допустимых значений.

13. Пусть n — объем выборки; ν_i — число экспериментальных точек попавших в i-й интервал группирования (разбиения) Δ_i; P_i — теоретическая вероятность попадания исследуемой случайной величины в интервал Δ_i; r — число интервалов разбиения. Напишите формулу для вычисления экспериментального значения критерия «хи-квадрат» для проверки гипотезы о виде распределения.

14. С помощью критерия «хи-квадрат» проверяется гипотеза о принадлежности выборки к нормальной генеральной совокупности. Чему равно число степеней свободы, если число интервалов разбиения равно 10?

15. Укажите минимальное рекомендуемое число интервалов разбиения r и количество элементов выборки ν_i в каждом интервале Δ_i при практическом использовании критерия «хи-квадрат».

Контрольные вопросы *при защите* студентом выполненной лабораторной работы

1. Возможно ли одновременное уменьшение ошибок первого и второго рода?

2. Какие из перечисленных значений уровня значимости $\alpha = 0{,}9;0{,}5;0{,}1;0{,}01$ не имеют смысла и почему?

3. Проверяется гипотеза о виде распределения. Уровень значимости задан. Как на практике уменьшить ошибку первого рода?

4. Почему для критерия «хи-квадрат» при заданном объеме выборки и уровне значимости вероятность ошибки второго рода уменьшается с ростом числа интервалов разбиения? Чем определяется разумная граница увеличения числа интервалов?

5. Проверяется на заданном уровне значимости простая гипотеза о равенстве генерального среднего нормальной совокупности некоторому гипотетическому значению a_0; т.е. H_0: $\overline{X} = a_0$. Генеральная дисперсия известна и равна σ. Альтернативная гипотеза имеет вид H_1: $\overline{X} = 0{,}9a_0$. Изобразите графически распределения проверочных статистик (критериев) для гипотез H_0 и H_1; укажите на рисунке критические точки, уровень значимости, мощность критерия гипотезы H_0 при конкурирующей гипотезе H_1.

6. Обоснуйте выбор типа критической области (двусторонняя или односторонняя) в зависимости от вида альтернативной гипотезы при использовании критерия Стьюдента о равенстве выборочного среднего некоторому гипотетическому значению.

7. Пусть n — объем выборки; ν_i — число экспериментальных точек, попавших в i-й интервал разбиения; P_i — теоретическая вероятность попадания в i-й интервал; r — число интервалов разбиения. При какой интерпретации nP_i относительно ν_i случайная величина $\xi_i = (\nu_i - nP_i)/\sqrt{nP_i}$ распределена асимптотически нормально с матожиданием, равным нулю и дисперсией единице, т.е. $N(0,1)$? Покажите, что случайная величина $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \xi_i^2$ в этом случае распределена по закону «хи-квадрат», и укажите число степеней свободы, если проверяемая гипотеза о виде распределения на самом деле верна.

Контрольные вопросы *по теме типа зачетных*

1. Сформулируйте критерий согласия Колмогорова, и расскажите об особенностях применения этого критерия по сравнению с критерием Пирсона при проверке одной и той же гипотезы о виде распределения. Сравните области возможного применения, сложность проведения вычислений и т.п.

2. Обоснуйте выбор именно правосторонней критической области при использовании критерия Пирсона для проверки гипотезы о виде распределения.

3. Изложите общий принцип (идею) проверки любой статистической гипотезы. На качественном уровне объясните постановку задачи и способы ее реализации.

Работа 3

ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Цель: *изучение линейного метода наименьших квадратов, овладение практическими навыками применения метода при анализе экспериментальных данных.*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Принцип наименьших квадратов

Нередко при анализе экспериментальных данных требуется их сопоставить с результатами физической модели, описывающей изучаемое явление. Чаще всего речь идет о сравнении экспериментально полученной функциональной зависимости с соответствующей аналитической кривой, полученной из теории. При этом возникает, по крайней мере, два вопроса: имеется ли соответствие между двумя этими кривыми; как определить неизвестные параметры, входящие в выражение для теоретической кривой? Эти вопросы рассматриваются в данной работе.

Задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в результате измерения некоторой физической величины y, зависящей от x для ряда значений x_i, известных точно, получены независимо друг от друга значения y_i ($i = 1, 2, ..., n$) с погрешностью ε_i. Предположим, что эта экспериментальная зависимость может быть описана (аппроксимирована) выражением

$$y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k), \qquad (3.1)$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_k$ — неизвестные параметры, а аналитический вид функции f выбирается либо на основе физических соображений, либо по соображениям простоты. Следовательно, можно записать систему уравнений:

$$\tilde{y}_1 = f(x_1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) + \varepsilon_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.2)$$

$$\tilde{y}_n = f(x_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) + \varepsilon_n.$$

При этом предполагаем, что погрешности измерений независимы и имеют нулевое математическое ожидание. Это означает, что существуют такие значения параметров $\alpha_1^{(0)}, ..., \alpha_k^{(0)}$, что $y_{0i} = f\left(x_i, \alpha_1^{(0)}, ..., \alpha_k^{(0)}\right)$ являются математическими ожиданиями случайных величин y_i ($i = 1, ..., n$), т.е.

$$E(\tilde{y}_i) = y_{0i} = f\left(x_i, \alpha_1^{(0)}, ..., \alpha_k^{(0)}\right), \qquad (3.3)$$

где E — знак операции вычисления математического ожидания случайной величины. Требуется найти наилучшие оценки параметров α_1, ..., α_k. Зависимость (3.1) носит название «линия регрессии», а процедура ее нахождения — «*регрессионный анализ*».

Наиболее простым способом решения этой задачи является следующий. Выбираем число экспериментальных значений n, равным числу неизвестных параметров k. Подставляя пары чисел (x_i, y_i) в систему уравнений (3.2), получим k уравнений с k неизвестными параметрами α_i. Как правило, решение системы (3.2) существует. Однако существенным недостатком такого способа является то обстоятельство, что никак не учитывается возможное различие в погрешностях отдельных измерений.

Поэтому выбирается другой способ решения задачи. Пусть число экспериментальных точек $n > k$. В этом случае получаем избыточную систему уравнений (3.2). Следовательно, существует единственная возможность — найти такие значения параметров (α_1, ..., α_k), при которых значения теоретической кривой (3.1) в точках x_i тесно (с учетом погрешности измерений y_i) примыкали бы к экспериментальным значениям.

Самым важным шагом в решении этой задачи является выбор меры близости между теоретической и экспериментальной кривыми. В регрессионном анализе постулируется выбор среднеквадратичной меры близости, согласно которой расстояние между набором теоретических точек $f(x_i, \alpha_1, ..., \alpha_k)$ и набором экспериментальных значений определяется формулой

$$S(\alpha_1,...,\alpha_k) = \sum \omega_i [y_i - f(x_i,\alpha_1,...,\alpha_k)]^2, \qquad (3.4)$$

где ω_i — статистический вес i-го измерения. Обычно веса выбираются аналогично случаю неравноточных измерений, т.е. $\omega_i = 1/\sigma_i^2$, где σ_i — среднеквадратичная погрешность измерений y_i, которая считается известной. Для отыскания значений параметров α_i выбираются те значения, при которых сумма нормированных на единичную дисперсию квадратов отклонений теоретических значений от экспериментальных в точках x_i минимальна. Таким образом, оценки по методу наименьших квадратов (МНК-оценки) параметров α_j могут быть найдены как решение системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = 0; \quad j = 1, ..., k. \qquad (3.5)$$

Линейный метод наименьших квадратов

Пусть функция $f(x, \alpha_1, ..., \alpha_k)$ зависит от параметров α_j линейно, т.е.

$$f(x,\alpha_1,...,\alpha_k) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x)\alpha_j .$$

Этот случай является одним из самых распространенных на практике. Так, например, часто требуется аппроксимировать экспериментальные данные полиномом заданной степени. В этом случае

$$f(x,\alpha_1,...,\alpha_k) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^{j-1} . \qquad (3.6)$$

Для решения этой задачи вводится матрица А, с элементами $A_{ij} = \varphi_j(x_i)$ ($i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., k$). Она называется конструкционной матрицей. Тогда (3.4) запишется в виде

$$S(\alpha_1,...,\alpha_k) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(y_i - \sum_{j=1}^{k} A_{ij}\alpha_j \right)^2 . \tag{3.7}$$

Решая систему уравнений (3.5), имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i A_{ik} y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \omega_i A_{ij} A_{ik} \alpha_j . \tag{3.8}$$

Введем обозначения

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} \omega_i A_{ik} y_i ;$$

$$B_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i A_{ij} A_{ik} .$$

Тогда систему (3.8) можно записать в виде

$$b_k = \sum_{j=1}^{k} B_{kj} \alpha_j . \tag{3.9}$$

Решая эту систему можно найти МНК-оценки параметров $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, ..., $\hat{\alpha}_k$.

Матричная форма обозначений. Для дальнейшего изложения целесообразно перейти к матричной форме обозначений. Введем вектор-столбец α с компонентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$), вектор-столбец y с компонентами ($y_1, ..., y_n$) и вектор-столбец $y_0 = (y_{01}, ..., y_{0n})$, причем из соотношения (3.3) следует

$$\vec{y}_0 = A\vec{\alpha}_0 . \tag{3.3'}$$

Обозначим через W диагональную матрицу с отличными от нуля элементами ω_i:

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 & \dots & 0 \\ . & . & . \\ 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}. \qquad (3.10)$$

Тогда система (3.8), называемая системой нормальных уравнений, примет вид

$$A^T W y = A^T W A \alpha , \qquad (3.11)$$

где A^T — транспонированная матрица A, или

$$\vec{b} = B\vec{\alpha} , \qquad (3.12)$$

где $\vec{b} = A^T W \vec{y}$, $B = A^T WA$, причем B — симметричная матрица. Отсюда следует

$$\tilde{\vec{\alpha}} = B^{-1}\vec{b} = (A^T WA)^{-1} A^T W\vec{y} . \qquad (3.13)$$

Поскольку значения случайных величин $\vec{y}_i$ получены независимо друг от друга и дисперсия $\vec{y}_{0_i}$ равна σ_i^2, то ковариационная матрица (или матрица ошибок) вектора $\vec{y}$ может быть представлена в виде

$$D(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & \dots & 0 \\ . & . & . \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Вспоминая, что $\omega_i = 1/\sigma_i^2$, имеем

$$D(\vec{y}) = W^{-1}, \qquad (3.14)$$

где W^{-1} — матрица, обратная W.

Свойства МНК-оценок

Оценки параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, получаемые с помощью МНК, — случайные величины, поскольку они основаны на результатах измерений случайных величин y_i и являются линейными комбинациями последних. По определению ковариационная матрица случайного вектора α:·

$$D(\tilde{\alpha}) = E[\tilde{\alpha} - E(\tilde{\alpha})^{T}(\tilde{\alpha} - E(\tilde{\alpha}))]. \qquad (3.15)$$

Из выражения (3.13) с учетом(3.3) следует:

$$D(\tilde{\alpha}) = E[B^{-1}A^{T}W(\tilde{\bar{y}} - \bar{y}_0)^{T}(B^{-1}A^{T}W(\tilde{\bar{y}} - \bar{y}_0))] =$$

$$= B^{-1}A^{T}WE[(\tilde{\bar{y}} - \bar{y}_0)^{T}(\tilde{\bar{y}} - \bar{y}_0)](B^{-1}AW)^{T} =$$

$$= B^{-1}A^{T}WD(\bar{y})(B^{-1}AW)^{T}.$$

Подставляя вместо $D(y)$ его выражение из (3.14) и используя правило транспонирования матриц $(ABC)^T = C^TB^TA^T$, получаем:

$$D(\tilde{\alpha}) = B^{-1}A^{T}WW^{-1}AB^{-1} = B^{-1}A^{T}\,W\,A\,B^{-1} = B^{-1}B\,B^{-1} = B^{-1}.$$

Таким образом,

$$D(\tilde{\alpha}) = B^{-1} = (A^{T}\,W\,A)^{-1}.$$

Для дисперсии отдельных параметров получается выражение

$$D(\tilde{\alpha}_j) = [(A^{T}WA)^{-1}]_j. \qquad (3.17)$$

Заметим, что дисперсия оценок параметров $\tilde{\alpha}_j$ определяется непосредственно в процессе отыскания самих значений параметров, при обращении матрицы B.

Обычно погрешности измерений $\sigma_1, ..., \sigma_n$ заранее не известны и подлежат оценке по результатам измерений $y_1, ..., y_n$. Как правило, удается определить отношения дисперсий ошибок $\sigma_i^2 / \sigma_{i+1}^2$ (т.е. значения дисперсий известны лишь с точностью до постоянного множителя C). В этом случае целесообразно ввести статистические веса следующим образом:

$$\omega_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2, \qquad (3.18)$$

где величину σ_0^2, называемую дисперсией наблюдения с единичным весом, надо определять. Перейдя в (3.4) к нормированным статистическим весам (3.18), нетрудно увидеть, что такое преобразование никоим образом не изменит вид МНК-оценки параметров $\tilde{\tilde{\alpha}}$ (3.13), которая не зависит от σ_0^2. Однако ковариационная матрица оценок параметров $D(\tilde{\tilde{\alpha}})$ содержит неизвестный множитель σ_0^2, так как, согласно (3.14), ковариационная матрица результатов измерений $\vec{y}$:

$$D(\vec{y}) = \sigma_0^2 W^{-1} \tag{3.19}$$

и может быть представлена как

$$D(\tilde{\tilde{\alpha}}) = \sigma_0^2 B^{-1} = \sigma_0^2 (A^{T}WA)^{-1}. \tag{3.20}$$

Чтобы получить матрицу ошибок $D(\tilde{\tilde{\alpha}})$, необходимо либо знать точно σ_0^2, либо иметь ее оценку.

Можно показать, что несмещенная оценка σ_0^2 в МНК дается выражением

χ² эксп.

$$\sigma_0^2 = S_{ост}/(n-k) = V^{T}WV/(n-k), \tag{3.21}$$

где $\vec{V}$ — вектор остатков,

$$\vec{V} = \tilde{\vec{y}} - A\tilde{\tilde{\alpha}}, \tag{3.22}$$

$S_{ост}$ — остаточная сумма квадратов невязок; n — число экспериментальных точек; k — число неизвестных коэффициентов аппроксиматора.

Окончательно, несмещенная ковариационная матрица несмещенных оценок параметров имеет вид:

— польз.

$$D(\tilde{\tilde{\alpha}}) = \frac{V^{T}WV}{(n-k)} (A^{T}WA)^{-1}. \tag{3.23}$$

МНК-оценки параметров линии регрессии обладают меньшей дисперсией, чем любые другие оценки линейного вида, т.е. являются эффективными. Это утверждение известно под названием теоремы Гаусса — Маркова. Кроме того, МНК-оценки являются состоятельными, а для линейного случая они еще и не смещены.

Отметим также, что хотя исходные величины $y_1, \ldots, y_n$ предполагались независимыми, для оценок параметров $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k$ независимость уже не имеет места, как это видно из (3.23). Однако в частном случае, если столбцы в конструкционной матрице А взаимно ортогональны, матрица В будет диагональной и компоненты вектора $\tilde{\vec{\alpha}}$ независимы.

Свойства МНК-оценок, и связанные с ними формулы не изменятся, если отказаться от предположения о независимости результатов измерений y_i, но потребовать конечную величину вторых моментов их распределений. В этом случае ковариационная матрица y имеет вид:

$$D(y) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \ldots & \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_2\sigma_n\rho_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{1n} & \sigma_2\sigma_n\rho_{2n} & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

где σ_i^2 — по-прежнему дисперсии погрешности измерения, а ковариация величин y_i и y_j, равная по определению

$$\operatorname{cov}(y_i, y_j) = E[(y_i - y_{0i})(y_j - y_{0j})],$$

может быть представлена

$$\operatorname{cov}(y_i, y_j) = \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}, \tag{3.25}$$

где ρ_{ij} — коэффициент корреляции.

Точность аппроксимации

О качестве аппроксимации экспериментальных данных с помощью выбранной линии регрессии можно судить по остаточной сумме квадратов невязок $S_{\text{ост}}$. Известно, что если y_i распределены по нормальному закону, а аппроксимирующая функция такова, что $E(y_i) = f\left(x_i, \alpha_1^{(0)}, ..., \alpha_k^{(0)}\right)$, причем дисперсии погрешностей y_i — σ_i^2 известны точно, то в этом случае величина $S(\alpha_1,...,\alpha_k)$ (см.(4.4)) описывается распределением χ^2 с $(n-k)$ степенями свободы $P_{(n-k)}(\chi^2)$. По известному свойству $P_{(n-k)}(\chi^2)$-распределения математическое ожидание величины χ^2 равно числу степеней свободы, т.е. $E(\chi^2) = (n-k)$.

Таким образом с помощью критерия согласия χ^2 устанавливается значимость гипотезы о правильности выбора аппроксимирующей функции (подробнее об этом см. работу 2). Если гипотеза верна, то

$$[S_{\text{ост}} / (n-k)] \approx 1. \qquad (3.26)$$

В этом случае погрешность оценок параметров $\tilde{\tilde{\alpha}}$, как следует из (3.23), в сущности определяется переносом погрешностей вектора измерений y на вектор МНК-оценок $\tilde{\tilde{\alpha}}$ и расположением точек x_1, ..., x_n, в которых измерения произведены. Соотношение (3.26) используется в практике обработки экспериментальных данных как качественный критерий согласия между теоретической кривой и экспериментальными данными.

Некоторые вопросы выбора аппроксиматора (метод сплайн — наименьших квадратов)

Аппроксимирующая функция (3.1) задается самим пользователем, исходя из физических представлений изучаемого явления или по виду графика $y(x)$ из соображений практического удобства. Так, например, в задачах активационного анализа используется закон радиоактивного распада

$$y = f(t, n_0, \lambda) = n_0 e^{-\lambda t}, \qquad (3.27)$$

где λ — постоянная распада, которая показывает вероятность распада атома в любой момент времени. В этом случае удобно прологарифмировать написанное выражение:

$$z = \ln y = \ln n_0 - \lambda t = \alpha_1 + \alpha_2 t \qquad (3.28)$$

и можно применить линейный МНК. Для определения статистических весов часто используют выражение

$$\omega(z_i) = y_i^2\left(1/\sigma_{yi}^2\right). \tag{3.29}$$

В спектроскопии часто требуется по экспериментальным точкам провести оптимальную гауссовскую кривую

$$y = f(x, A, x_0, \sigma) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-(x - x_0)^2 / 2\sigma^2]. \tag{3.30}$$

Предполагается, что фон уже вычтен, а спектральная линия одиночная. Здесь также используется логарифмирование функции y:

$$z = \ln y = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2, \tag{3.31}$$

где $\alpha_1 = \ln B - h^2 x_0^2$; $\alpha_2 = 2h^2 x_0$; $\alpha_3 = -h^2$; $B = A/\sqrt{2\pi}\sigma$; $h^2 = 1/2\sigma^2$. Для определения весов используется соотношение, аналогичное (3.29).

Следует отметить, что преобразования, подобные (3.28) и (3.31) могут приводить к потере некоторых свойств МНК-оценок, например, появлению смещенности и утрате эффективности.

Если не удается добиться требуемого качества аппроксимации с помощью простых средств, например, полиномов невысокой степени, рекомендуется использовать метод сплайн — наименьших квадратов. Техника нахождения коэффициентов в этом случае следующая. В качестве аппроксиматора выбран кубический сплайн, состоящий из двух кусков f_1 и f_2. В линейном методе наименьших квадратов коэффициенты f_1 и f_2 находятся из условия минимума квадратичных форм:

$$S_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k_{\text{гр}}}[y_i - f_1(x_2, \alpha)]^2}{\sigma_i^2}; \quad S_2 = \frac{\sum_{i=k}^{n}[y_i - f_2(x, \alpha_2)]^2}{\sigma_i^2},$$

где σ_i — среднеквадратичная погрешность измерения y_i. Найденные полиномы f_1 и f_2 не обязаны сшиваться в граничной точке x_k ни по значениям f_1 и f_2, ни по значениям их производных, однако условия сшивки легко учесть при минимизации S_1 и S_2, воспользовавшись методом поиска условного экстремума с помощью неопределенных множителей Лагранжа. Будем минимизировать выражение $\Phi = S_1 + S_2 + \sum \lambda_i \psi_i$, где λ_i — неопределенные множители Лагранжа; ψ_i — условия сшивки, записанные в виде $\psi_i = 0$.

Коэффициенты f_1 и f_2 находятся из системы:

$$\begin{cases} \partial\Phi / \partial\alpha_i = 0; & i = 1 \div 8 - \text{число коэффициентов в } f_1 \text{ и } f_2; \\ \partial\Phi / \partial\lambda_i = 0; & j = 1, 2 - \text{число условий сшивки}. \end{cases}$$

В явном виде функция ψ_i выглядит следующим образом:

$$\psi_1 = f_1(x_{\text{гр}}) - f_2(x_{\text{гр}});$$

$$\psi_2 = f_1'(x_{\text{гр}}) - f_2'(x_{\text{гр}});$$

$$\psi_2 = f_1''(x_{\text{гр}}) - f_2''(x_{\text{гр}}).$$

Для реализации метода сплайн — наименьших квадратов удобно использовать соответствующие матричные выражения МНК при наличии линейных связей. При наложении линейных связей на α_i, связанных условиями сшивки и граничными условиями вида

$$\vec{z} = Q\vec{\alpha}, \tag{3.32}$$

соответствующие МНК-оценки вектора $\vec{\alpha}$

$$\alpha^{\text{т}} = \alpha^{\text{т}} + (\text{Z}^{\text{т}} - \alpha^{\text{т}}\text{Q}^{\text{т}})(\text{QB}^{-1}\text{Q}^{\text{т}})^{-1}\text{QB}^{-1} \tag{3.33}$$

и ковариационная матрица оценок

$$\text{D}(\tilde{\vec{\alpha}}) = \text{B}^{-1} - \text{B}^{-1}\text{Q}^{\text{т}}(\text{QB}^{-1}\text{Q}^{\text{т}})^{-1}(\text{QB}^{-1}). \tag{3.34}$$

Здесь $\alpha^{\text{т}} = \left(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1, \alpha_4^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2\right)$ — вектор параметров; вектор z и матрица Q задают линейные связи параметров.

Влияние погрешностей в аргументе

В эксперименте значения независимой переменной x обычно известны не абсолютно точно. Тогда экспериментальные точки (x_i, y_i) должны рассматриваться как величины в многомерном пространстве случайных переменных. В большинстве случаев можно считать ошибки σ_{xi} в определении x_i не очень значительными, поэтому на участке кривой вблизи точки (x_i, y_i) аппроксимирующую функцию можно представить, ограничиваясь первыми членами разложения в ряд Тейлора:

$$f(x) \approx f(x_i) + (x - x_i) f'(x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)^2 f''(x_i). \qquad (3.35)$$

Пользуясь формулами переноса ошибок, имеем:

$$(\sigma'_{\tilde{y}_i})^2 = \sigma^2_{\tilde{y}_i} + (\partial f(x_i) / \partial x)^2 \sigma^2_{x_i}. \qquad (3.36)$$

Тогда (3.4) примет вид

$$S(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[\tilde{y}_i - f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)]^2}{\sigma^2_{y_i} + [\partial f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) / \partial x]^2 \sigma^2_{x_i}}. \qquad (3.37)$$

Недостаток полученных соотношений заключается в том, что они зависят от характера поведения кривой, вид которой следует установить в процессе предстоящего анализа. Эта проблема обычно решается методом последовательных приближений.

РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

Выполняется в программе MORI.

А. Исследование влияния параметров выборки на качество аппроксимации

1. Получить выборку объемом 1000 длин временных интервалов в пуассоновском потоке событий интенсивностью 0.1 соб./с. Качественно зарисовать полученное распределение.

2. Воспользовавшись меню «Программы обработки» прологарифмировать полученное в предыдущем пункте распределение. Качественно зарисовать полученное распределение.

3. Аппроксимировать с помощью метода наименьших квадратов полученное распределение $\ln N_i$ от номера канала x_i прямой вида

$$y = b_0 + b_1 \cdot x .$$

Процедуру аппроксимации произвести для трех вариантов выбора исходных данных:

а) выбрать произвольно три соседних канала;

б) выбрать три оптимальным образом расположенных не подряд канала;

в) добавить еще два канала к выбранным в предыдущем пункте, расположив «новые» каналы между «старыми».

Исходные и прологарифмированные данные для всех трех вариантов занести в табл.3.1.

Таблица 3.1

Аппроксимация зависимости $\ln N(x)$ прямой вида $y = B_1 + B_2 x$

N	x	y	Конструкционная матрица	Весовая матрица	B_1	B_2	$\chi^2_{эксп}$
100	1		$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 & & \\ & 75 & \\ & & 21 \end{pmatrix}$	4,77115	−0,178555	0,226186
75	2						
21	3						
100	1		$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 & & \\ & 46 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$	4,70191	−0,0956	0,013820
46	9						
7	25						
100	1		$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 & & & & \\ & 67 & & & \\ & & 46 & & \\ & & & 21 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix}$	4,6881836	−0,0982304	1,362686
67	4						
46	9						
21	16						
7	29						

Выводы:

обратные матрицы

2) 0,00959 | 0,0001574

1) 0,0251736 | 0,0059653

Для расчета коэффициентов прямой воспользоваться программой «Аппроксимация полиномом (ручной режим)». В программу потребуется вводить поэлементно: конструкционную матрицу A с элементами $\{A_{ij}\} = \{x_i^{j-1}$, где $j = 1, 2$; весовую матрицу W с диагональными элементами w_{ii}. При вычислении w_{ii} учесть, что исходные значения отсчетов в каналах N_i можно считать распределенными по закону Пуассона.

Значения коэффициентов прямой, их погрешности и значение χ^2 (остаточную разность квадратов), полученные в программе, занести в табл.3.1. Объяснить полученные результаты.

Б. Исследование качества аппроксимации в зависимости от объема выборки и вида аппроксимирующей функции

1. Получить выборку объемом 1000 значений случайной величины, распределенной по закону Пуасссона со средним 4. Качественно зарисовать полученное распределение.

2. Выбрать участок максимальной длины, на котором, по вашему мнению, разумно аппроксимировать распределение, полученное в предыдущем пункте полиномом 3-го порядка. Правильность выбора участка аппроксимации проконтролировать значениями χ^2, получаемыми в программе «Аппроксимация полиномом». Окончательный результат аппроксимации занести в табл.3.2, так же как и результаты выполнения последующих пунктов рабочего задания.

3. На выбранном участке аппроксимировать распределение, полученное в п.1 квадратичной параболой.

4. Изменить объем выборки (выбрав его равным 100 и 50). Повторить аппроксимацию полученных распределений полиномами 3-го и 2-го порядка на ранее выбранном участке аппроксимации.

5. Сделать сравнительный анализ содержащихся в табл.3.2 результатов.

Таблица 3.2

Влияние объема выборки на выбор аппроксимирующей функции

Объем выборки	Число точек	Номер участка	A_0	A_1	A_2	$\left(\dfrac{V^TWV}{n-m}\right)$	(A^TWA)
50		1					
		2					
		3					
100		1					
		2					
		3					
1000		1					
		2					
		3					

Выводы:

Оформление отчета

Отчет должен содержать:

заполненные бланки табл.3.1 и 3.2;

подробное пояснение алгоритма получения конструкционной и весовой матриц при заполнении табл.3.1.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Контрольные вопросы *для допуска* студента к выполнению лабораторной работы

1. Пусть для каждого x_i имеется экспериментально измеренное значение y_i с погрешностью σ_i. Хотим аппроксимировать результаты эксперимента аналитической зависимостью вида $y = f(X, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ с использованием МНК. Напишите соотношение, минимизацией которого находятся параметры α_j.

2. Пусть для каждого x_i, заданного с погрешностью σ_{x_i} имеется измеренное значение y_i с погрешностью σ_{y_i}. Напишите соотноше-

ние, минимизацией которого находятся параметры α_j, если аппроксимирующая функция имеет вид:

$$Y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_k).$$

3. Напишите формулу, получающуюся в рамках МНК для оценки σ_0^2 — дисперсии наблюдения с единичным весом.

4. В рамках МНК можно получить следующие выражения для ковариационной матрицы найденных оценок вектора параметров $\vec{\alpha}$: $D(\tilde{\vec{\alpha}}) = (A^TWA)^{-1}$ и $D(\tilde{\vec{\alpha}}) = [V^TWV/(n-k)](A^TWA)^{-1}$, где A — конструкционная матрица; $V = \vec{y} - A\tilde{\vec{\alpha}}$ — вектор остатков; W — весовая матрица, n — число экспериментальных точек y_i; k — число оцениваемых параметров:

в какой из формул и каким образом учтена только статистическая составляющая погрешностей σ_{y_i}?

В какой из формул и каким образом учтена возможная неадекватность модели аппроксимирующей функции?

5. Укажите по порядку величины численное значение правой части соотношения, полученного в рамках МНК $S/(n-k) = V^TWV/(n-k)$, где $V = \vec{y} - A\tilde{\vec{\alpha}}$ — вектор остатков; W — весовая матрица; n — число экспериментальных значений y_i; k — число (штук) оцениваемых параметров, если аппроксимирующая функция такова, что

$$E(y_i) = f(x_i, \alpha).$$

Контрольные вопросы *при защите* студентом выполненной лабораторной работы

1. Напишите нормальную систему уравнений относительно параметров α_1 и α_2 при аппроксимации экспериментальных точек (X_i, y_i) линейной функцией $y = \alpha_1 + \alpha_2 x$. Рассмотреть случай равноточных измерений.

2. Полученная в эксперименте совокупность данных (x_i, y_i) может быть на основании априорных сведений аппроксимирована прямой линией. Какими соображениями следует руководствоваться

при выборе числа штук y_i, используемых для нахождения параметров этой прямой (имеет ли смысл брать все y_i, если их много)?

3. Что может служить мерой качества аппроксимации в рамках МНК?

4. Из каких соображений выбирается вид аппроксиматора при использовании МНК с целью описания экспериментальных точек аналитической зависимостью?

Вопросы *по теме типа зачетных*

1. Прокомментируйте утверждение: «Выбор аппроксиматора должен быть статистически обеспеченным».

2. Обоснуйте тезис: «МНК дает наилучшие оценки на классе линейных оценок».

3. В каком случае оценки метода максимального правдоподобия и МНК тождественны?

4. Почему из возможных мер близости между двумя кривыми выбрана среднеквадратичная в рамках МНК?

5. Какие способы линеаризации Вы знаете, если аппроксиматор нелинейным образом содержит параметры?

Работа 4

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ И НАДЕЖНОСТЬ ОЦЕНОК

Цель: *изучение способов получения оценок физических величин при неизвестном и известном видах генеральной совокупности, обоснование и выбор доверительных интервалов, а также единственного рекомендованного значения из нескольких неравноточных результатов.*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Оценивание среднего и дисперсии при неизвестном законе распределения генеральной совокупности

Пусть имеется выборка объема n из генеральной совокупности с неизвестным законом распределения

$$x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n. \tag{4.1}$$

Каждый замер x_i в этом ряду есть случайная величина с одним и тем же законом распределения, совпадающим с законом распределения генеральной совокупности, причем математическое ожидание (истинное среднее) каждого члена ряда (4.1) равно истинному значению измеряемой величины x_0, а дисперсия — дисперсии генеральной совокупности σ^2. Разность $\varepsilon = x - x_0$ между результатом измерения x (под x следует понимать любой член ряда (4.1)) и истинным значением x_0 называется случайной ошибкой измерения.

Очевидно, что ε есть случайная величина с некоторым законом распределения.

В качестве оценки $\tilde{x}$ неизвестного истинного значения x_0 измеряемой величины в предположении, что все члены ряда (4.1) независимы и равновероятны, выбирают

$$\tilde{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{4.2}$$

Правило определения числа значащих цифр оценки см. в приложении 1. Эта оценка является состоятельной, эффективной и несмещенной, т.е. оценкой «хорошего» качества. Непосредственной проверкой легко убедится, что оценка (4.2) обладает, например, свойством несмещенности:

$$E(\tilde{x}) = E\left\{(1/n)\sum_i x\right\} = (1/n)nx_0 = x_0\,. \tag{4.3}$$

Можно показать, что оценка (4.2) состоятельна и эффективна, т.е. выбор (4.2) в качестве оценки неизвестного истинного значения x_0 удачен.

На основании того же постулата о равновероятности элементов x_i в выборке (4.1) формулу для оценок дисперсии неизвестного закона распределения $\hat{\sigma}^2$ следовало бы выбрать в виде:

$$\hat{\sigma}^2 = (1/n)\sum_i (x_i - \hat{x})^2. \tag{4.4}$$

Однако, в отличие от (4.2), оказывается, что $\hat{\sigma}^2$ не обладает одновременно всеми упомянутыми свойствами. Например, проверив свойство несмещенности, получим

$$E\{\hat{\sigma}^2\} = E\{\sigma^2\} - E\{(x - x_0)^2\} = \sigma^2 - \sigma^2/n\,, \tag{4.5}$$

т.е. математическое ожидание оценки $\hat{\sigma}^2$ не равно дисперсии генеральной совокупности σ^2, а величина неустранимого смещения равна σ^2/n. Тогда выбор формулы (4.4) следует признать неудачным, хотя состоятельность и эффективность имеют место. В последней формуле неизвестной величиной является σ^2, и ее можно переписать в виде

$$\sigma^2 = [n/(n-1)]\,E\{\hat{\sigma}^2\}. \tag{4.5a}$$

На практике, обрабатывая выборку (4.1), можно получить всего лишь одно единственное значение случайной величины $\hat{\sigma}^2$ в виде (4.4) и лучшее, что можно предположить о математическом ожидании $E\{\hat{\sigma}^2\}$ — считать его равным единственному значению (4.4). Данное предположение нельзя считать удовлетворительным, так как оно недоказуемо. После замены $E\{\hat{\sigma}^2\}$ на (4.4) и подстановки в (4.5а) получаем другую оценку S^2 для неизвестной генеральной дисперсии σ^2, а именно:

$$S^2 = [n/(n-1)](1/n)\sum_i (x_i - \tilde{x})^2 = [1/(n-1)]\sum_i (x_i - \tilde{x})^2 \,. \quad (4.6)$$

Нетрудно убедиться, что оценка (4.6) является оценкой «хорошего» качества.

Величину S^2 называют выборочной несмещенной дисперсией, в отличие от $\hat{\sigma}^2$ — выборочной смещенной дисперсии.

Для дисперсии случайной величины x можно получить

$$\sigma^2_{\tilde{x}} = D\left\{(1/n)\sum_i x_i\right\} = (1/n)\sigma^2 \,. \quad (4.7)$$

Подставив вместо неизвестной генеральной дисперсии σ^2 ее оценку S^2, получаем окончательную формулу для оценки дисперсии среднего арифметического:

$$\sigma^2(\tilde{x}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2 \,. \quad (4.8)$$

Формула для среднеквадратической ошибки σ_x случайной величины x по определению имеет вид

$$\sigma(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2} \,. \quad (4.9)$$

Таким образом, основные итоги оценивания параметров генеральной совокупности x_0 и σ^2 при неизвестном законе ее распределения записываются в виде формул (4.2), (4.6), (4.8), (4.9).

Если, например, результат обработки рядов замеров (4.1) записан в виде

$$\text{А} = 123{,}5 \pm 0{,}7,$$

то первое слагаемое вычисляют по (4.2), а второе — по (4.9).

Неравноточные измерения

Выше предполагалось, что ряд наблюдений (замеров), представляющих собой выборку (4.1), экспериментально получается при некоторых неизменных внешних условиях, и поэтому нет оснований заранее считать, что степень доверия к различным x_i из (4.1) различна. Однако на практике часто случается, что данный ряд замеров (т.е. различные x_i) проводят либо разные экспериментаторы (разной квалификации), либо на различных приборах, либо в различные моменты времени, когда внешние условия в различной степени влияют на результаты опытов и тому подобное. В такой ситуации можно заранее утверждать, что различные x_i в выборке заслуживают разной степени доверия, т.е. такой ряд наблюдений является неравноточным.

Если игнорировать неравноточность замеров и обрабатывать выборку как равноточный ряд, то фактически информация, содержащаяся в экспериментальных результатах, будет использована неправильно. Если же пытаться исправить ситуацию, отбрасывая результаты тех измерений, степень доверия к которым мала (например, отбрасывая очень «большие» или очень «малые» значения) по сравнению с основной «массой» замеров, то часть информации, содержащейся во всем ряду измерений, будет безвозвратно утеряна. Очевидно, что плохо и то, и другое.

Правильный подход заключается в использовании всех без исключения замеров, но с учетом их различной достоверности. В таких условиях выборку как некоторую совокупность сведений об измеряемой величине следует понимать как

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; \\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \end{cases} \tag{4.10}$$

т.е. n выборок объема 1 из n генеральных совокупностей с разными дисперсиями σ_i^2 и, в соответствии с ранее сказанным, разной степенью доверия к каждому x_i, определяемой весом W_i:

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; \\ W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n. \end{cases} \tag{4.11}$$

Оценка математического ожидания генеральной совокупности с учетом веса записывается в виде:

$$\tilde{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{n} W_i x_i \;; \quad \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \tag{4.12}$$

и называется средневзвешенной оценкой.

Из условия

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$$

следует:

$$W_i = \frac{1}{\sigma_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}.$$

Можно показать, что требование эффективности оценки математического ожидания генеральной совокупности по неравноточному ряду (4.10) приводит к следующему соотношению для весов W_i:

$$W_i / W_j = \sigma_j^2 / \sigma_i^2, \tag{4.12a}$$

т.е. веса определены с точностью до произвольного множителя:

$$W_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2. \tag{4.13}$$

Из соотношения (4.13) следует, что этот произвольный множитель σ_0 имеет смысл дисперсии измерения с единичным весом.

Среднеквадратичная погрешность средневзвешенного $\tilde{\tilde{x}}$ вычисляется по формуле

$$\sigma(\tilde{\tilde{x}}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} W_i (x_i - \tilde{\tilde{x}})^2} \;; \tag{4.14}$$

выражение

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \tilde{\tilde{x}})^2}{\sigma_i^2} \tag{4.15}$$

часто называют средней ошибкой единицы веса.

Оценивание при априорно известном виде распределения генеральной совокупности

Пусть в результате измерения некоторой случайной величины имеется выборка типа (4.1) в виде ряда независимых измерений, т.е. конкретные значения из некоторой генеральной совокупности, вид закона распределения которой в отличие от (4.1) априорно известен (например, Гаусса, Пуассона и т.п.) и есть

$$P(x, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_S), \tag{4.16}$$

где параметры α_i численно не известны и подлежат определению.

Для понимания дальнейшего существенным является трактовка всех n элементов выборки как совокупности n случайных величин с одним и тем же законом распределения (4.16). Нахождение параметров α_i чаще всего осуществляют либо методом моментов, либо методом максимального правдоподобия. Оба метода основаны на интуитивном предположении о том, что при $n \to \infty$ эмпирическая функция распределения стремится к истинной (теоретической). В частности, метод максимального правдоподобия (ММП) основан на предположении о том, что в качестве параметров α_1, α_2, α_3, ..., α_S в законе распределения (4.16) надо выбирать такие, при которых с максимальной вероятностью воспроизводятся экспериментальные значения, т.е. выборки. Технически дело сводится к конструированию некой функции L, называемой функцией правдоподобия, в виде

$$L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_S) = \prod_{i=1} P(x_i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_S), \tag{4.17}$$

определению ее максимума посредством решения системы уравнений правдоподобия

$$(\partial \ln L / \partial \alpha_j) = 0; \quad j = 1, 2, ..., S \tag{4.18}$$

и нахождению численных значений оценок $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, ..., $\bar{\alpha}_S$, после чего закон распределения (4.16) не будет содержать неизвестных параметров, т.е. будет полностью определен. Чтобы ответить на вопрос о погрешности оценки параметров закона распределения (4.16), рассмотрим для наглядности случай, когда (4.16) содержит единственный параметр α. Тогда из уравнения правдоподобия

$$[d\ln L(\alpha_1, x_1, x_2, ..., x_n)]/d\alpha = 0 \qquad (4.19)$$

можно найти

$$\tilde{\alpha} = f(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (4.20)$$

Так как все x_i распределены одинаково, то у них будет одна и та же дисперсия и, воспользовавшись формулой переноса ошибок для независимых измерений, можно получить

$$D(\tilde{\alpha}) = \sum (\partial f/\partial x_i)^2 D(x_i). \qquad (4.21)$$

При этом в качестве $D(x_i)$ (одинаковой для всех x_i) можно брать, например, выражение (4.6). Обычно ММП дает состоятельную и асимптотически эффективную оценку; часто она является и несмещенной. Недостатком метода является довольно серьезные вычислительные трудности.

Надежность оценок, интервальные оценки

Как упоминалось выше (см. (4.12)), результат конкретного эксперимента, после проведения тех или иных процедур оценивания, в конце концов представляется в виде

$$\tilde{\alpha} \pm \sigma_{\tilde{\alpha}}. \qquad (4.22)$$

Для однозначной трактовки такой записи необходимо ответить на вопрос о том, какова вероятность нахождения истинного значения α в этом интервале, т.е. чему равна вероятность

$$P(\tilde{\alpha} - \sigma_{\tilde{\alpha}} < \alpha < \tilde{\alpha} + \sigma_{\tilde{\alpha}}). \qquad (4.23)$$

Ответ можно дать на основе понятия надежности. Надежность определяется как вероятность того, что полученный интервал содержит неизвестное истинное значение параметра.

Если повторить эксперимент, то после обработки «новой» выборки и представления результата в виде (4.22), новые значения $\tilde{\alpha}$ и $\sigma_{\tilde{\alpha}}$ будут несколько отличны от предыдущих, а это значит, что флуктуирует и длина интервала $\tilde{\alpha} - \sigma_{\tilde{\alpha}} \div \tilde{\alpha} + \sigma_{\tilde{\alpha}}$ и, естественно, границы интервала, являющиеся случайными величинами. Это обстоятельство есть следствие того факта, что оценка как функция выборки сама по себе есть величина случайная.

Для некоторого общего вероятностного выражения

$$P(a < x < b) = 1 - \varepsilon = P \qquad (4.24)$$

введем необходимые термины: (a, b) — доверительный интервал; a, b — нижний и верхний доверительные пределы; $\varepsilon = 1 - P$ — доверительный уровень; $P = 1 - \varepsilon$ — доверительная вероятность.

В принципе возможны две формулировки задачи: 1) задается интервал (a, b) и ищется вероятность P; 2) задается вероятность $P = 1 - \varepsilon$ и ищется интервал (a, b). На практике решают обе задачи, но чаще по заданной вероятности необходимо находить интервал. Однако в обоих случаях необходимым является знание совместной плотности распределения $P(\widetilde{\alpha}, \alpha)$ или, что часто оказывается удобным, $P(\widetilde{\alpha} - \alpha)$.

Рассмотрим процедуру нахождения доверительного интервала (интервальной оценки) для истинного значения нормально распределенной случайной величины.

1. Дисперсия генеральной совокупности, из которой взята выборка типа (4.1), известна и равна σ^2. В качестве оценки истинного значения a_0 (математическое ожидание) случайной величины естественно взять $\widetilde{x}$, определенное по (4.2). Тогда дисперсию среднего арифметического можно найти следующим образом:

$$D(\widetilde{x}) = D\left[(1/n)\sum_i x_i\right] = \sigma^2 / n.$$

Введем новую переменную

$$t = (\widetilde{x} - A) / \left[\sigma / \sqrt{n}\right]. \qquad (4.25)$$

Величина t (критерий Лапласа) распределена нормально со средним 0 и дисперсией, равной 1.

Для заданной доверительной вероятности $(1 - \varepsilon)$ доверительные пределы можно найти из уравнения

$$\int_{t_a}^{t_b} (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2)dt = 1 - \varepsilon \qquad (4.26)$$

или с учетом симметрии распределения

$$P\left(\left|\frac{\tilde{x}-A}{\sigma\sqrt{n}}\right|<t_0\right)=1-\varepsilon, \qquad (4.27)$$

и t_0 находится из уравнения

$$(1/2\pi)\int_0^{t_0}\exp(-y^2/2)dy=(1-\varepsilon)/2. \qquad (4.28)$$

2. Дисперсия генеральной совокупности, из которой взята выборка, не известна. Как и в предыдущем случае, оцениваем математическое ожидание по (4.2), а дисперсию генеральной совокупности — по (4.5). Вводим аналогично (4.25) величину

$$t=\frac{\tilde{x}-a_0}{\sigma(\tilde{x})} \qquad (4.29)$$

(критерий Стьюдента).

Величина t имеет распределение Стьюдента $s(t,f)$ с $f=n-1$ степенями свободы; так как $s(t,f)$ — симметричное распределение, то для доверительной вероятности $1-\varepsilon$ доверительные пределы для t_0 находятся из уравнения

$$\int_0^{t_0}S(z,f)dz=(1-\varepsilon)/2. \qquad (4.30)$$

Следует отметить, что для одной и той же доверительной вероятности (к примеру 68 или 95 %) доверительные пределы, полученные по распределению Стьюдента, заведомо больше соответствующих величин 1σ и 2σ вычисляемых по (4.28). Такова цена незнания точного значения дисперсии генеральной совокупности.

Оценка физической величины при повторных измерениях различными методами или приборами

Рассмотрим один из практически важных и часто встречающихся случаев применения аппарата оценивания и проверки гипотез для обработки ряда экспериментальных значений, полученных разными методами.

Конкретным примером такой задачи может служить оценка рекомендованного значения независимого выхода Y некоторого элемента, образующегося при делении известного ядра, по ряду значений независимых выходов Y_j, измеренных разными методами (радиохимическими, масс-спектрометрическими, γ-спектрометрическими и так далее) или разными авторами. Каждому методу свойственна своя методическая погрешность, проявляющаяся в результатах как систематическая составляющая полной погрешности. Каждое значение выхода Y_j, приводимое в литературе, обычно является результатом ряда повторных измерений, выполненных одним и тем же методом в идентичных условиях. На основании этих измерений оценивается среднеквадратичная погрешность σ_j значения Y_j.

Итак, постановка задачи выглядит следующим образом:

а) имеем известные из литературы оценки выхода Y некоего нуклида в виде

$$Y_1 \pm \sigma_1,\ Y_2 \pm \sigma_2,\ \ldots,\ Y_j \pm \sigma_j,\ \ldots,\ Y_n \pm \sigma_n; \tag{4.31}$$

б) требуется на основании этого ряда значений получить одно единственное значение выхода $\widetilde{Y}$ — рекомендованное значение, которое и будет использоваться для решения тех или иных физико-технических задач.

Корректная процедура нахождения $\widetilde{Y}$ состоит из нескольких последовательных этапов, причем каждому этапу должна соответствовать своя статистическая модель (т.е. вполне определенная интерпретация исходных значений Y_j и σ_j, позволяющая применить соответствующие методы математической статистики), объясняющая происхождение ряда (4.31). Возможно, например, понимание (трактовка) ряда (4.31) в соответствии с табл.4.1.

Таблица 4.1

Данные 1-го автора (γ-спектрометрия)			Данные 2-го автора (радиохимия)			Данные n-го автора (масс-спектрометрия)		
Номер серии	Объем выборки	Оценка Y по серии	Номер серии	Объем выборки	Оценка Y по серии	Номер серии	Объем выборки	Оценка Y по серии
1	m_1	$Y_1^{(1)} \pm \sigma_1^{(1)}$	1	m_2	$Y_2^{(1)} \pm \sigma_2^{(1)}$	1	m_n	$Y_n^{(1)} \pm \sigma_n^{(1)}$
2	m_1	$Y_1^{(2)} \pm \sigma_1^{(2)}$	2	m_2	$Y_2^{(2)} \pm \sigma_2^{(2)}$	2	m_n	$Y_n^{(2)} \pm \sigma_n^{(2)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	m_1	$Y_1^{(i)} \pm \sigma_1^{(i)}$	i	m_2	$Y_2^{(i)} \pm \sigma_2^{(i)}$	i	m_n	$Y_n^{(i)} \pm \sigma_n^{(i)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$E\{Y_1^{(i)}\} = Y_0$			$E\{Y_2^{(i)}\} = Y_0$			$E\{Y_n^{(i)}\} = Y_0$		

Ряд (4.31) соответствует только одной строке приведенной таблицы (например, первой). Множество всех возможных результатов оценки выхода Y, выполненных j-м методом, образует генеральную совокупность результатов j-го автора.

Процедура получения рекомендованного значения

Этап 1. Считаем (выдвигаем гипотезу), что генеральные совокупности экспериментальных результатов каждого метода (автора) распределены нормально с параметрами (Y_0, σ_j), т.е. в опубликованных данных (4.31): 1) у всех $E\{Y_j\}$ отсутствует систематический сдвиг; 2) погрешности σ_j указаны правильно (в частности, не занижены, как это, к сожалению, часто бывает на практике).

Проверим теперь эти предположения применительно к ряду (4.31), т.е. имеет ли место согласованность значения Y в ряде (4.11) в пределах указанных автором погрешностей.

Образуем случайную величину ξ следующим образом:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - Y_0)^2}{\sigma_i^2}. \qquad (4.32)$$

Если наши предположения (гипотезы) верны, то ξ должна быть распределена по χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы. Заменим неизвестное генеральное среднее Y_0 на его оценку, считая в соответствии с выдвинутой гипотезой, что все σ_j указаны правильно. В этом случае можно воспользоваться (4.16)-(4.18) для неравноточных измерений:

$$\tilde{Y} = \sum_{j=1}^{n} W_j Y_j \; ; \quad \sum_{j=1}^{n} W_j = 1. \tag{4.33}$$

Здесь σ_0^2 — дисперсия единицы веса (произвольная). Подставив (4.33) в (4.32) и умножив числитель и знаменатель на σ_0^2, получим:

$$\xi = \chi^2 = \sum_{j=1} \frac{(Y_j - \tilde{Y})^2 \sigma_0^2}{\sigma_0^2 \sigma_j^2} = \sum_{j=1} \frac{W_j (Y_j - \tilde{Y})^2}{\sigma_0^2} = (n-1) S_0^2 / \sigma_0^2 , \tag{4.34}$$

где S_0^2 вычисляется по (4.15). Далее стандартным образом используем критерий χ^2. Для заданного уровня значимости α и $(n-1)$-й степени свободы находим из таблиц критическую точку $\chi^2_{\alpha/2;n-1}$, вычисляем «экспериментальное» χ^2 по (4.34) и сравниваем эти два значения. Если $\chi^2_{\text{эксп}}$ попадает в область допустимых значений, то это означает, что замеры ряда (4.31) согласуются в пределах погрешностей, а самим значениям σ_j из ряда (4.31) можно доверять. Если, наоборот, $\chi^2_{\text{эксп}}$ попадает в критическую область, то на заданном уровне значимости α этот факт может свидетельствовать либо о смещенности $E\{Y_j\}$, либо о необоснованном занижении значений σ_j (по меньшей мере у части замеров ряда (4.31)).

√ Рассмотрим некоторый частный случай наличия литературных данных в виде ряда (4.31), а именно, когда отличие величин Y_i случайно оказалось меньше указанных для них погрешностей, т.е. $(Y_i - Y_{i+1}) < \sigma_i$. Иными словами, когда реализуется условие $\sigma(Y) < \sigma_{\max} / n$. Здесь $\sigma(Y)$ — оценка погрешности средневзвешенного $\tilde{Y}$, а $\sigma_{\max} / n$ — оценка погрешности $\tilde{Y}$ в том случае, когда дисперсия генеральной совокупности принимается известной и равной $(\sigma_{max})^2$. При достаточно малых отклонениях Y_i оценка погрешности средневзвешенного $\widetilde{Y}$ может оказаться крайне малой ($\widetilde{\sigma}(\widetilde{Y}) \approx 0$). Чтобы избежать занижения погрешности, дисперсия генеральной совокупности принимается известной и равной $(\sigma_{max})^2$. При этом используется схема равноточных измерений, все веса W_i будут одинаковыми и равными $1/n$, а оценку среднего значения случайной величины можно получить по (4.2). Для построения доверительного интервала следует использовать критерий Лапласа.

Итак, для определения рекомендованного значения выхода $\widetilde{Y}$ по данным ряда (4.31) можно предложить следующий алгоритм оценивания: 1) проверка согласованности результатов ряда (4.31) в пределах указанных погрешностей σ_i; 2) если критерий χ^2 выполняется, то в качестве рекомендованного значения следует принять средневзвешенное $\widetilde{Y}$ с доверительным интервалом $\Delta Y(P)$, соответствующим доверительной вероятности P и вычисляемым следующим образом:

$$\widetilde{Y} = \sum W_j \widetilde{Y}_j \; ; \quad \widetilde{Y}_1 = 1/n \sum_j Y_j \; ; \tag{4.35}$$

$$\sum_{k=1}^{n} W_j = 1; \tag{4.36}$$

$$\Delta Y(P=0{,}68) = \begin{cases} \widetilde{Y} \pm t_P \widetilde{\sigma}(\widetilde{Y}), & \text{если } \widetilde{\sigma}(\widetilde{Y}) \geq (\sigma_{max}/\sqrt{n}); \\ (\sigma_{max}/\sqrt{n}), & \text{если } (S_0/\sqrt{n}) > (S_0/\sqrt{W}); \end{cases}$$

$$\Delta Y(P=0{,}68) = \begin{cases} Y_1 \pm u_P \sigma_{max}/\sqrt{n}, & \text{если } (\sigma_{max}/\sqrt{n}) > \widetilde{\sigma}(\widetilde{Y}); \\ 2(\sigma_{max}/\sqrt{n}), & \text{если } (\sigma_{max}/\sqrt{n}) > (S_0/\sqrt{W}), \end{cases}$$

где t_P — значение критерия Стьюдента и u_P — значение критерия Лапласа для заданной доверительной вероятности P.

Этап 2. Если критерий χ^2 не выполняется, то следует либо отбросить 1÷2 замера из ряда (4.31) с возможными неучтенными систематическими погрешностями, либо приписать этим замерам большую погрешность. После этого вычисляется средневзвешенное и проверяется выполнение критерия χ^2. Если χ^2 выполняется, то применяются (4.35)-(4.38).

Этап 3. Добиться выполнения критерия χ^2 не удалось. В этом случае проверяется гипотеза о нормальности распределения Y_j относительно $\bar{Y} = (\sum Y_i)/n$ (т.е. среднеарифметического Y), при этом средневзвешенное $\tilde{Y}$ брать нельзя, так как нет доверия к значениям σ_j, приведенным в ряде (4.31). Данная гипотеза проверяется с использованием d-критерия, основанного на сравнении выборочных значений нормированного среднего абсолютного отклонения, коэффициента асимметрии, коэффициента эксцесса, с соответствующими значениями распределения $N(a, \sigma)$. Строго говоря, d-критерий выявляет факт отклонения изучаемого распределения от нормального. Случайная величина, на которой основан d-критерий, имеет вид

$$d = (1 - nS^*)\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i - \bar{\xi}\right|, \qquad (4.39)$$

где $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — независимые случайные величины, одинаково нормально распределенные с неизвестными параметрами (a, σ); $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i / n)$ — выборочное среднее; $(S^*)^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2$ — выборочная дисперсия.

Использование d-критерия в принципе не отличается от техники применения χ^2-критерия: выбирается α (уровень значимости) и для $(n - 1)$-й степени свободы находится из таблиц двухсторонняя критическая область (левая критическая точка — $d_{n-1;1-\alpha/2}$, правая — $d_{n-1;\alpha/2}$) и далее проверяется, попадает ли «экспериментальное» значение $d_{\text{эксп}}$ в область допустимых значений или в критическую область.

В нашем случае d-критерий формулируется в виде

$$d_{n-1;1-\alpha/2} < \frac{\sum_{j=1}^{n}\left|Y_j - \bar{Y}\right|}{\left[n\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2\right]^{1/2}} < d_{n-1;\alpha/2}. \qquad (4.40)$$

Если d-критерий выполняется, то в качестве рекомендованного значения величины выхода Y принимаем:

$$\bar{Y} = \sum Y_j / n; \quad \Delta Y = t_P(n)\sigma_{\bar{Y}}; \quad \sigma_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}(Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (4.41)$$

где $t_P(n)$ — коэффициент Стьюдента для $(n-1)$-й степени свободы для заданной доверительной вероятности, например, $P = 0.68$; 0.95 и так далее.

Этап 4. Если и d-критерий не выполняется, то выбор рекомендованного значения Y носит сугубо субъективный характер, а именно: выбирается один из замеров ряда (4.31), который получен либо по наиболее совершенной методике, либо человеком, которому Вы доверяете.

РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

Выполняется в программе MORI 1.

1. Эксперимент с «хорошими» часами.

Получить выборку объема 5 из генеральной совокупности, распределенной по закону Пуассона. Интенсивность потока задать 15 соб/с, время измерения 20 с. Результаты занести в табл.4.2.

Обработать полученную в предыдущем пункте выборку пользуясь указаниями, содержащимися в табл.4.2 и во введении.

2. Эксперимент с «плохими» (гауссовскими) часами.

Получить 11 чисел, распределенных по нормальному закону с параметрами (0,1) (меню «статистические таблицы»). Записать числа в табл.4.3.

Получить 11 чисел, распределенных по закону Пуассона. Интенсивность потока задать 15 соб/с, время измерения T_i берется из табл.4.3.

Обработать полученную в предыдущем пункте выборку пользуясь указаниями, содержащимися в табл.4.3 и во введении.

3. Эксперимент с «плохими» («равномерными») часами.

Повторить задания п.2, но в качестве случайных чисел. Взять числа, равномерно распределенные в интервале [0, 1]. Результаты записать в табл.4.4.

Таблица 4.2

Эксперимент с «хорошими часами»

<table>
<tr><td>Значения случайной величины $N(i)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Массив стат. весов $W(i)$ =</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\sqrt{N(i)}$ =</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">средневзвешенное</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">дисперсия единицы веса</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">среднеквадратичная погрешность средневзвешенного</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">χ^2 (экспериментальное)</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">χ^2 (критическое)
число степеней свободы =
уровень значимости =</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Вывод</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Рекомендованное значение</td><td>формула</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>значение</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Погрешность рекомендованного значения</td><td>формула</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>значение</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Уровень значимости</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Таблица 4.3

Эксперимент с часами, характеризуемыми нормально распределенной погрешностью

Случайное число, распределенное по нормальному закону X	Случайное время измерения $T_1 = T + X \cdot 0{,}3T$	Значения случайной величины N	Массив статических весов W	$\sqrt{N}$

средневзвешенное	
дисперсия единицы веса	
среднеквадратичная погрешность средневзвешенного	
χ^2 экспериментальное	
χ^2 критическое число степеней свободы = уровень значимости =	

Вывод:

Значения d-критерия	экспериментальное		
	критическое	правое	
		уровень значимости	
		левое	
		уровень значимости	

Вывод:

Рекомендованное значение	формула	
	значение	
Погрешность рекомендуемого значения	формула	
	значение	
Уровень значимости		

Таблица 4.4

Эксперимент с часами,
характеризуемыми равномерно распределенной погрешностью

Случайное число, равномерно распределенное X	Случайное время измерения $T_1 = T + X\,0{,}5\,T$	Значения случайной величины N	Массив статистических весов W	$\sqrt{N}$

средневзвешенное	
дисперсия единицы веса	
среднеквадратичная погрешность средневзвешенного	
χ^2 экспериментальное	
χ^2 критическое число степеней свободы = уровень значимости =	

Вывод:

Значения d-критерия	экспериментальное		
	критическое	правое	
		уровень значимости	
		левое	
		уровень значимости	

Вывод:

Рекомендованное значение	формула	
	значение	
Погрешность рекомендуемого значения	формула	
	значение	
Уровень значимости		

Оформление отчета

Отчет должен содержать
заполненные бланки табл.4.2-4.4 и ответ на вопрос:

«Каким образом используется факт выполнения критерия хи-квадрат (см. табл.4.2) и *d*-критерия (см. табл.4.3) в определении рекомендованного значения, доверительного интервала и доверительной вероятности?»

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Контрольные вопросы *для допуска* студента к выполнению лабораторной работы

1. Дайте определение понятия «оценка параметра генеральной совокупности».
2. Что такое точечная оценка?
3. Что такое интервальная оценка?
4. Какая оценка называется несмещенной?
5. Напишите формулу для точечной оценки математического ожидания как выборочного среднего значения, если закон распределения генеральной совокупности, которой принадлежит исследуемая выборка, неизвестен.
6. Какие точечные оценки дисперсии случайной величины Вы знаете? Напишите формулы. Перечислите основные свойства рассмотренных оценок дисперсии, если закон распределения генеральной совокупности, которой принадлежит выборка, неизвестен.
7. Напишите формулу для среднего арифметического, если закон распределения генеральной совокупности, которой принадлежит выборка, неизвестен.
8. Какому закону распределения вероятностей подчиняется среднее выборочное значение, полученное по выборке из нормальной генеральной совокупности?
9. Напишите формулы для оценки математического ожидания как средневзвешенного выборочного значения, а также дисперсии этого средневзвешенного.

10. Взята выборка из генеральной совокупности, распределенной с плотностью $P(x, \alpha)$. Объем выборки равен n. Напишите выражение для оценки параметра α методом максимального правдоподобия.

11. Что называется доверительным интервалом?

12. Что называется доверительной вероятностью и доверительным уровнем? Напишите связывающее их соотношение.

13. Дайте определение понятия «надежность оценки».

14. Как зависит длина доверительного интервала от значения доверительной вероятности?

15. Как зависит длина доверительного интервала от объема выборки при заданном доверительном уровне?

16. Напишите в общем случае соотношение, необходимое для нахождения оценки некоторого параметра α генеральной совокупности с заданной надежностью.

17. Как строится доверительный интервал для математического ожидания нормальной генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии? Напишите выражение для нижнего и верхнего доверительных пределов.

18. Как строится доверительный интервал для математического ожидания нормальной генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии? Напишите выражение для нижнего и верхнего доверительных пределов.

19. Симметричен ли доверительный интервал для математического ожидания нормальной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией относительно точечной оценки математического ожидания?

20. Напишите формулу для рекомендованного значения $\widetilde{Y}$ — физической величины, измеренной разными методами (повторные измерения), если проверка с помощью критерия «хи-квадрат» подтвердила согласованность измеренных значений Y_i в пределах указанных погрешностей.

21. Напишите формулу для погрешности рекомендованного значения ΔY, если критерий «хи-квадрат» проверки согласованных значений Y_i в пределах указанных погрешностей выполняется.

22. Напишите формулы для рекомендованного значения $\widetilde{Y}$ и погрешности рекомендованного значения ΔY (повторные измерения), если критерий «хи-квадрат» не выполняется, однако выполняется d-критерий нормальности выборки значений Y_i.

Контрольные вопросы *при защите* студентом выполненной лабораторной работы

1. Перечислите и дайте определения наиболее важных свойств оценок неизвестных параметров генеральной совокупности. Проиллюстрируйте эти свойства графически.

2. Как Вы понимаете термин «статистический вес»? Из каких соображений обычно вводятся численные значения статических весов?

3. В чем заключается метод максимального правдоподобия для дискретных случайных величин? Непрерывных случайных величин?

4. Каковы оценки максимального правдоподобия матожидания и дисперсии случайной величины распределенной по закону Гаусса? По закону Пуассона?

5. Изложите идею метода моментов как способа получения точечных оценок матожидания и дисперсии по выборке.

6. Пусть n раз проводится эксперимент, состоящий в измерении (например, счетчиком Гейгера) числа отсчетов N_i за время t_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. В каждом случае t_i различны. Оценить истинную скорость счета по полученной выборке, считая, что:

измерения равноточны; закон распределения генеральной совокупности неизвестен;

измерения неравноточны; веса измерений пропорциональны времени отдельного измерения, т.е. $W_i \sim t_i$; закон распределения генеральной совокупности неизвестен;

выборка получена из генеральной пуассоновской совокупности и, следовательно, можно использовать метод максимального правдоподобия.

7. Объясните, какой смысл вкладывается в фразу «согласованность физической величины Y (повторные измерения) в пределах

указанных погрешностей» и наоборот — «несогласованность . . . ».

8. Покажите, пользуясь формальным определением распределения «хи-квадрат», что случайная величина $\chi^2 = \sum_{j=1}^{n}(Y_j - Y_0)/\sigma_j^2$, где Y_0 — генеральное среднее (математическое ожидание); Y_j — значения величины Y, полученные разными методами (авторами); σ_j — погрешность величин Y_j, действительно распределена по закону «хи-квадрат», если имеет место согласованность значений Y_j в пределах погрешностей σ_j.

9. Изобразите графически выборку значений величины Y (т.е. значений Y_j), полученных в результате повторных измерений с погрешностями (т.е. σ_j) в следующих случаях:

имеет место согласованность значений Y_j в пределах погрешностей (в частности, критерий «хи-квадрат» выполняется);

выполняется только лишь d-критерий нормальности исследуемой выборки;

критерий «хи-квадрат» выполняется, и погрешность рекомендованного значения Y вычисляется по формуле $\Delta Y = \sigma_0/\sqrt{n}$, где n — объем выборки; σ_0 — максимальна из всех погрешностей σ_j.

10. Обоснуйте ответ на вопрос: «Можно ли использовать в качестве рекомендованного значения $\widetilde{Y}$ среднее арифметическое величин Y_j, если выборка $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ не удовлетворяет ни «хи-квадрат» — критерию согласованности значений в пределах погрешностей σ_j, ни d-критерию нормальности выборки.

Вопросы *по теме типа зачетных*

1. Известно, что чисто технически процедура нахождения критической области при проверке нулевой гипотезы H_0: $\overline{X} = a_0$ при конкурирующей гипотезе H_1: $\overline{X} \neq a_0$ с использованием критерия Лапласа (см. работу 2) на уровне значимости α совпадает с процедурой нахождения доверительного интервала на доверительном уровне α при одинаковых допущенных о виде генеральной совокупности (например, закон Гаусса), которой принадлежит иссле-

дуемая выборка. Однако статистическое толкование результатов этих процедур неодинаково. В чем здесь дело? Дайте правильную статистическую интерпретацию этого различия.

2. Дана выборка из пуассоновской генеральной совокупности, например, в виде: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 8$; $x_4 = 2$; $x_5 = 3$; $x_6 = 2$. Получить методом максимального правдоподобия оценки параметров генеральной совокупности (матожидания и дисперсии). Сделать то же самое, считая выборку принадлежащей нормальной генеральной совокупности. Одинаковыми ли свойствами (в смысле состоятельности, несмещенности, эффективности) обладают оценки в этих двух случаях?

3. Имеем n неравноточных измерений в виде $x_j \neq \sigma_j$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Получите оценку истинного значения случайной величины $\overline{X}$, а также погрешность этой оценки, исходя из постулата: «оценка должна быть эффективной». Можно ли пользоваться полученными результатами, если величины содержат систематические погрешности?

4. Каким образом строится доверительный интервал для дисперсии нормально распределенной случайной величины?

5. Является ли доверительный интервал для дисперсии нормально распределенной случайной величины симметричным относительно точечной оценки генеральной дисперсии? Зависит ли симметричность от объема выборки?

Приложение 1

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТ ПРАКТИКУМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MATHCAD

Введение

Некоторые сведения о функциях распределения вероятностей, используемых в пакете MATHCAD

Функции распределения вероятностей случайных величин

cnorm(x)	— нормальное распределение (среднее = 0, дисперсия = 1)
pbinom(k,n,p)	— биномиальное распределение (n — число испытаний, p — вероятность положительного исхода)
pchisq(x,d)	— распределение хи-квадрат (d — число степеней свободы)
pnorm(x,μ,σ)	— нормальное распределение (μ — среднее, σ — среднеквадратичное отклонение)
ppois(k,m)	—распределение Пуассона (m — среднее)
pexp(x,r)	— экспоненциальное распределение (p(x,r)=1-exp(-rx))
punif(x,a,b)	— равновероятное распределение на отрезке [a,b]
pt(x,d)	— распределение Стьюдента (d — число степеней свободы)

Пример: pchisq(12.7,4) = 0.922

Функции, обратные распределениям вероятностей случайных величин

qbinom(p,n,r)	— обратное биномиальное распределение (n — число испытаний, r — вероятность положительного исхода)
qchisq(p,d)	— обратное распределение хи-квадрат (d — число степеней свободы)

qnorm(p,μ,σ) — обратное нормальное распределение (μ — среднее, σ — среднеквадратичное отклонение)
qpois(p,m) — обратное распределение Пуассона (m — среднее)
qexp(x,r) — обратное экспоненциальное распределение (p(x,r)=1-exp(-rx))
qunif(x,a,b) — обратное равновероятное распределение на отрезке [a,b]
qt(x,d) — обратное распределение Стьюдента (d — число степеней свободы)

Пример: qchisq(0.97,6) = 13.968

Функции плотности распределения вероятностей случайных величин

dbinom(k,n,p) — плотность биномиального распределения (n — число испытаний, p — вероятность положительного исхода)
dchisq(x,d) — плотность распределения хи-квадрат (d — число степеней свободы)
dnorm(x,μ,σ) — плотность нормального распределения (μ — среднее, σ — среднеквадратичное отклонение)
dpois(k,m) — плотность распределения Пуассона (m — среднее)
pexp(x,r) — плотность экспоненциального распределения (p(x,r)=1-exp(-rx))
punif(x,a,b) — плотность равновероятного распределения на отрезке [a,b]
pt(x,d) — плотность распределения Стьюдента (d — число степеней свободы)

Функции, реализующие выборку случайных величин из генеральной совокупности, подчиняющейся заданной функции распределения вероятностей (M — объем выборки)

rbinom(M,n,p) — выборка из биномиального распределения (n — число испытаний, p — вероятность положительного исхода) rchisq(M,d) — выборка из распределения хи-квадрат (d — число степеней свободы)

rnorm(M,μ,σ) — выборка из нормального распределения (μ — среднее, σ — среднеквадратичное отклонение)

rpois(M,m) — выборка из распределения Пуассона (m — среднее)

rexp(M,r) — выборка из экспоненциального распределения (p(x,r)=1-exp(-rx))

runif(M,a,b) — выборка из равновероятного распределения на отрезке [a,b]

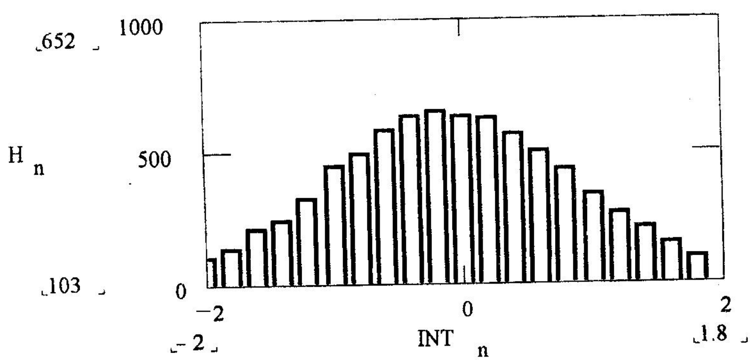
rt(M,d) — выборка из распределения Стъюдента (d — число степеней свободы)

rnd(x) — функция возвращает единственное случайное число, равновероятно распределенное в интервале [0, x]

hist(INT,A) — функция возвращает массив частот элементов вектора A, попадающих внутрь интервалов, определяемых элементами вектора INT

Пример (моделирование выборочного распределения):

V := rnorm(8000,0,1)
m := 0..20
INTm := -2+0.2*m
H := hist(INT,V)
n := 0..19



Практические занятия с использованием пакета MATHCAD

З а н я т и е 1
Знакомство с различными функциями распределения случайных величин

1. На одном графике построить биномиальные функции плотности распределения с параметром Np = 3 для: N = 5, N = 10, N = 30.
Вычислить дисперсии соответствующих распределений.

2. На одном графике построить биномиальную функцию плотности распределения с параметром Np и аппроксимирующую ее функцию плотности распределения Гаусса со средним Np и дисперсией Npq (N = 30): Np = 2, Np = 10, Np = 20.

3. То же, что и в п.2 для функций плотности распределений Гаусса и Пуассона: m = 2, m = 10, m = 20.

4. На одном графике построить функцию плотности распределения Гаусса с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ и функции плотности распределения Стьюдента для различных степеней свободы f = 1, 3, 10, 30.

5. На одном графике построить функции плотности распределения хи-квадрат для различных степеней свободы f = 1, 3, 10, 30.

6. Вычислить P, если:

x~N(0,1)	$P(-1<x<2)$
x~N(5,3)	$P(0<x<2)$
x~PCHISQ(5)	$P(x<3)$
x~PT(1)	$P(\lvert x\rvert<2)$

7. Вычислить a, если:

x~N(0,1)	$P(\lvert x\rvert<a) = 0.9$
x~N(5,3)	$P(\lvert x-5\rvert<a) = 0.7$
x~PCHISQ(7)	$P(x<a) = 0.05$
x~PT(3)	$P(\lvert x\rvert<a) = 0.8$

З а н я т и е 2
Проверка статистических гипотез

1. Получить выборку из генеральной совокупности, подчиняющейся нормальному распределению N(10,10) и содержащую n чи-

сел Xn. Построить доверительный интервал для $\mu = E(X)$, используя критерий Лапласа и критерий Стьюдента при доверительной вероятности P = 0.9, а также доверительный интервал для дисперсии (P = 0.8). Рассмотреть случаи n = 5, 15, 150.

2. Получить выборку из генеральной совокупности, подчиняющейся распределению Пуассона (m = 5) и содержащую n чисел (n = = 100, 1000, 10000). Построить гистограммы для двух случаев числа разбиений К диапазона изменения случайной величины (К = 5, 10).

Проверить статистическую гипотезу о принадлежности данной выборки нормальному распределению N(xx, ss) (xx — выборочное среднее, ss — несмещенная оценка выборочной дисперсии) для двух указанных разбиений.

Занятие 3
Метод наименьших квадратов

Аппроксимировать полиномом Y(x) = A **x^3** + **B** x^2 + Cx + D экспериментальные данные:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	124	119	103	76	48	21	17	13	11
σy	12	13	11	8	7	5	5	4	4

1. Использовать нелинейный метод наименьших квадратов (по графику подобрать начальные приближения для параметров и получить решение с помощью решающего блока и функции Minerr(A,B,C,D).
2. Использовать линейный метод наименьших квадратов.
3. Для обоих методов проверить качество аппроксимации с помощью критерия хи-квадрат (Рдов = 0.9).

Занятие 4
Выбор рекомендованного значения

1. Получить выборку X объемом K чисел из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону N(m, d).

2. Получить выборку σ объемом K чисел из генеральной совокупности, распределенной равновероятно на отрезке [a, b].

3. Построить оценку рекомендованого значения X, полагая σi погрешностями величин Xi.

Варианты рабочих заданий:

k	8	10	12	9	8	12	10	9	12	10
m	15	25	30	35	40	45	50	60	70	65
d	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
a	5	2	4	5	3	10	15	7	5	20
b	10	5	8	15	8	20	30	15	10	40

О ЧИСЛЕ ЗНАЧАЩИХ ЦИФР В ЧИСЛЕННОМ ЗНАЧЕНИИ ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО И ЕГО ПОГРЕШНОСТИ

Наиболее часто встречающаяся на практике статистическая процедура — оценивание математического ожидания генеральной совокупности (генерального среднего) по выборке с указанием погрешности полученной оценки. Для равноточного ряда измерений оценки среднего (см. 4.2)

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ;$$

среднеквадратичная погрешность оценки среднего (4.9)

$$\sigma_{\widetilde{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{x})^2}{n(n-1)}}$$

и обычная форма записи результатов оценивания:

$$\widetilde{x} \pm \sigma_{\widetilde{x}} .$$

Возникает вопрос, какое число значащих цифр следует оставлять в изображении чисел $\widetilde{x}$ и $\sigma_{\widetilde{x}}$? Ответ на этот вопрос может быть получен из следующего рассмотрения. Оценки $\widetilde{x}$, $\sigma_{\widetilde{x}}$, s^2 (4.6) как функции выборки являются случайными величинами. Методами теории вероятностей можно получить функции распределения для этих оценок, вычислить параметры распределений [8], в частности, дисперсию оценки s^2. Среднеквадратичное отклонение в распределении $P(s)$, может быть получено и другими способами – в рамках метода максимального правдоподобия [9]. Последний способ дает более короткий путь к ответу на поставленный вопрос.

Относительная погрешность оценки среднеквадратичного отклонения нормально распределенной генеральной совокупности оказывается равной

$$\sigma_s = \frac{\sigma_s}{s} = \frac{1}{\sqrt{2n}} ,$$

где n — объем выборки.

Погрешность оценки среднего $\sigma_{\tilde{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$, т.е. отличается от s постоянным множителем, который не влияет на величину относительной погрешности. Таким образом:

$$\delta_s = \delta_{\sigma_{\tilde{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть в результате обработки выборки объема 8 получились оценки

$$6{,}234,\ldots \pm 0{,}345\ldots$$

Абсолютная погрешность $\sigma_{\tilde{x}}$ в этом случае:

$$\sigma_{\sigma_{\tilde{x}}} = \delta_{\sigma_{\tilde{x}}} = 0{,}25 \cdot 0{,}345 = 0{,}086,$$

т.е. в изображении $\sigma_{\tilde{x}}$ может измениться уже вторая цифра после запятой. С учетом этого ответ разумно записать: $6{,}2 \pm 0{,}3$.

МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ (МОНТЕ — КАРЛО)

Позволяет получать конкретные реализации (значения) случайной величины, если задана функция плотности ее распределения; воспроизводить траектории естественных физических процессов, подверженных воздействию случайных факторов. В этом качестве метод Монте — Карло — метод проведения «бумажного эксперимента» с теми же конечными результатами, что и для реального эксперимента. В работе 1 настоящего практикума требуется получить реализацию дискретной случайной величины x, распределенной по закону $p(x)$. Для этого:

1. Отрезки P_1, P_2, P_3 складываются так, что образуется отрезок длины 1.

2. Обращением к таблице случайных равномерно распределенных на отрезке [0, 1] чисел получаем конкретную реализацию γ (в режиме «Т» таблица REN).

3. Проверяем, в какой из отрезков попала точка с координатой γ. Так если γ принадлежит отрезку P_3 — получена реализация x_3, отрезку P_1 — получена реализация x_1 и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970.

2. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. М.: Мир, 1965.

3. Идье Л. Статистические методы в экспериментальной физике. Пер. с англ. / Под ред. А.А. Тяпкина. М.: Атомиздат, 1976.

4. Лавренчик В.Н. Постановка физического эксперимента. М.: Энергоатомиздат, 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

Юрий Васильевич Пятков
Сергей Николаевич Федотов

Лабораторный практикум

по курсу

«МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ»

Редактор *Н.В. Шумакова*

Оригинал-макет изготовлен *М.В. Макаровой*

ЛР № 020676 от 09.12.1997
Подписано в печать 14.11.2001. Формат 60х84 1/16
Печ.л. 6,0. Уч.-изд.л. 6,0. Тираж 100 экз.
Изд. № 027-1 Заказ №1244

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31