МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра общей физики

На правах рукописи

И. В. САВЕЛЬЕВ

МЕХАНИКА

Часть I

МОСКВА 1958

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
Московский инженерно-физический институт

Кафедра общей физики

На правах рукописи

И.В.Савельев

МЕХАНИКА

часть I

Под редакцией д-ра физ-мат.наук
профессора И.В.Савельева

Москва 1958

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 5

Глава I. Кинематика 9

§ I. Перемещение точки. Векторы и скаляры . . 9
§ 2. Некоторые сведения о векторах II
§ 3. Скорость при прямолинейном движении . . . I8
§ 4. Скорость при криволинейном движении . . . 22
§ 5. Ускорение при прямолинейном движении. . . 28
§ 6. Ускорение при криволинейном движении. . . 32
§ 7. Кинематика вращательного движения 38
§ 8. Векторное произведение векторов 42

Глава П. Динамика материальной точки 47

§ 9. Классическая механика. Границы её применимости 47
§I0. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета 48
§II. Второй закон Ньютона 5I
§I2. Единицы измерения и размерности физических величин 56
§I3. Третий закон Ньютона 6I
§I4. Принцип относительности Галилея 63
§I5. Свободное падение тел. Масса и вес . . . 65
§I6. Практическое применение законов Ньютона 7I
§I7. Импульс силы. Количество движения 75
§I8. Закон сохранения количества движения. . . 77
§I9. Абсолютно неупругий удар шаров 8I

Стр.

§ 20. Силы трения 82
§ 21. Закон всемирного тяготения 88
§ 22. Силы, действующие при криволинейном движении 94

Глава Ш. Работа и энергия 96

§ 23. Работа. Скалярное произведение векторов 96
§ 24. Мощность I03
§ 25. Потенциальное поле сил. Силы консервативные и неконсервативные I05
§ 26. Энергия. Закон сохранения энергии I09
§ 27. Связь между потенциальной энергией и силой I20
§ 28. Абсолютно упругий удар шаров I22

Глава IУ. Неинерциальные системы отсчета I26

§ 29. Силы инерции I26
§ 30. Центробежные силы инерции I28
§ 31. Силы Кориолиса I30

I098-I000

В В Е Д Е Н И Е

Механика представляет собой учение о простейшей форме движения материи, которое состоит в перемещении тел или их частей друг относительно друга.

Перемещение тел мы наблюдаем повседневно в обыденной жизни. Отсюда следует наглядность механических представлений. Этим же объясняется и то, что из всех естественных наук механика прежде других получила широкое развитие.

Как уже было указано, механическое движение состоит в перемещении тел друг относительно друга. Движение одного и того же тела относительно различных тел может иметь различный характер. Если, например, тело I относительно нас покоится /см.рис.I/, а тела 2 и 3 движутся вправо с одинаковой скоростью, то тело 3 перемещается относительно тела I, однако покоится относительно тела 2.

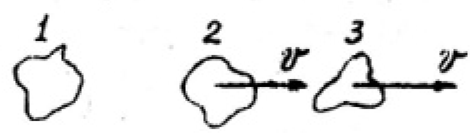


Рис. 1

Поэтому для того, чтобы получить возможность характеризовать движение какого-либо тела, необходимо условиться, относительно какого другого тела /или группы неподвижных друг относительно друга тел/ будет отсчитываться перемещение данного тела. Выбранное для этой цели тело /или группа тел/ образует с и с т е м у о т с ч е т а .

Практически для описания движения приходится связывать с телами, образующими систему отсчета, какую-либо систему координат, например, декартову или прямоугольную систему координат.

Координаты тела позволяют определить его положение в пространстве. Однако движение происходит как в пространстве, так и во времени /пространство и время - неотъемлемые формы существования материи/. Поэтому для описания движения необходимо также отсчитывать время. Это делается с помощью часов.

Располагая координатной системой, связанной с выбранной системой отсчета, и часами, можно приступить к описанию движения тел.

Движение тел обычно происходит в условиях, когда на них действуют силы. Действие этих сил, наряду с тем, что определяет характер движения, вызывает также деформацию тел, то есть изменение их размеров и формы. Очень часто эти деформации настолько незначительны, что ими можно пренебречь при описании движения тела. Тело, деформациями которого в условиях рассматриваемой задачи можно пренебречь, называется а б с о л ю т н о т в е р д ы м т е л о м. Следует иметь в виду, что абсолютно твердых /то есть совершенно недеформируемых/ тел в природе не существует. Только пренебрежимо малая роль деформаций при движении тел в определенных условиях дает возможность рассматривать эти тела как абсолютно твердые.

В ряде случаев при рассмотрении движения тел можно пренебречь их размерами. Это бывает тогда, когда размеры тела во много раз меньше прочих размеров, с которыми приходится иметь дело в условиях данной задачи. Например, при определении пути, проходимого автомобилем при переезде из Ленинграда в Москву, размерами автомобиля можно вполне пренебречь.

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется м а т е р и а л ь н о й т о ч к о й. Вопрос о том, можно ли данное конкретное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров самого тела, а от условий задачи. Одно и то же тело может в одних случаях выступать как материальная точка, в других же - как протяженное тело. Так, например, при вычислении траектории, по которой Земля движется вокруг

Солнца, Землю можно рассматривать как материальную точку. При рассмотрении же движения тел по поверхности Земли, она неизбежно должна рассматриваться как протяженное тело.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения - поступательное и вращательное.

П о с т у п а т е л ь н о е д в и ж е н и е - это такое движение, при котором л ю б а я прямая, связанная с движущимся телом, перемещается параллельно самой себе /см.рис.2/.

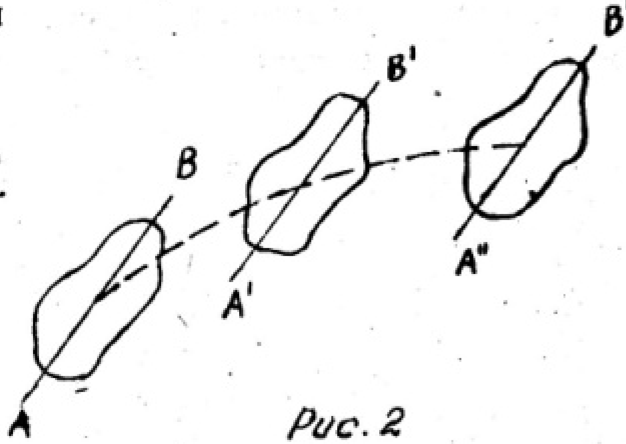


Рис. 2

При в р а щ а т е л ь н о м д в и ж е н и и все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой о с ь ю в р а щ е н и я /см.рис.3/. Ось вращения может находиться вне тела /см.рис.3-б/.

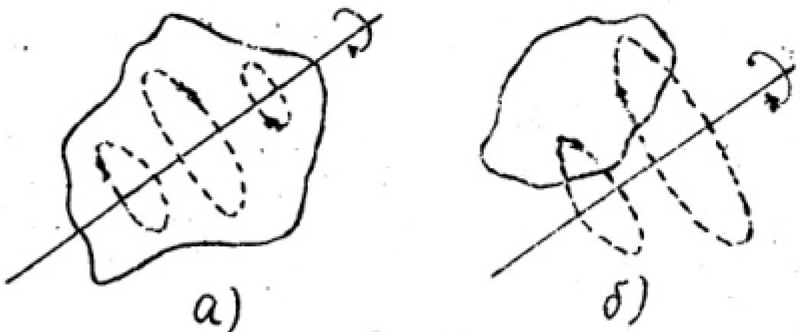


Рис. 3

Поскольку, говоря о каком-либо теле как о материальной точке, мы отвлекаемся от его протяженности, понятие вращательного движения к такому телу неприменимо. По отношению к материальной точке можно говорить только о поступательном движении.

Механика подразделяется на три раздела: I/ кинематику, 2/ статику и 3/ динамику. Кинематика изучает движение тел вне зависимости от тех причин, которые обусловливают это движение, статика изучает условия равновесия тел и, наконец, динамика изучает движение тел в связи с теми причинами /взаимодействиями между телами/, которые обусловливают тот или иной характер движения. Поскольку равновесие есть частный случай движения, законы статики оказываются естественным следствием законов динамики. По этой причине в курсах физики статика обычно отдельно не изучается.

Глава I. КИНЕМАТИКА

§ I. Перемещение точки. Векторы и скаляры

Материальная точка при своем движении описывает некоторую линию. Эта линия называется траекторией. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, движение по окружности, криволинейное движение и т.д.

Пусть материальная точка /в дальнейшем мы для краткости будем говорить просто точка/ переместилась вдоль некоторой траектории из точки I в точку 2 /см. рис. 4/. Расстояние от точки I до точки 2, отсчитанное вдоль траектории, представляет собой пройденный путь. Мы будем обозначать его буквой S .

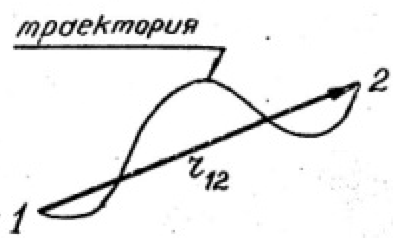


Рис. 4

Отрезок прямой, проведенный из точки I в точку 2, называется перемещением. Обозначим его r_{12} . Перемещение характеризуется, кроме своей величины /равной длине отрезка r_{12} /, также и направлением.

Действительно, рассмотрим два одинаковых по величине перемещения r_{12} и r_{13} /см.рис.5/. Несмотря на равенство длин этих отрезков, они явно представляют собой совершенно различные перемещения.

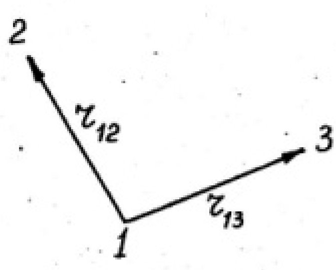


Рис. 5

Величины, подобные перемещению, подчиняются особому правилу сложения, которое можно уяснить на следующем примере: Пусть точка совершает последовательно два перемещения: r_{12} и r_{23} /см.рис.6/. Суммой этих двух перемещений естественно назвать такое перемещение r_{13}, которое приводит к тому же результату, что и первые два перемещения вместе.

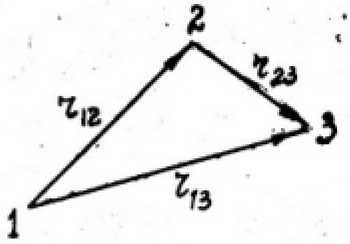


Рис. 6

Величины такого рода, как перемещение, то есть характеризующиеся численным значением и направлением, а также складывающиеся по правилу, показанному на рис. 6, называются векторными величинами или просто векторами. К числу векторов принадлежат скорость, ускорение, сила и ряд других.

Величины, для задания которых достаточно одного численного значения, называются скалярными величинами или скалярами. Примерами скалярных величин могут служить путь, время, масса и т.п.

Векторы принято обозначать буквой со стрелкой над ней. Например, вектор перемещения из точки I в точку 2 обозначается $\vec{r}_{12}$. Та же буква без стрелки означает численное значение или, как говорят, модуль соответствующего вектора[1]. Для обозначения модуля пользуются также символом вектора, заключенным между двумя вертикальными черточками. Таким образом,

$$|\vec{A}| = A = \text{модулю вектора } \vec{A},$$

$$|\vec{r}_{12}| = r_{12} = \text{модулю вектора } \vec{r}_{12}.$$

Модуль вектора - скаляр, причем всегда положительный.

На чертежах векторы изображаются в виде прямолинейных отрезков со стрелкой на конце, причем длина отрезка в установленном масштабе дает модуль вектора, а указанное стрелкой направление отрезка дает направление вектора[2].

[1] Для обозначения векторов используют также буквы жирного шрифта. В этом случае та же буква обычного шрифта означает модуль вектора.

[2] В случаях, когда это не может привести к недоразумениям, в обозначениях векторов на чертежах стрелку над буквой можно не ставить.

Показанная на рис. 6 операция сложения векторов символически записывается следующим образом:

$$\vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} = \vec{r}_{13} .$$

§ 2. Некоторые сведения о векторах

Равные векторы изображаются одинаковыми по длине параллельными отрезками, направленными в одну сторону. Равные по величине параллельные векторы, имеющие противоположные направления, отличаются друг от друга по знаку. Так, например, между векторами, изображенными на рис. 7, и их модулями имеются следующие соотношения:

$$\vec{A} = \vec{B};\ \vec{A} = -\vec{C};\ \vec{C} = -\vec{A};\ \vec{B} = -\vec{C};\ \vec{C} = -\vec{B}$$

$$A = B = C \quad \text{или} \quad |\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}|$$

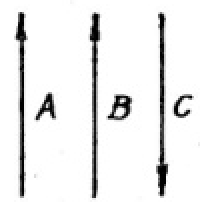
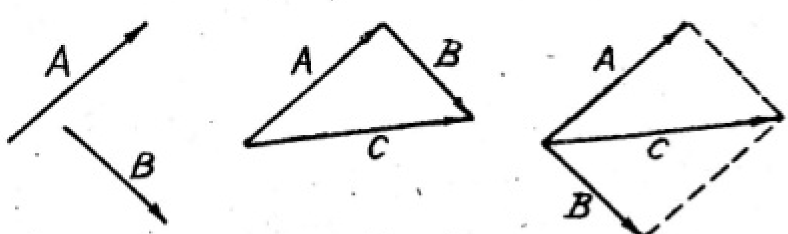


Рис. 7

Недопустима запись вида $\vec{A} = A$, так как сравнивать можно только однородные величины, а вектор /стоящий слева/ и скаляр /стоящий справа/ являются величинами разного рода.

Сложение векторов. О том, как складываются два вектора в результирующий вектор, была уже речь в предыдущем параграфе.

Рассмотрим теперь этот вопрос несколько подробнее. Пусть нам даны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ /см.рис.8-а/. Чтобы получить результирующий вектор $\vec{C}$, перенесем вектор $\vec{B}$



а) б) в)

Рис. 8

параллельно самому себе так, чтобы его начало оказалось совмещенным с концом вектора $\vec{A}$ [1] /см.рис.8-б/. Тогда вектор $\vec{\ }$, проведенный из начала вектора $\vec{A}$ в конец вектора $\vec{B}$, будет представлять собой результирующий вектор

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}.$$

Можно, однако, осуществить построение несколько иным способом /см.рис. 8-в/. Перенесем вектор $\vec{B}$ /или $\vec{A}$/ так, чтобы начала обоих векторов оказались совмещенными. Затем построим на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$ параллелограмм. Диагональ этого параллелограмма, очевидно, совпадает с вектором $\vec{C}$, полученным по способу, показанному на рис. 8-б. По этой причине иногда говорят, что векторы складываются по правилу параллелограмма.

Оба рассмотренные способа - б/ и в/ - дают одинаковый результат. Однако в случае сложения более, чем двух векторов способ б/ оказывается более простым и удобным. Пусть даны векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ и $\vec{\mathcal{D}}$ /см.рис.9/. Перенесем векторы параллельно самим себе таким образом, чтобы начало последующего вектора оказалось совмещенным с концом предыдущего. Получится ломаная линия. Результирующий

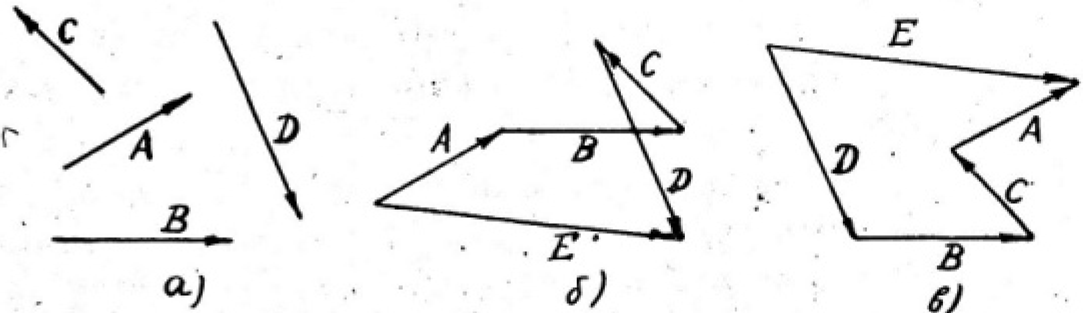


Рис. 9

[1] Такой перенос можно рассматривать как замену вектора B равным ему вектором, имеющим начало, совпадающее с концом вектора $\vec{A}$.

вектор будет представлять собой вектор $\vec{E}$, проведенный из начала первого вектора $\vec{A}$ в конец последнего вектора $\vec{D}$. Легко убедиться в том, что результирующий вектор $\vec{E}$ не зависит от последовательности, в которой располагаются заданные векторы. На рис. 9-б показан случай $\vec{E}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$, а на рис. 9-в - случай $\vec{E}=\vec{D}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{A}$.

Вычитание векторов. Разностью двух векторов $\vec{A}-\vec{B}$ называется такой вектор $\vec{C}$, который в сумме с вектором $\vec{B}$ дает вектор $\vec{A}$ /см. рис. 10/. Поскольку разность $\vec{A}-\vec{B}$ может быть представлена в виде:

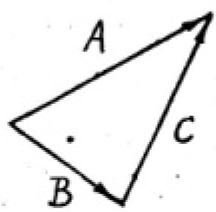


Рис. 10

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}),$$

вектор $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$ можно получить, сложив вектор $\vec{A}$ с вектором, равным по величине вектору $\vec{B}$, но имеющим противоположное ему направление.

На рис. 11 сопоставлены сумма и разность векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

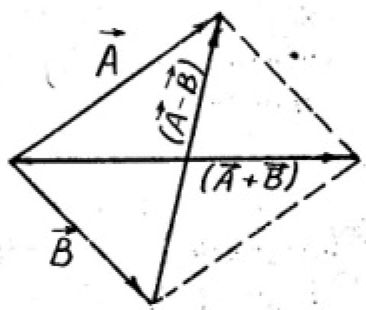


Рис. 11

Разложение вектора на составляющие. Каждый вектор $\vec{A}$ можно заменить несколькими векторами $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ и т.д., которые в сумме дают вектор $\vec{A}$. В этом случае векторы $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ и т.д. называются составляющими вектора $\vec{A}$. Саму операцию замены вектора $\vec{A}$ несколькими векторами называют разложением вектора $\vec{A}$ на составляющие. На рис. 12 показано разложение вектора $\vec{A}$ на составляющие, имеющие направление прямоугольных координатных осей.

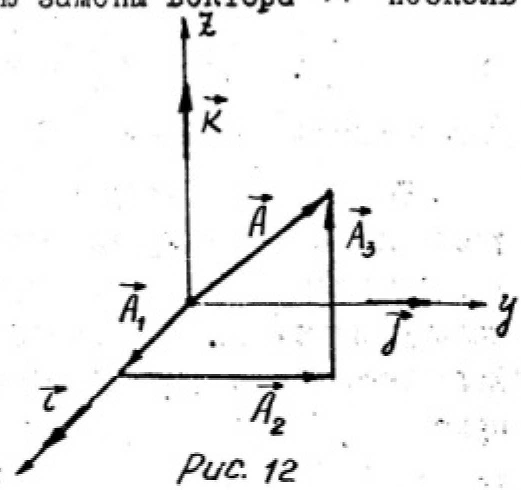


Рис. 12

Проекция вектора на ось. Пусть нам дан вектор $\vec{A}$ и некоторое направление в пространстве /ось/, которое мы обозначим, например, буквой n /см. рис. I3/. Проведем через начало и конец вектора $\vec{A}$ плоскости, перпендикулярные направлению n. Точки $1'$ и $2'$, в которых пересекаются эти плоскости с осью n, называются проекциями начала и конца вектора $\vec{A}$ соответственно. Величина отрезка оси, заключенная между плоскостями, называется проекцией вектора $\vec{A}$ на направление /или на ось/ n. Проекция вектора - скаляр и является величиной алгебраической: если направление от точки $1'$ к точке $2'$ совпадает с направлением n, проекция считается положительной; в противном случае проекция отрицательна.

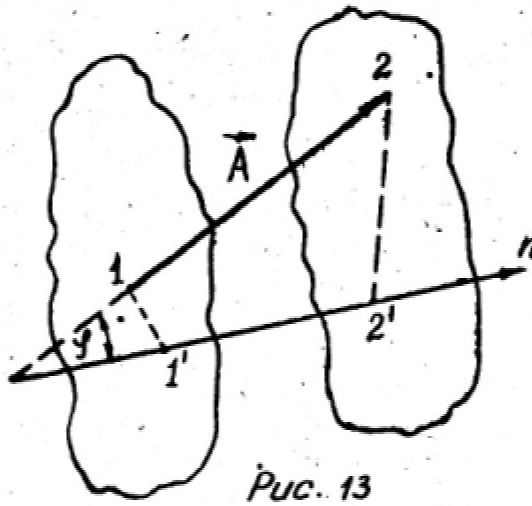


Рис. 13

Проекция обозначается той же буквой, что и сам вектор /без стрелки!/ с добавлением индекса, обозначающего то направление, на которое спроектирован вектор. Например, проекция вектора $\vec{A}$ на направление n обозначается A_n.

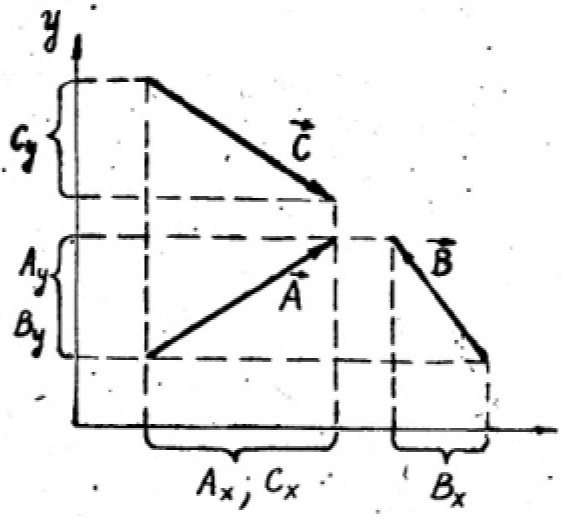
Введем в рассмотрение угол φ, который образует вектор $\vec{A}$ с осью n /см. рис. I3/. Проекция A_n, очевидно, может быть вычислена следующим образом:

$$A_n = A \cdot \cos\varphi, \qquad /2\text{-}1/$$

где A - модуль вектора $\vec{A}$.

Если вектор образует с данным направлением острый угол, косинус этого угла положителен, проекция вектора также положительна. Если вектор образует с осью тупой угол, косинус этого угла отрицателен, проекция также отрицательна. Если вектор перпендикулярен данной оси, проекция его равна нулю.

На рис. 14 показаны проекции нескольких векторов на координатные оси x и y. Векторы предполагаются лежащими в плоскостях xOy. Для проекций этих векторов имеют место следующие соотношения:



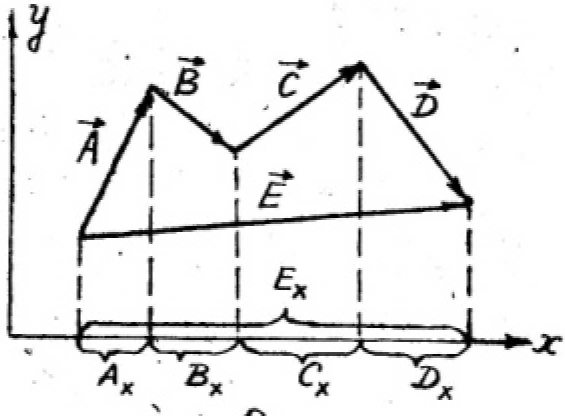
$$A_x = C_x > 0; \quad B_x < 0$$
$$A_y = B_y > 0; \quad C_y < 0$$
$$A_z = B_z = C_z = 0.$$

Рис. 14

В общем случае проекции вектора на все координатные оси x, y и z отличны от нуля. Если вектор $\vec{A}$ образует с осями x, y и z углы α, β и γ, то его проекции будут равны:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= A \cdot \cos\alpha \\ A_y &= A \cdot \cos\beta \\ A_z &= A \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad /2\text{-}2/$$

Легко понять, что по заданным проекциям вектора на три координатные оси может быть построен сам вектор. Следовательно, всякий вектор может быть определен тремя числами - проекциями его на оси координат. Напомним, что скалярная величина задается одним числом.



Очевидным /см.рис.15/ является следующее соотношение: если, например, $\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$, то

Рис. 15

$$E_x = A_x + B_x + C_x + D_x, \quad /2\text{-}3/$$

то есть проекция суммы векторов на некоторое направление равна сумме проекций слагаемых векторов на то же направление.

Радиус - вектор. Радиусом - вектором точки называется вектор, проведенный из начала координат в данную точку

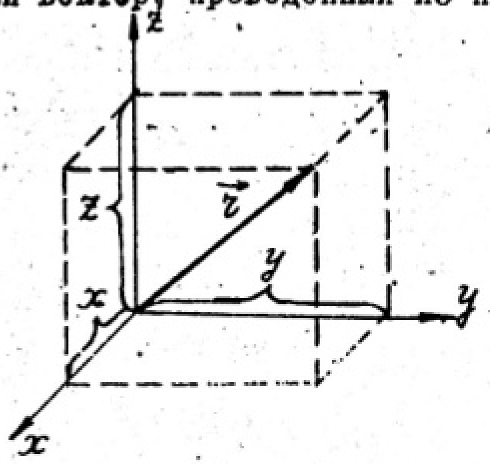


Рис. 16

/см.рис.16/. Радиус - вектор $\vec{r}$ однозначно определяет положение точки в пространстве. Его проекции на координатные оси равны, как видно из рисунка, декартовым координатам точки:

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z. \qquad /2\text{-}4/$$

Квадрат модуля вектора $\vec{r}$ равен сумме квадратов координат:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad /2\text{-}5/$$

Умножение вектора на скаляр. В результате умножения вектора $\vec{A}$ на скаляр a получается новый вектор $\vec{B}$, модуль которого в $|a|$ раз больше модуля вектора $\vec{A}$, а направление совпадает с направлением $\vec{A}$, если скаляр a положителен, и противоположно ему, если скаляр a отрицателен /см. рис. 17/. Если $\vec{B} = a\vec{A}$, то $B = |a| \cdot A$.

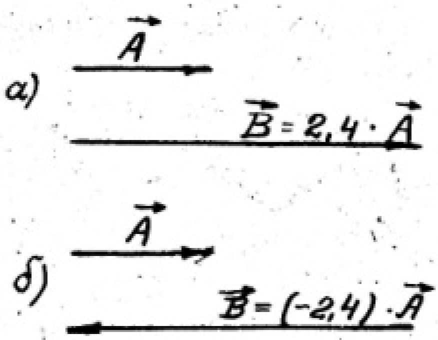


Рис. 17

Деление вектора на скаляр b равносильно умножению вектора на скаляр $a = \frac{1}{b}$.

Единичный вектор. Каждому вектору $\vec{A}$ может быть сопоставлен единичный вектор $\vec{A}_{единичн.}$, имеющий то же направление, что и $\vec{A}$, а по модулю равный единице.

Очевидны следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\vec{A} &= A\cdot\vec{A}_{единичн.}\\ \vec{A}_{единичн.} &= \frac{\vec{A}}{A}\end{aligned}\right\} \qquad /2\text{-}6/$$

Единичный вектор имеет также другое название - орт.

Составляющие вектора по координатным осям $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ и $\vec{A}_3$ /см.рис.I2/ имеют модули, равные модулям проекций вектора на эти оси:

$$|\vec{A}_1| = |A_x|$$
$$|\vec{A}_2| = |A_y|$$
$$|\vec{A}_3| = |A_z|\,.$$

Введем единичные векторы, имеющие направления координатных осей. Их принято обозначать следующим образом: единичный вектор, направленный по оси x символом $\vec{i}$, по оси y - символом $\vec{j}$ и по оси z - символом $\vec{k}$. Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ называют ортами осей x, y и z соответственно.

Тогда, например, составляющую $\vec{A}_1$, имеющую направление по оси x, можно представить в виде /см.рис.I2/:

$$\vec{A}_1 = A_x\cdot\vec{i}\,. \qquad /2\text{-}7/$$

В самом деле, модуль вектора $A_x\vec{i}$ будет равен $|A_x|$, то есть $|\vec{A}_1|$. Далее, если вектор $\vec{A}_1$ направлен в ту же сторону, что и ось x, то есть совпадает по направлению с ортом $\vec{i}$, то, как легко видеть из чертежа, A_x положительно; если же $\vec{A}_1$ направлен в сторону отрицательных x, то есть противоположно вектору $\vec{i}$, A_x оказывается отрицательным, так что вектор $A_x\vec{i}$ имеет направление, противоположное $\vec{i}$, и, следовательно, совпадающее с направлением вектора $\vec{A}_1$.

Для двух других составляющих $\vec{A}_2$ и $\vec{A}_3$ можно написать выражения, аналогичные /2-7/;

$$\vec{A}_2 = A_y \cdot \vec{j}$$
$$\vec{A}_3 = A_z \cdot \vec{k}$$

Поскольку вектор $\vec{A}$ равен сумме своих составляющих, можно написать:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}. \qquad /2-8/$$

Таким образом, любой вектор можно выразить через его проекции на координатные оси и единичные векторы /орты/ этих осей.

§ 3. Скорость при прямолинейном движении

Рассмотрим движение точки по прямолинейной траектории. Положение точки можно задать, указав ее расстояние от некоторой точки 0, выбранной за начало отсчета. Пусть движущаяся точка переместилась за время t из положения I в положение 2 /см.рис.I8/. Если точка двигалась все время в одном направлении, пройденный ею путь S будет равен модулю перемещения r_{12}.

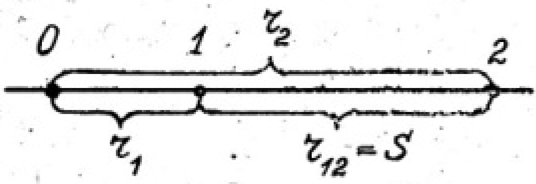


Рис. 18

Равномерное движение. Отметим на траектории положения точки через равные промежутки времени Δt [1] /рис.I9/.

I/ Символом Δ /дельта/ мы будем пользоваться в двух случаях:

а/ для обозначения доли какой-либо величины. Например, в рассматриваемом случае Δt есть часть всего промежутка времени t ;

б/ для обозначения приращения какой-либо величины. Например, r_{12} на рис. I8 можно трактовать как Δr , т.е. приращение расстояния точки от начала отсчета, равное $r_2 - r_1$.

В общем случае пути ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3 и т.д., проходимые за последовательные равные промежутки времени Δt_1, Δt_2, Δt_3 и т.д. / $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \ldots = \Delta t$ /, будут различны по величине. Однако может случиться, что все пути ΔS будут равны друг другу: $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S_3 = \ldots$, причем это равенство будет сохраняться при неограниченном уменьшении промежутков времени Δt, на которые разбивается все время t /число этих промежутков N соответственно будет расти, так как $N \cdot \Delta t = t$/. Такое движение точки называется р а в н о м е р н ы м движением. Следовательно, р а в н о м е р н о е д в и ж е н и е - э т о т а к о е д в и ж е н и е, п р и к о т о р о м д в и ж у щ а я с я т о ч к а з а п р о и з в о л ь н ы м о б р а з о м в ы б р а н н ы е р а в н ы е п р о м е ж у т к и в р е м е н и п р о х о д и т о д и н а к о в ы е п у т и.

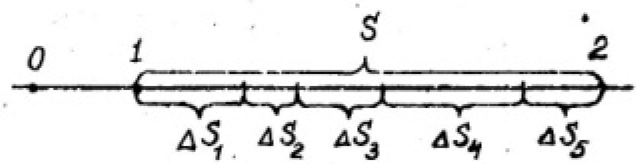


Рис. 19

Очевидно, что каким бы мы ни брали промежуток времени Δt, отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при равномерном движении будет иметь одно и то же численное значение, равное $\frac{S}{t}$. Это значение называют величиной скорости движения точки, которую мы будем обозначать буквой v. Скорость, как и перемещение, есть величина векторная, причем при прямолинейном движении направление скорости совпадает с направлением перемещения. Если перемещение точки за промежуток времени Δt обозначить символом $\Delta \vec{r}$, то вектор скорости можно определить следующим образом:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

/напомним, что $|\Delta \vec{r}| = \Delta S$ /.

При движении точки каждому моменту времени t соответствует свое положение точки на траектории и свое значение пройденного точкой пути. Следовательно, путь S

является функцией времени t, что можно записать следующим образом: $S = S(t)$. Если путь пройденной точки отсчитывать от некоторой точки 0, а отсчет времени производить начиная с того момента, когда точка пройдет уже некоторый путь S_0 /см. рис. 20/, то формула пути при равномерном движении имеет следующий вид:

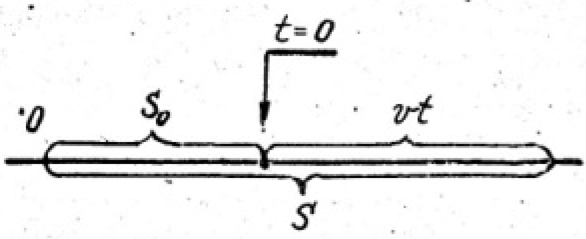


Рис. 20

$$S = S_0 + vt.$$

Неравномерное движение. Если за равные промежутки времени точка проходит неодинаковые пути, движение называется неравномерным. Равномерное движение можно определить как движение, происходящее с постоянной скоростью. При неравномерном движении скорость меняется. Изменение скорости, как мы увидим в дальнейшем, происходит в результате воздействия на данное тело, оказываемого другими телами. Для того чтобы это воздействие привело к заметному изменению скорости, необходимо конечное время. Поэтому за малый промежуток времени Δt скорость меняется мало и может приближенно считаться постоянной. Это утверждение будет тем справедливее, чем меньше рассматриваемый промежуток времени Δt.

При неравномерном движении отношение пути ΔS к промежутку времени Δt, за который этот путь пройден, дает среднее значение скорости за время Δt или на пути ΔS:

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t}^{1)}.$$

1/ В физике принято обозначать среднее значение какой-либо величины буквенным символом этой величины с чертой /без стрелки!/ над ним. Не следует смешивать, например, такие обозначения:
$\vec{v}$ - вектор скорости и $\bar{v}$ - среднее значение модуля скорости.

Истинные значения скорости в различные моменты времени, относящиеся к промежутку Δt, будут, вообще говоря, отличаться друг от друга и от $\bar{v}$. Для определения истинного значения скорости в какой-то момент времени t следует поступить следующим образом /см. рис. 2I/. Взять промежуток времени Δt, включающий в себя интересующий нас момент t, и определить для него среднюю скорость $\bar{v}$. Чем меньше будет промежуток времени Δt, тем меньше будет отличаться $\bar{v}$ от истинной скорости в момент t. В пределе, при неограниченном уменьшении Δt $\bar{v}$ совпадает с истинной скоростью v. Символически сказанное выше записывается следующим образом:

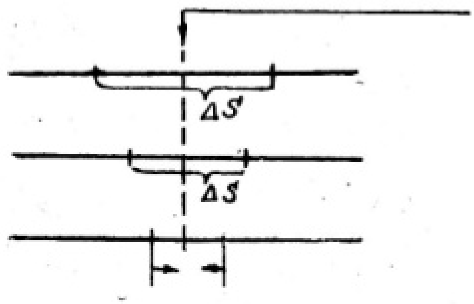


Рис. 21

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

что читается так: скорость численно равна пределу отношения ΔS к Δt при условии, что Δt стремится к нулю.

Напомним, что S является функцией t. В математике величина, равная

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где y есть функция x, называется производной y по x и обозначается символически в виде $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, скорость численно равна производной пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Использовав вектор перемещения точки за время Δt, можно определить вектор истинной скорости:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

§ 4. Скорость при криволинейном движении

Положение точки в пространстве можно задать с помощью радиуса - вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат в данную точку /см.рис.22/. При движении точки вектор $\vec{r}$ изменяется, вообще говоря, и по величине и по направлению[1/]. Приращение вектора $\vec{r}$ за некоторое время Δt совпадает с вектором перемещения точки за то же время Δt .

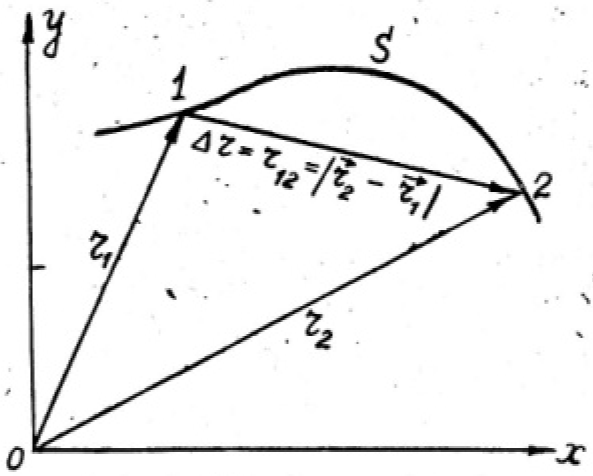


Рис. 22

В случае криволинейного движения путь S уже не совпадает с модулем перемещения r_{12} . Однако, если брать отрезки пути ΔS , соответствующие небольшим промежуткам времени Δt , то различие между ΔS и $|\Delta \vec{r}|$[2/] будет невелико /см.рис.23/, причем при уменьшении Δt путь ΔS все с большей точностью будет совпадать с $|\Delta \vec{r}|$. Скорость точки в момент, когда она находится в положении, определяемом радиусом - вектором $\vec{r}$,

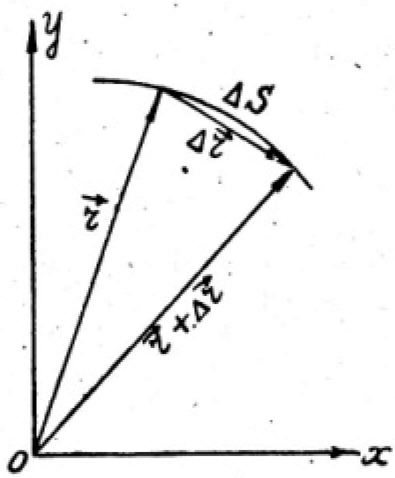


Рис. 23

[1/] Рекомендуется в порядке упражнения указать траекторию, для которой радиус-вектор точки изменяется:
а/ только по величине, б/ только по направлению.

[2/] Здесь нельзя написать Δr /см. ниже/.

называется /как и в случае прямолинейного движения/ векторная величина, равная:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad /4\text{-}1/$$

Направлен вектор $\vec{v}$ по касательной к траектории в рассматриваемой точке /см.рис.24/.

Поскольку в пределе при уменьшении Δt путь ΔS совпадает с модулем перемещения $|\Delta \vec{r}|$, величина скорости может быть представлена следующим образом:

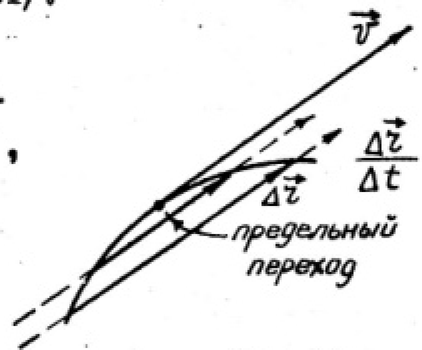


Рис. 24

$$v = |\vec{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \qquad /4\text{-}2/$$

Заметим, что в этом выражении вместо $|\Delta \vec{r}|$ нельзя писать Δr. Символ $|\Delta \vec{r}|$ означает модуль приращения вектора $\vec{r}$, в то время как Δr представляет собой приращение модуля вектора $\vec{r}: \Delta|\vec{r}|$. Обе эти величины, вообще говоря, не равны:

$$|\Delta \vec{r}| \neq \Delta |\vec{r}| = \Delta r.$$

В этом можно убедиться на следующем примере, приведенном для произвольного вектора $\vec{A}$ /см.рис.25/. Пусть вектор $\vec{A}$ получает такое приращение $\Delta\vec{A}$, что модуль его не меняется:

$$|\vec{A} + \Delta\vec{A}| = |\vec{A}|.$$

Следовательно, приращение модуля вектора $\vec{A}$. $\Delta|\vec{A}| = \Delta A = 0$. В то же время модуль приращения вектора $|\Delta\vec{A}|$ отличен от нуля /он равен длине отрезка 2-3/.

Рисунок 26 поясняет, что при данном $|\Delta \vec{A}|$ приращение

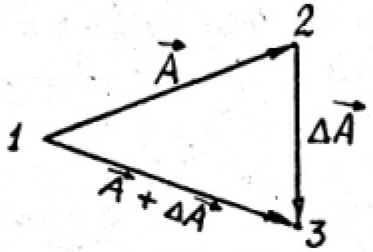


Рис. 25

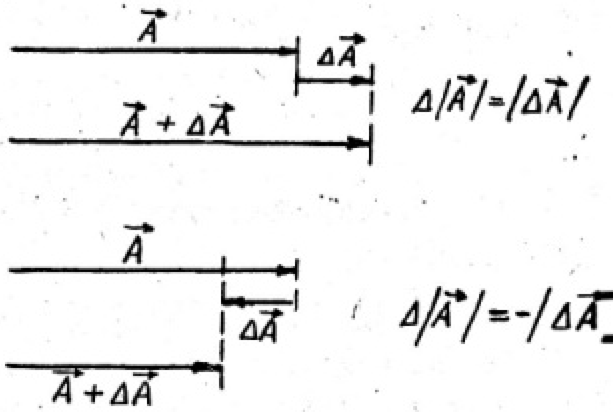


Рис. 26

модуля $\Delta|\vec{A}|$ может иметь значения в пределах от $-|\Delta\vec{A}|$ до $+|\Delta\vec{A}|$.

<u>Путь, пройденный при неравномерном движении.</u> Из выражения /4-2/ следует, что при малых Δt :

$$v \cong \frac{\Delta S}{\Delta t} . \qquad /4\text{-}3/$$

Последнее приближенное равенство выполняется тем точнее, чем меньше Δt .

Если известна величина скорости v как функция t , можно вычислить путь, пройденный точкой с момента t_1 до момента t_2 . Для этого разобьем промежуток времени $t_2 - t_1$ на N малых промежутков: Δt_1 , Δt_2 , ..., Δt_N , которые могут быть различны по величине. Весь путь S , пройденный точкой, можно представить как сумму путей ΔS_1 , ΔS_2 , ..., ΔS_N , пройденных за соответствующие интервалы времени Δt :

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i .^{1)}$$

1/ Так принято записывать сокращенно сумму N слагаемых одинакового вида.

В соответствии с /4-3/ каждое из слагаемых ΔS_i / i - любое число от I до N / может быть приближенно представлено в виде:

$$\Delta S_i \cong v_i \cdot \Delta t_i ,$$

где Δt_i - промежуток времени, за который был пройден путь ΔS_i, а v_i - одно из значений скорости за время Δt_i.

Таким образом,

$$S \cong \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \Delta t_i . \qquad /4\text{-}5/$$

Написанное равенство будет выполняться тем точнее, чем меньше будут промежутки времени Δt_i. В пределе при стремлении всех Δt_i к нулю /количество промежутков Δt_i будет при этом неограниченно возрастать/ сумма, стоящая справа, станет точно равна S:

$$S = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \Delta t_i . \qquad /4\text{-}6/$$

Скорость есть функция времени: $v = v(t)$. В математике выражение вида

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \Delta x_i$$

составленное для значений x, заключенных в пределах от a до b, называют определенным интегралом и записывают символически следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx .$$

Следовательно путь, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, равен определенному интегралу:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) . dt . \qquad /4\text{-}7/$$

Покажем, что величину пройденного пути можно представить как площадь фигуры, которая ограничена кривой

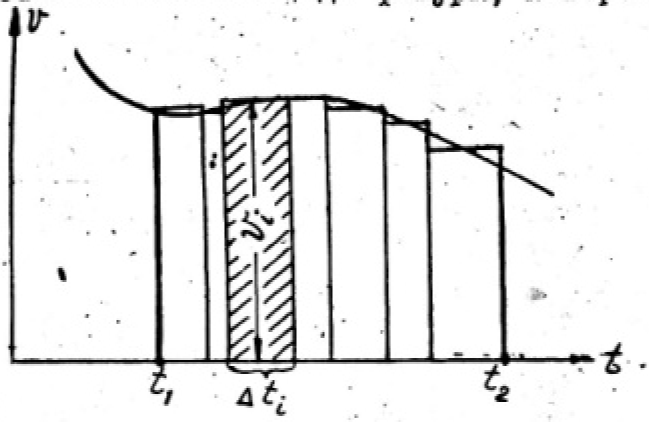


Рис. 27

зависимости величины скорости v от времени t. Построим график функции $v = v(t)$ /см. рис. 27/. Произведение $v_i \cdot \Delta t_i$ численно равно площади заштрихованной /i-й/ полоски. Сумма таких произведений будет равна площади, ограниченной осью t, прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$, а также ломаной линией, образованной верхними краями всех подобных полосок. При стремлении Δt_i к нулю ширина всех полосок убывает /одновременно число их растет/ и ломаная линия в пределе сольется с кривой $v = v(t)$.

Таким образом, путь, пройденный за время с момента t_1 до момента t_2, численно равен площади фигуры, ограниченной графиком $v = v(t)$, осью времени t и прямыми $t = t_1$

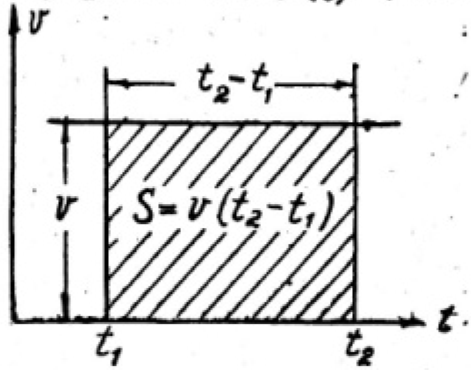


Рис. 28

и $t = t_2$. Для случая равномерного движения /скорость в этом случае по величине постоянна/ такой результат является тривиальным /см. рис. 28/.

<u>Проекции вектора скорости на координатные оси.</u> Вектор скорости по определению равен вектору элементарного перемещения $\Delta\vec{r}$, умноженному на скаляр $\frac{1}{\Delta t}$, где Δt – промежуток времени, за который произошло перемещение $\Delta\vec{r}$. Проекции вектора $\Delta\vec{r}$ на оси координат равны, как следует из рис. 29, приращениям

соответствующих координат переместившейся точки:

$$(\Delta\vec{r})_x = \Delta x;\ (\Delta\vec{r})_y = \Delta y;\ (\Delta\vec{r})_z = \Delta z.$$

Вместе с тем проекция вектора $\vec{v} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{r}$ на любое направление равна:

$$пр.\,\vec{v} = \frac{1}{\Delta t}\cdot пр\cdot\Delta\vec{r}.$$

Поэтому проекция вектора $\vec{v}$, например, на ось x будет равна:

$$v_x = \frac{1}{\Delta t}\cdot\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

или точнее:

$$v_x = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

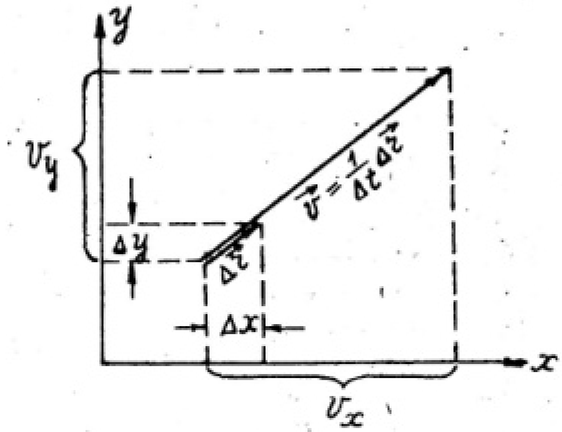


Рис. 29

Аналогично:

$$v_y = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}.$$

В физике производные величин по времени t принято обозначать символом соответствующей величины с точкой над ним. Например:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x};\ \frac{dr}{dt} = \dot{r};\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\ \text{ и т.д.}$$

Используя эти обозначения, проекции вектора $\vec{v}$ на координатные оси можно записать следующим образом:

$$v_x = \dot{x};\quad v_y = \dot{y};\quad v_z = \dot{z}. \qquad /4\text{-}8/$$

§ 5. Ускорение при прямолинейном движении

Рассмотрим неравномерное движение точки по прямолинейной траектории, происходящее в одном и том же направлении, например, слева направо /см. рис. 30/.

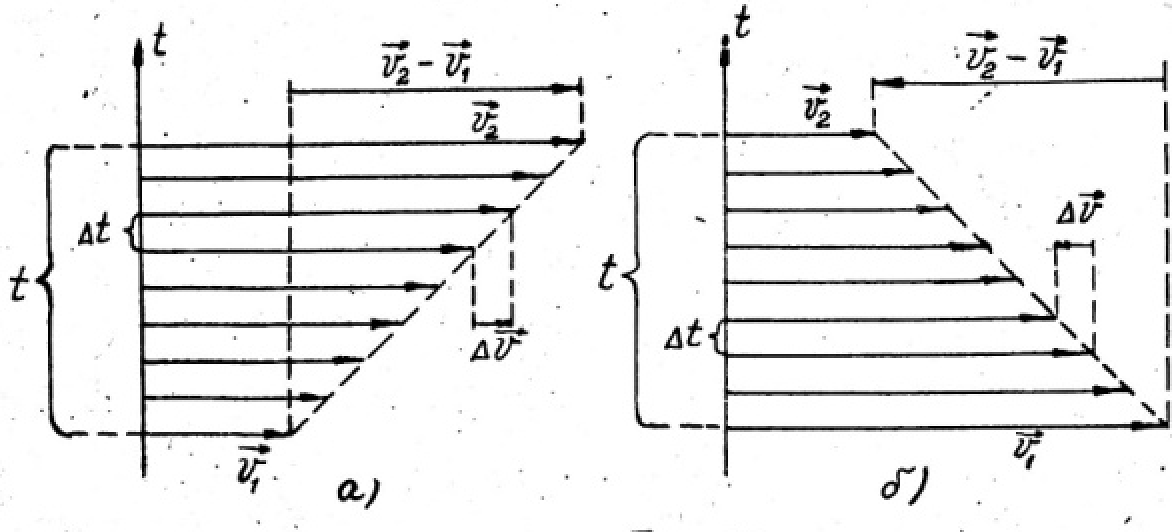


Рис. 30

В этом случае скорость точки будет изменяться только по величине. Пусть за время t величина скорости изменяется от значения v_1 до v_2. Разобьем промежуток времени t на N равных промежутков времени Δt. В общем случае приращения скорости $\Delta\vec{v}$ за различные промежутки времени Δt будут неодинаковы. Может, однако, случиться, что за любой из равных, сколь угодно малых промежутков времени Δt, вектор скорости будет получать одинаковые приращения $\Delta\vec{v}$. В этом случае движение точки называется равномерно-переменным движением. Таким образом, **равномерно-переменным прямолинейным движением называется такое движение, при котором за произвольным образом выбранные равные промежутки времени скорость точки получает одинаковые приращения.**

Если приращение $\Delta\vec{v}$ совпадает по направлению с $\vec{v}$ /рис. 30-а/, то скорость растет по величине и движение называется равномерно-ускоренным. При $\Delta\vec{v}$ противоположном по направлению $\vec{v}$ /рис. 30-б/ скорость уменьшается и движение называется равномерно-замедленным.

Очевидно, что при любом по величине Δt отношение $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ будет иметь одно и то же значение, равное $\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t}$. Величину

$$\vec{w}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t} \qquad /5\text{-}1/$$

называют ускорением точки. Как следует из его определения, ускорение - величина векторная.

При равномерно-ускоренном прямолинейном движении вектор ускорения $\vec{w}$ имеет такое же направление, как и вектор скорости $\vec{v}$. При равномерно-замедленном прямолинейном движении вектор ускорения и вектор скорости имеют противоположные направления.

В случае равномерно-переменного движения ускорение $\vec{w}$ является постоянным во времени. Если за равные промежутки времени Δt скорость получает неодинаковые приращения $\Delta\vec{v}$, "быстрота" изменения скорости будет, очевидно, меняться со временем. Соответственно и ускорение в различные моменты времени будет различным.

Чтобы определить ускорение $\vec{w}$ в какой-либо момент[1] времени t, будем рассуждать подобно тому, как мы это делали, определяя мгновенное значение скорости /см. § 3/. Выберем небольшой интервал времени Δt, содержащий момент времени t, для которого мы хотим найти ускорение. Если интервал Δt будет достаточно мал, можно приближенно считать, что в течение промежутка времени Δt "быстрота" изменения скорости остается постоянной. Тогда,

---

1/ Буква t может применяться как для обозначения промежутка времени /так, например, было сделано в начале этого параграфа/, так и для обозначения момента времени /как это сделано в данном случае/. Следует строго различать эти два случая.

если $\Delta\vec{v}$ есть изменение скорости за время Δt, то ускорение

$$\vec{w} \cong \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad /5\text{-}2/$$

Это равенство будет тем точнее, чем меньше интервал времени Δt. В пределе, при неограниченном убывании Δt приближенное равенство /5-2/ перейдет в строгое равенство

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad /5\text{-}3/$$

Найдем закон, по которому изменяется со временем скорость при равномерно-переменном движении. Пусть в начальный момент времени /при $t = 0$/ скорость точки имеет значение $\vec{v}_0$, ускорение равно $\vec{w}$ и, наконец, величина скорости в момент времени t равна $\vec{v}$. Между этими величинами имеется согласно /5-I/ следующее соотношение:

$$\vec{w} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

или

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{w}t.$$

Для проведения численных расчетов, от соотношений между векторами переходят к соотношениям между проекциями этих векторов на определенные направления.

Спроектируем все векторы на направление x, совпадающее с направлением вектора $\vec{v}_0$:

$$v_x = v_{0x} + w_x t. \qquad /5\text{-}4/$$

Проекции v_x, v_{0x} и w_x будут равны модулям соответствующих векторов, взятым со знаком "+", если направление вектора совпадает с направлением x, и взятым со знаком "-", если направление вектора и направление x противоположны друг другу /см. рис. 3I/.

Обычно при рассмотрении прямолинейного движения индексы "x" в уравнении /5-4/ опускают и пишут просто:

$$v = v_0 + wt\,, \qquad /5\text{-}5/$$

обращаясь с входящими в уравнение /5-5/ величинами как с проекциями векторов.

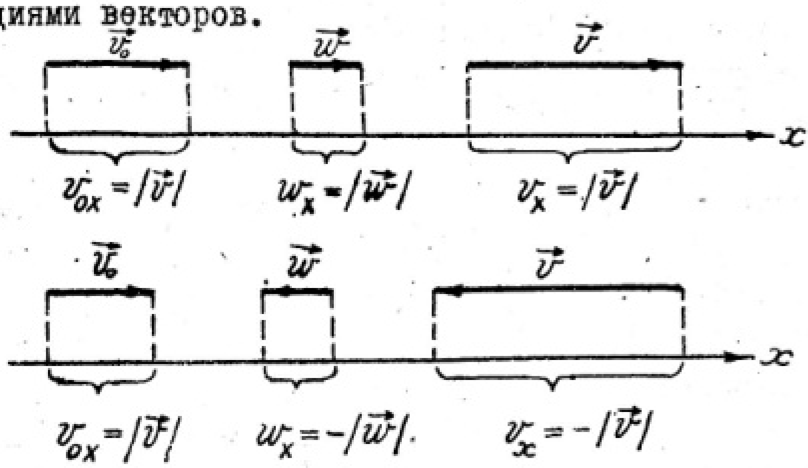


Рис. 31

При этом пользуются не вполне строгой /но общепринятой/ терминологией, называя, например, w ускорением и считая ускорение положительным или отрицательным /в соответствии с тем, какой знак имеет w_x /.

График $v = v(t)$ при равномерно-переменном движении имеет вид прямой линии /см. рис. 32/. Путь, пройденный точкой за время t, численно равный заштрихованной

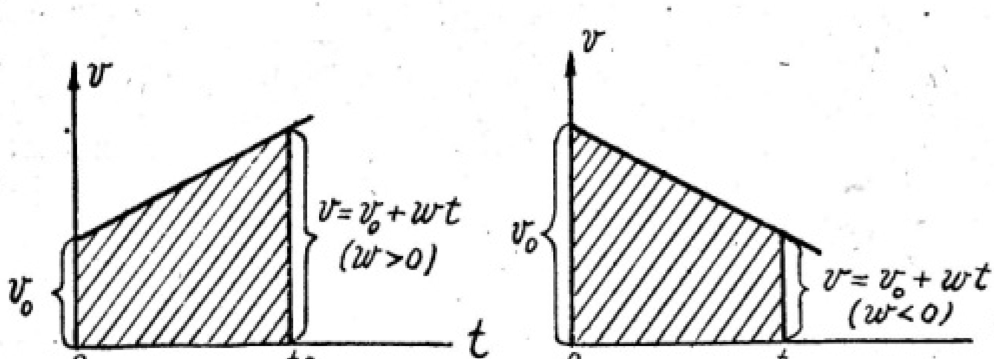


Рис. 32

площади, определяется выражением:

$$S=\frac{v_0+v}{2}t=\frac{v_0+(v_0+wt)}{2}t=v_0t+\frac{wt^2}{2},$$

где w - величина алгебраическая.

Если начало отсчета пути выбрано так, что к моменту, с которого начинается отсчет времени t, точка проходит некоторый путь S_0, то для пути, проходимого за время t, получается следующая формула:

$$S=S_0+v_0t+\frac{wt^2}{2}. \qquad /5\text{-}6/$$

Отметим, что для пройденного пути эта формула дает правильный результат только в том случае, если за время t направление движения точки /знак скорости/ не изменяется.

§ 6. Ускорение при криволинейном движении

При криволинейном движении скорость может меняться как по величине, так и по направлению. Прежде чем приступать к получению выражения для ускорения в общем случае, рассмотрим простейший случай криволинейного движения - равномерное движение точки по окружности.

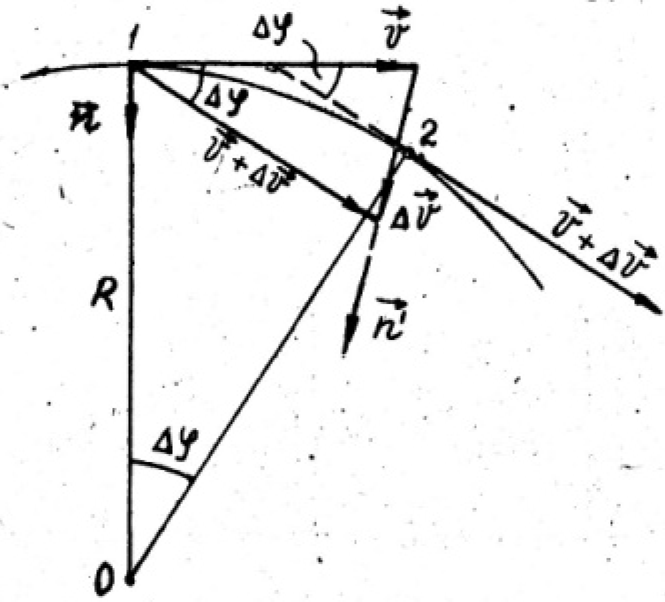


Рис. 33

Пусть в рассматриваемый момент времени t точка находится в положении I /см. рис. 33/. Спустя время Δt точка окажется в положении 2, пройдя путь ΔS, равный дуге I-2. При этом скорость $\vec{v}$ точки получает приращение $\Delta\vec{v}$, в результате чего вектор скорости, оставаясь неизменным по величине /при равномерном движении $|\vec{v}|=const$ /, повернется на угол $\Delta\varphi$, совпадающий по величине с центральным углом, опирающимся на дугу длиной ΔS:

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta S}{R}, \qquad /6\text{-}I/$$

где R - радиус окружности, по которой движется точка.

Найдем приращение вектора скорости $\Delta\vec{v}$. Для этого перенесем вектор $(\vec{v}+\Delta\vec{v})$ таким образом, чтобы его начало совпадало с началом вектора $\vec{v}$. Тогда вектор $\Delta\vec{v}$ изобразится отрезком, проведенным из конца вектора $\vec{v}$ в конец вектора $(\vec{v}+\Delta\vec{v})$. Этот отрезок является основанием равнобедренного треугольника со сторонами $\vec{v}$ и $(\vec{v}+\Delta\vec{v})$ и углом $\Delta\varphi$ при вершине. Если угол $\Delta\varphi$ невелик /что выполняется для малых Δt /, для сторон этого треугольника можно приближенно написать:

$$|\Delta\vec{v}|^{1)}\cong v\cdot\Delta\varphi .$$

Вектор $\Delta\vec{v}$ можно представить в виде произведения его модуля на единичный вектор такого же направления, как и у $\Delta\vec{v}$. Обозначим этот единичный вектор $\vec{n}'$. Тогда:

$$\Delta\vec{v}=|\Delta\vec{v}|\cdot\vec{n}'\cong v\cdot\Delta\varphi\cdot\vec{n}' .$$

Подставляя сюда $\Delta\varphi$ из /6-I/, получаем:

$$\Delta\vec{v}\cong v\frac{\Delta S}{R}\cdot\vec{n}' . \qquad /6\text{-}2/$$

Деля $\Delta\vec{v}$ на Δt и делая предельный переход, получим ускорение:

$$\vec{w}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t}\cdot\vec{n}' .$$

I/ Нельзя писать Δv /см. сноску на стр.21 /
В данном случае $\Delta v=0$.

В этом выражении v и R - постоянные; отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ в пределе даст модуль скорости v; единичный вектор $\vec{n}'$ в пределе сольется с единичным вектором $\vec{n}$, перпендикулярным вектору $\vec{v}$ и направленным к центру окружности. Вектор $\vec{n}$ представляет собой единичный вектор нормали к окружности в данной точке /в точке I/.

Таким образом,

$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} . \qquad /6\text{-}3/$$

В связи с тем, что найденное нами ускорение $\vec{w}$ направлено по нормали к траектории, его называют нормальным ускорением и обозначают $\vec{w}_n$ /как мы уже поступили в выражении (6-3) /. Его модуль:

$$w_n = \frac{v^2}{R} . \qquad /6\text{-}4/$$

Чем больше искривлена траектория /чем меньше R окружности/, тем больше w_n при той же величине скорости v. За меру кривизны принимается величина $\frac{1}{R}$, которую называют кривизной окружности.

Очевидно, что ускорение точки, движущейся по произвольной кривой, также будет зависеть от кривизны траектории. Дело, однако, усложняется тем, что кривизна произвольной траектории в различных ее точках будет различна. Поэтому прежде, чем двигаться дальше, нам придется познакомиться с определением кривизны произвольной линии в данной точке, причем для простоты мы ограничимся рассмотрением только плоских кривых.

Рис.34

Кривизна плоской линии в какой-либо ее точке равна кривизне окружности, сливающейся в данном месте с кривой на бесконечно малом ее участке. Такую окружность называют кругом кривизны плоской линии в данной точке. Чтобы получить круг кривизны в точке I, нужно поступить следующим образом /см.рис.34/. Возьмем на кривой точки 2 и 3, близкие к точке I. Проведем через I, 2 и 3 окружность. Предельное положение этой окружности, получающееся при неограниченном приближении точек 2 и 3 к точке I, и будет представлять собой круг кривизны. Радиус этого круга дает радиус кривизны линии в точке I, а центр круга – центр кривизны для точки I.

К вопросу о нахождении центра и радиуса кривизны можно также подойти несколько иначе. Возьмем на кривой две близкие точки I и 2 /см.рис.35/ и проведем касательные к кривой в этих двух точках. Перпендикуляры к этим касательным пересекутся в некоторой точке O', причем расстояния R' и R'' будут, вообще говоря, неодинаковыми.

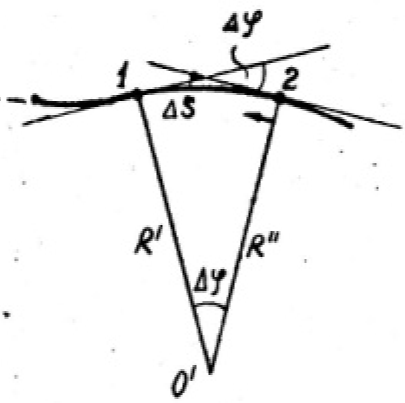


Рис.35

Если точку 2 приближать неограниченно к точке I, пересечение перпендикуляров O' будет стремиться к некоторой точке O, которая будет представлять собой центр кривизны. Оба расстояния R' и R'' будут стремиться к одному и тому же пределу R, равному радиусу кривизны. Величина, обратная R, дает кривизну линии в точке I.

Теперь займемся нахождением ускорения точки, движущейся по произвольной плоской кривой. Разложим вектор приращения скорости $\Delta\vec{v}$ /соответствующий промежутку времени Δt, за который точка перемещается из положения I в положение 2/ на две составляющие: $\Delta\vec{v}_n$ и $\Delta\vec{v}_t$ /см. рис. 36/. Эти составляющие выберем так, чтобы расстояние от точки I до конца вектора $\Delta\vec{v}_n$ было равно модулю скорости $\vec{v}$ в начальный момент. Тогда, очевидно, модуль вектора $\Delta\vec{v}_t$ будет равен приращению модуля скорости:

$$|\Delta\vec{v}_t| = \Delta|\vec{v}| = \Delta v.$$

Введя единичный вектор $\vec{t}$, совпадающий по направлению с вектором $\Delta\vec{v}_t$, последний можно представить в следующем виде:

$$\Delta\vec{v}_t = \Delta v\cdot\vec{t}\,' . \qquad /6\text{–}5/$$

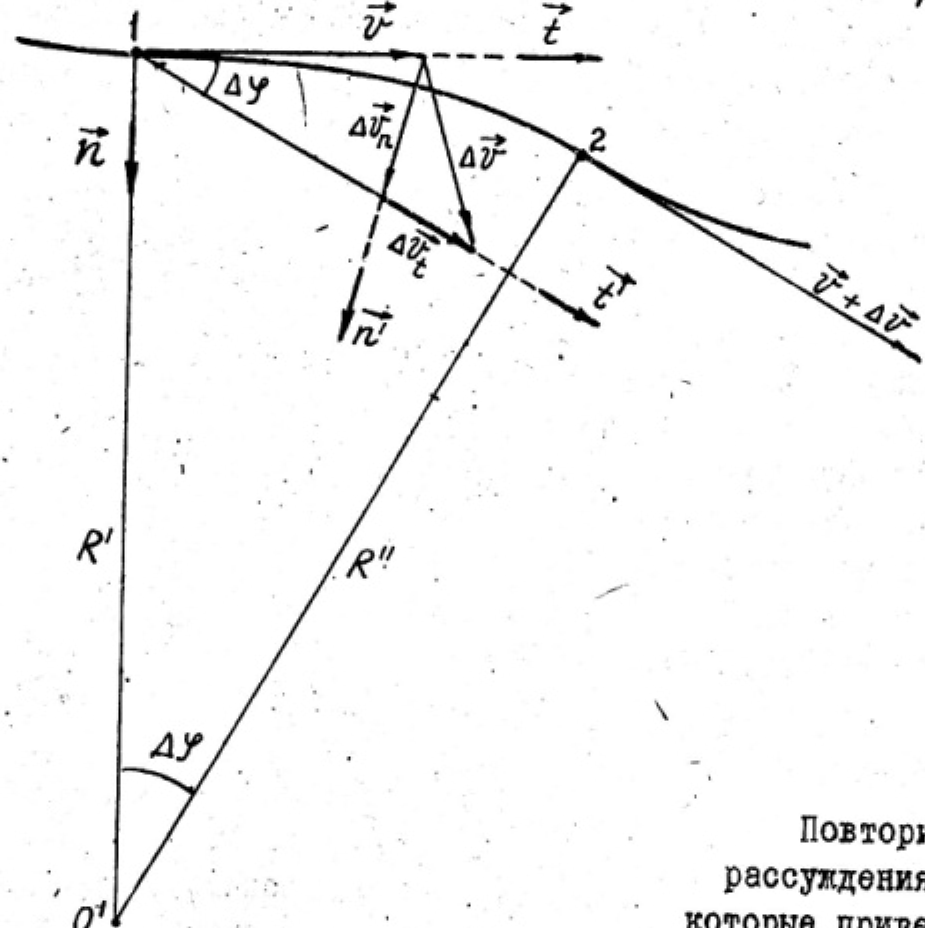


Рис. 36

Повторив рассуждения, которые привели нас к формуле /6–2/, можно получить, что

$$\Delta\vec{v}_n = v\cdot\frac{\Delta S}{R'}\cdot\vec{n}\,' . \qquad /6\text{–}6/$$

Вектор полного ускорения по определению равен:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} .$$

С учетом /6–6/:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R'}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t}\cdot\vec{n}\,' .$$

В пределе $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ даст модуль скорости v, R' – радиус кривизны R, а вектор $\vec{n}'$ совпадет с $\vec{n}$ единичным вектором нормали к траектории в точке I. Обозначим этот предел $\vec{w}_n$:

$$\vec{w}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} . \qquad /6\text{-}7/$$

Второй предел /обозначим его $\vec{w}_t$ / с учетом /6-5/ равен:

$$\vec{w}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \vec{t}' .$$

При переходе к пределу вектор $\vec{t}'$ совпадет с вектором $\vec{t}$ – единичным вектором, совпадающим с направлением касательной к траектории в точке I. Этот вектор направлен в сторону движения и тождественен с единичным вектором скорости $\vec{v}$. Поэтому он может быть записан в виде /см.(2-2) /:

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v} .$$

Окончательно:

$$\vec{w}_t = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) \cdot \vec{t} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} . \qquad /6\text{-}8/$$

Таким образом вектор $\vec{w}$ может быть представлен в виде суммы двух векторов $\vec{w}_n$ и $\vec{w}_t$ /см.рис. 37/, один из которых / $\vec{w}_n$ / перпендикулярен вектору скорости $\vec{v}$ и направлен к центру кривизны траектории, а второй / $\vec{w}_t$ / направлен по касательной к траектории, либо в направлении движения, если скорость растет по величине / $\frac{dv}{dt}$ положительно/, либо в сторону, противоположную направлению движения, если скорость по величине убывает / $\frac{dv}{dt}$ отрицательно/.

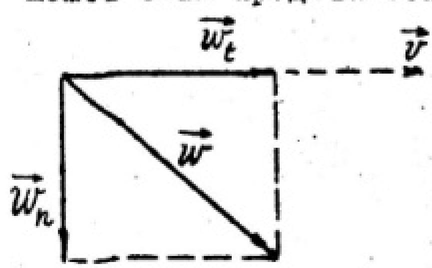


Рис. 37

Вектор $\vec{w}_t$ называют тангенциальным ускорением. Он характеризует изменение скорости по величине. Если скорость по величине не изменяется, тангенциальное ускорение равно нулю. В этом случае

$$\vec{w} = \vec{w_n} .$$

Вектор $\vec{w_n}$ /нормальное ускорение/ характеризует изменение скорости по направлению. Если направление скорости не изменяется, движение происходит по прямолинейной траектории. Кривизна прямой равна нулю /радиус кривизны R соответственно равен бесконечности/, следовательно в этом случае /см. (6-7) / нормальное ускорение равно нулю и

$$\vec{w} = \vec{w_t} .$$

В общем случае модуль полного ускорения равен /см. рис. 37/:

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} .$$

§ 7. Кинематика вращательного движения

Все точки абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси OO /см. рис. 38/ движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения. Радиус-вектор каждой точки /вектор, проведенный из центра соответствующей окружности в данную точку/ поворачивается за время Δt на один и тот же угол $\Delta\varphi$. Этот угол представляет собой угол поворота твердого тела.

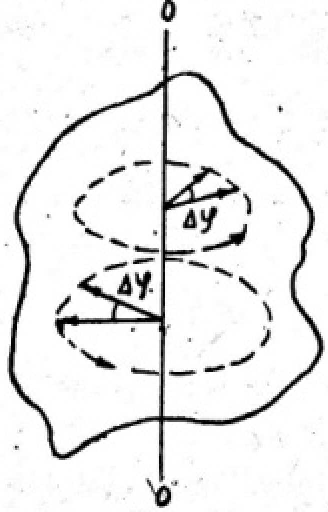


Рис. 38

Если за равные, сколь угодно малые промежутки времени Δt тело поворачивается на одинаковые углы $\Delta\varphi$, вращение называется равномерным.

Величину

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad /7\text{-}1/$$

показывающую, на какой угол поворачивается тело за единицу времени, называют угловой скоростью тела.

Время, за которое тело делает один оборот, то есть поворачивается на угол 2π, называется периодом обращения T. Поскольку промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует угол поворота $\Delta\varphi = 2\pi$,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{или} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad /7\text{-}2/$$

Число оборотов в единицу времени ν, очевидно, равно:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad /7\text{-}3/$$

Таким образом, угловая скорость равна 2π, умноженным на число оборотов:

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad /7\text{-}4/$$

При неравномерном вращении за одинаковые промежутки времени Δt тело поворачивается на различные углы $\Delta\varphi$. В этом случае выражение /7-I/ дает среднее значение угловой скорости за промежуток времени Δt.

Мгновенное значение угловой скорости определяется аналогично мгновенному значению линейной[1] скорости:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad /7\text{-}5/$$

Величина

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad /7\text{-}6/$$

называется угловым ускорением[2].

[1] Чтобы отличить ранее рассмотренную нами скорость $\vec{v}$ от угловой скорости, мы будем называть первую скорость линейной. В дальнейшем, в случаях, когда это не сможет привести к недоразумениям, слово "линейная" мы будем опускать.

[2] Такое определение годится только в случае, если направление оси вращения в пространстве не изменяется.

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости $\vec{v}$. Скорость каждой из точек, будучи направлена по касательной к соответствующей окружности, непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости v определяется скоростью вращения тела ω и расстоянием r рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ /см. рис. 39/. Точка, находящаяся на расстоянии r от оси, проходит при этом путь ΔS, равный:

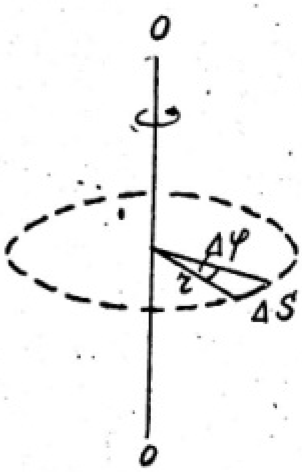


Рис. 39

$$\Delta S = r\cdot\Delta\varphi.$$

Линейная скорость точки по определению будет равна:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0} r\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=r\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=r\frac{d\varphi}{dt}=r$$

то есть

$$v=\omega r \qquad /7\text{-}7/$$

/ r можно было вынести за знак предела, потому что оно постоянно/.

Таким образом, чем дальше отстоит точка от оси вращения, тем с большей линейной скоростью она движется.

Найдем линейное ускорение точек вращающегося тела. Нормальное ускорение согласно /6-4/ равно:

$$w_n=\frac{v^2}{r}.$$

Подставляя в это выражение v из /7-7/, находим, что

$$w_n = r\omega^2. \qquad /7\text{-}8/$$

Тангенциальное ускорение в соответствии с /6-8/ равно $\frac{dv}{dt}$. Воспользовавшись опять уравнением /7-7/, получаем:

$$w_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(r\omega)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} r \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r\beta ,$$

то есть

$$w_t = r\beta. \qquad /7\text{-}9/$$

Таким образом, как нормальное, так и тангенциальное ускорение растет линейно с r-расстоянием точки от оси вращения.

Угловую скорость можно рассматривать, как вектор, величина которого равна $\dot{\varphi}$, а направление совпадает с осью вращения /см.рис. 40/. Основанием для этого служит то обстоятельство, что, как можно показать, сложное движение, состоящее из одновременных вращений вокруг двух различных осей со скоростями ω_1 и ω_2, равнозначно вращению с угловой скоростью ω, величина и направление которой могут быть получены из ω_1 и ω_2 по правилу векторного сложения:

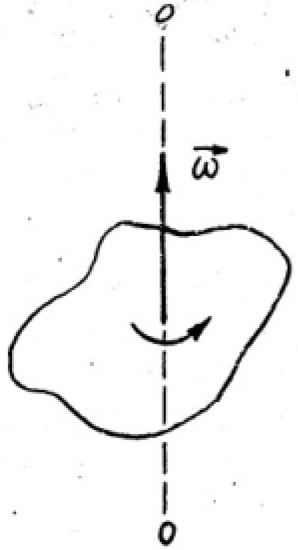


Рис. 40

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 .$$

Вектор $\vec{\omega}$ можно направить по оси вращения двояким способом /см.рис.41, на котором показана только одна из точек вращающегося тела, обозначенная буквой M /. Из двух возможных направлений выбирается то, которое связано с направлением вращения так называемым правилом правого винта: направление $\vec{\omega}$ выбирается так, чтобы, глядя вслед вектору, вращение представлялось происходящим по

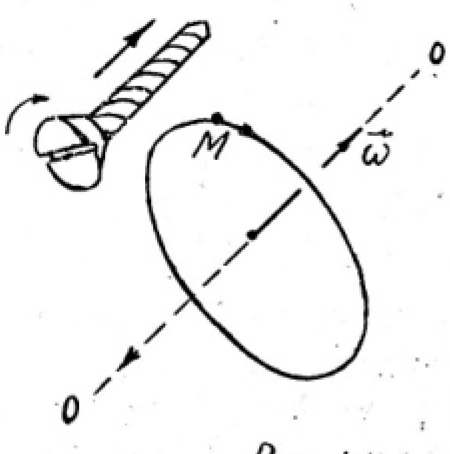


Рис. 41

часовой стрелке /вращая головку правого винта по часовой стрелке, мы вызовем его перемещение от себя/.

Определенный таким образом вектор $\vec{\omega}$ дает ось вращения, направление вращения и величину угловой скорости ω.

При рассмотрении таких векторов, как вектор перемещения, радиус-вектор, вектор линейной скорости и вектор ускорения, не возникал вопрос о выборе их направления. В перечисленных случаях направление векторов определялось естественно характером самих величин. Введенный нами вектор $\vec{\omega}$ представляет собой вектор иного типа, чем предыдущие. Векторы типа $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ и т.д. называются полярными векторами. Векторы типа $\vec{\omega}$, направление которых связывается с направлением вращения /или обхода/, называются аксиальными векторами.

Принимая во внимание, что вектор угловой скорости может изменяться как за счет изменения скорости вращения $\dot{\varphi}$, так и вследствие изменения направления оси вращения, угловое ускорение следует определить следующим образом:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} . \qquad /7\text{-}10/$$

В частном случае неизменного направления оси вращения $|\Delta\vec{\omega}| = \Delta\omega$, вследствие чего

$$\beta = |\vec{\beta}| = \frac{d\omega}{dt} ,$$

что совпадает с определением /7-6/.

Вектор углового ускорения, как и вектор угловой скорости, является аксиальным вектором.

§ 8. Векторное произведение векторов

Кроме рассмотренных ранее операций сложения и вычитания векторов, а также умножения вектора на скаляр /см. § 2/, существуют также операции перемножения векторов. Два вектора можно умножить друг на друга двумя способами: первый способ дает в результате некоторый новый вектор,

1098-1000

второй – приводит к скалярной величине. Отметим, что операции деления вектора на вектор не существует.

Сейчас мы рассмотрим векторное произведение векторов. Скалярное произведение векторов мы введем позднее, когда оно нам понадобится.

Векторным произведением двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется вектор $\vec{C}$, обладающий следующими свойствами:

I/ модуль вектора $\vec{C}$ равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла α между ними /см.рис.42/:

$$C = AB\sin\alpha;$$

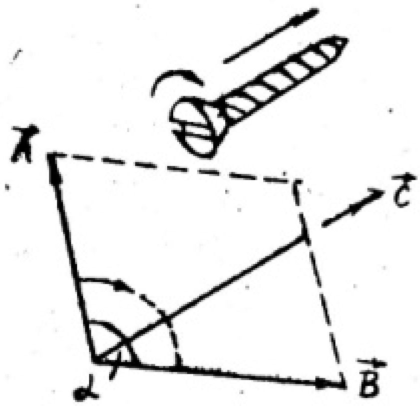


Рис. 42

2/ вектор $\vec{C}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$, причем направление его связано с направлениями $\vec{A}$ и $\vec{B}$ по правилу правого винта: если смотреть вслед вектору $\vec{C}$, то совершаемый по кратчайшему пути поворот от первого сомножителя ко второму осуществляется по часовой стрелке.

Из определения следует, что векторное произведение представляет собой аксиальный вектор.

Символически векторное произведение можно записать двумя способами:

I/ $\vec{A} \times \vec{B}$ или 2/ $[\vec{A}\vec{B}]$.

Не следует применять одновременно косой крест и квадратные скобки: $[\vec{A} \times \vec{B}]$. Такая запись столь же курьезна, как и одновременное использование косого креста и точки в произведении алгебраических величин: $a \times\!\cdot\, b$.

Недопустима запись такого вида: $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\alpha$. Слева здесь стоит вектор, справа – модуль этого вектора, то есть скаляр. Справедливо следующее равенство:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\alpha. \qquad /8\text{-}I/$$

Поскольку направление векторного произведения определяется направлением вращения от первого сомножителя ко второму, результат векторного перемножения двух векторов зависит от порядка сомножителей. Изменение порядка сомножителей вызывает изменение направления результирующего вектора на противоположное /см. рис. 43/:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B})$$ [1)]

или

$$[\vec{B}\,\vec{A}] = -[\vec{A}\,\vec{B}].$$

Таким образом, векторное произведение не обладает свойством коммутативности.

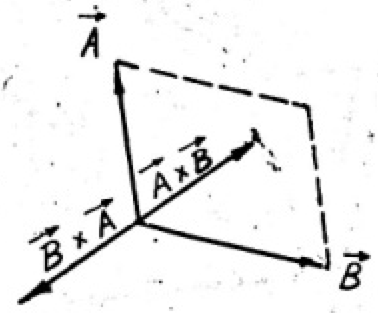


Рис. 43

Модулю векторного произведения можно дать простую геометрическую интерпретацию: выражение AB $\sin\alpha$ численно равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$ /см. рис. 44. Вектор $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ направлен в этом случае перпендикулярно плоскости чертежа, за чертеж/.

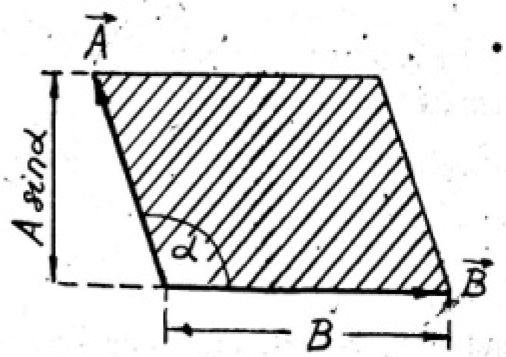


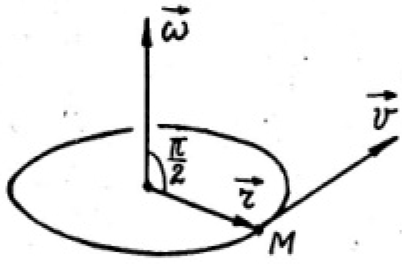
Рис. 44

Уравнение /7-7/ устанавливает связь между модулями векторов $\vec{v}$, $\vec{r}$ и $\vec{\omega}$. С помощью векторного произведения может быть написано выражение, дающее соотношение между самими векторами. В самом деле, векторное произведение $\vec{\omega}$

1/ Круглые скобки выполняют такую же роль, как и в алгебре - они указывают последовательность операций, производимых над векторами. В данном случае они указывают на то, что знак "-" относится ко всему выражению $\vec{A} \times \vec{B}$.

I098-I00

на $\vec{r}$ /см. рис. 45/ представляет собой вектор, совпадающий по направлению с вектором $\vec{v}$ и имеющий модуль, равный ωr /$\sin\alpha = 1$/, то есть v. Таким образом, векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{r}$ и по направлению, и по модулю равно вектору $\vec{v}$:



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad /8\text{-}2/$$

Рис. 45

Примеры и упражнения

I. Даны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ /см. рис. 46/, равные по модулю и друг другу перпендикулярные:

$$A = B \quad ; \quad \sin\alpha = 1.$$

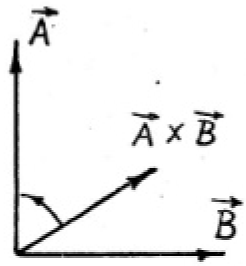


Рис. 46

Найдем, чему будет равно следующее выражение:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{A}.$$

Скобки указывают, что сначала нужно умножить $\vec{A}$ на $\vec{B}$, а затем получившийся вектор умножить на $\vec{A}$.

Вектор $\vec{A} \times \vec{B}$ имеет модуль $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB = A^2 = B^2$ и направлен за чертеж. В результате умножения этого вектора на $\vec{A}$ получится вектор, равный по модулю AB. $A = A^3 = B^3$ и имеющий то же направление, что и $\vec{B}$. Поэтому:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{A} = A^2\vec{B} = AB \cdot \vec{B} = B^2\vec{B}.$$

Рекомендуется убедиться в правильности следующих соотношений:

$$\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = -B^2\vec{B},$$
$$(\vec{B} \times \vec{A}) \times \vec{A} = -B^2\vec{B},$$
$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{B} = -A^2\vec{A}.$$

2. Даны три взаимно перпендикулярные вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ с равными модулями /см. рис. 47/:

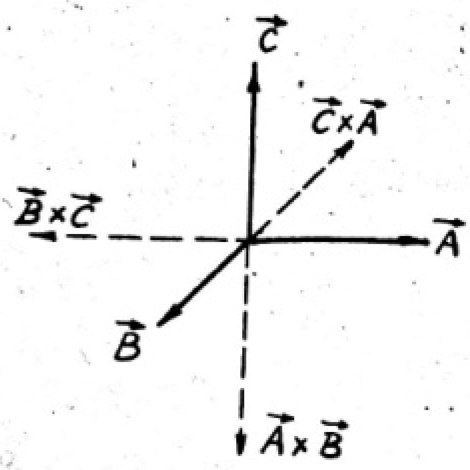


Рис. 47

$$A = B = C.$$

Показать, что

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = 0,$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{A}) = A^3\vec{A},$$
$$(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{A}\times\vec{B}) = B^3\vec{B},$$
$$(\vec{C}\times\vec{A})\times(\vec{B}\times\vec{C}) = C^3\vec{C}.$$

1098-1000

Глава П. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 9. Классическая механика. Границы ее применимости

Кинематика дает описание движения тел, не затрагивая вопроса о том, почему тело движется именно так /например, равномерно по окружности, или равномерно ускоренно по прямой/, а не иначе.

Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами /взаимодействиями между телами/, которые обусловливают тот или иной характер движения.

В основе так называемой классической или ньютоновской механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в 1687 году.

Законы Ньютона /как и любой другой физический закон/ возникли в результате обобщения большого количества опытных факторов. Правильность их /правда, хотя и для очень обширного, но все же ограниченного круга явлений/ подтверждается согласием с опытом тех следствий, которые из них вытекают.

Успехи, достигнутые ньютоновской механикой в течение двух столетий, были столь велики, что многие физики XIX столетия были убеждены в ее всемогуществе. Считалось, что объяснить любое физическое явление означает свести его к механическому процессу, подчиняющемуся законам Ньютона. Однако с развитием науки были открыты новые факты, которые не укладывались в рамки классической механики. Эти факты получили свое объяснение в новых теориях – в частной теории относительности и в квантовой механике.

В частной теории относительности, сформулированной Эйнштейном в 1905 году, подверглись радикальному пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привел к созданию "механики больших скоростей" или, как ее называют, релятивистской механики. Эта новая механика не привела, однако, к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнения релятивистской механики в пределе /для скоростей, малых по сравнению со скоростью света/ переходят в уравнения классической механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как ее частный случай и сохранила свое прежнее значение для описания движений, происходящих со скоростями, значительно меньшими скорости света.

Аналогично обстоит дело и с соотношением между классической и квантовой механикой, возникшей в 20-х годах нашего века в результате развития физики атома. Уравнения квантовой механики также дают в пределе /для масс больших по сравнению с массами атомов/ уравнения классической механики. Следовательно, классическая механика вошла и в квантовую механику в качестве ее предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а лишь показало ее ограниченную применимость. Классическая механика, то есть механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших /по сравнению с массой атомов/ масс, движущихся с малыми /по сравнению со скоростью света/ скоростями.

§ 10. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета

Первый закон Ньютона формулируется следующим образом: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со

 1098-1000

с т о р о н ы   д р у г и х   т е л   н е   з а с т а в и т   е г о   и з м е н и т ь   э т о   с о с т о я н и е . Оба названные состояния отличаются тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: скорость любого тела остается постоянной /в частности, равной нулю/, пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменения.

Следует отметить, что тел, не подвергающихся в той или иной степени воздействию со стороны других тел, в природе не существует. В наблюдаемых на практике случаях покоя тел или их равномерного и прямолинейного движения мы имеем дело с телами, воздействия на которые со стороны других тел уравновешивают друг друга. Например, книга, лежащая на столе, испытывает воздействие /притяжение/ со стороны Земли, а также воздействие /давление/ со стороны стола, причем оба эти воздействия уравновешивают друг друга, в результате чего книга покоится.

Утверждение, содержащееся в первом законе, является отнюдь не очевидным. До Галилея /1564-1642/ считали, что воздействие необходимо не для изменения скорости, а для поддержания ее неизменной. Такое мнение основывалось на таких известных из повседневной жизни фактах, как необходимость толкать непрерывно тележку, катящуюся по ровной горизонтальной дороге, для того, чтобы ее движение не замедлялось. Теперь мы знаем, что, толкая тележку, уравновешиваем воздействие, оказываемое на нее вследствие трения. Однако, если это не осознавать в достаточной степени, легко прийти к выводу, что воздействие обусловливает скорость, а не ее изменение /то есть ускорение/.

Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета. Мы уже отмечали /см. Введение/, что характер движения данного тела может оказаться различным в разных системах отсчета. В самом деле, рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно, очевидно, будет двигаться с ускорением. Следовательно, первый закон

Ньютона не может выполняться одновременно в обеих системах.

Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется **инерциальной** системой отсчета. Сам закон называют иногда законом инерции. Система отсчета, в которой первый закон Ньютона не выполняется, называется неинерциальной системой отсчета.

Инерциальных систем существует бесконечное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно /то есть с постоянной скоростью/, будет в свою очередь инерциальной системой. Это вытекает из правила сложения скоростей. Рассмотрим движение точки М в двух системах отсчета:

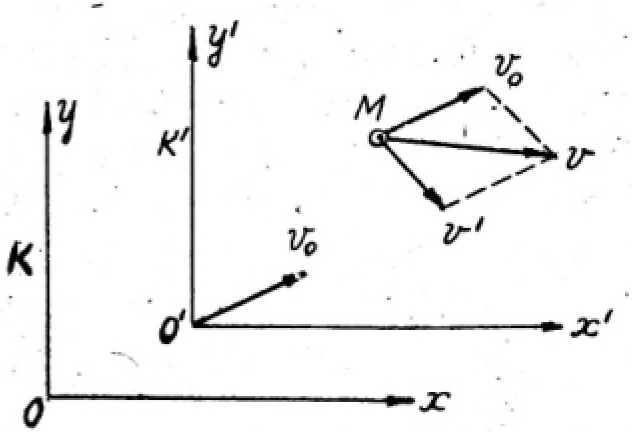


Рис. 48

$K(xoy)$ и $K'(x'o'y')$ /см. рис. 48/. Пусть система K' движется относительно системы К с постоянной скоростью $\vec{v_0}$. Обозначим скорость точки М относительно системы K' символом $\vec{v}'$. Движение этой точки относительно системы К будет слагаться из двух движений: движения вместе с системой K', происходящего со скоростью $\vec{v_0}$, и движения относительно системы K', происходящего со скоростью $\vec{v}'$. Скорость точки относительно систем К будет, следовательно, равна $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{v}'$, откуда вытекает, что

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v_0} .$$

Так как по условию $\vec{v_0}$ является постоянной, то из постоянства скорости $\vec{v}$ вытекает постоянство скорости $\vec{v}'$. Таким образом, если система К будет инерциальной, то есть тело, внешние воздействия на которое уравновешивают друг друга, движется относительно нее без ускорения, то и система К' оказывается инерциальной, так как и по отношению к ней то же тело будет двигаться без ускорения.

Опытным путем установлено, что система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, является инерциальной. Эта система называется гелиоцентрической системой отсчета /гелиос - по-гречески солнце/.

Из сказанного выше следует, что любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, будет инерциальной.

Земля движется относительно Солнца и звезд по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение, как мы знаем, всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. Все это обусловливает то обстоятельство, что система отсчета, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета и, следовательно, не является инерциальной. Однако ускорение такой системы настолько мало, что в большом числе случаев ее можно считать практически инерциальной. Вместе с тем, в отдельных случаях неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, оказывает существенное влияние на характер рассматриваемых относительно нее механических явлений. Некоторые из таких случаев мы рассмотрим впоследствии.

§ II. Второй закон Ньютона

Во втором законе Ньютона фигурируют две новые физические величины: сила и масса. Сила дает количественную характеристику и направление воздействия, оказываемого на данное тело со стороны других тел. Масса дает количественную характеристику "отзывчивости" данного тела на эти воздействия.

Как уже указывалось во Введении, воздействие, оказываемое на некоторое тело, может вызвать явления двоякого рода: изменить скорость тела, или вызвать его деформацию /то есть изменение его размеров и формы/.

Поскольку оба эти эффекта /и ускорение, и деформация/ поддаются измерению, любой из них может быть использован для количественной оценки воздействий, то есть для сравнения и измерения сил.

Рассмотрим следующий эксперимент. Возьмем пружину, закрепленную неподвижно в верхнем конце. К нижнему концу пружины подвесим какой-либо груз /см. рис. 49/. Под воздействием этого груза /и того тела, к которому прикреплен верхний конец пружины/ она получит некоторое удлинение, в результате чего указатель, прикрепленный к пружине, сместится на неподвижной шкале от отметки 0 до отметки I. Подберем несколько грузов, одинаковых в том отношении, что каждый из них, взятый в отдельности, вызывает одинаковое удлинение пружины. Тогда можно утверждать, что каждый из этих грузов, будучи подвешен к пружине, оказывает на нее одинаковое воздействие, которое можно охарактеризовать как действие на конец пружины силы определенной величины.

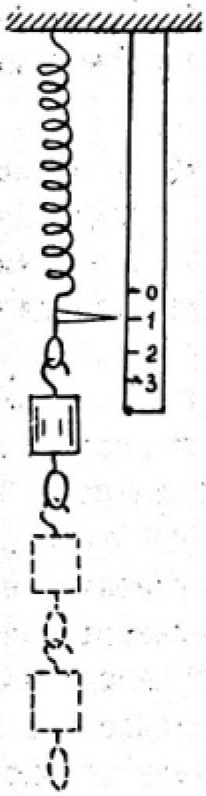


Рис. 49

Теперь подвесим к пружине сразу два таких груза. Каждый из них оказывает воздействие, одинаковое не только по величине, но и по направлению. Очевидно, что в этом случае воздействие на пружину будет в два раза больше. Поэтому можно утверждать, что сила, действующая на пружину, будет также в два раза больше. Как показывает опыт, и удлинение пружины в этом случае оказывается в два раза больше. Три равных груза вызывают при одновременном воздействии утроенную деформацию пружины и т.д.

Следовательно, удлинение пружины оказывается пропорциональным действующей на нее силе. Правда, этот закон, носящий название закона Гука, справедлив только в в случае не слишком больших деформаций. Когда величина деформации превышает некоторый, определенный для каждой конкретной пружины предел, пропорциональность между силой и деформацией перестает соблюдаться[1].

Таким образом, мы получили способ количественного сравнения сил: отношение величин двух сил равно отношению упругих деформаций пружины, вызываемых действием этих сил.

Теперь исследуем вопрос, как зависит ускорение тела от величины действующей на него силы. Для этого воспользуемся следующим опытом. Возьмем тележку на гладком горизонтальном столе /см.рис. 50/ и будем изучать ее движение под действием нити, натянутой грузом. Между тележкой и нитью вставим пружину, по растяжению которой можно оценивать силу воздействия. Направление воздействия, очевидно, задается направлением нити. Подвешивая к нити разные грузы, можно варьировать силу, под действием которой происходит движение.

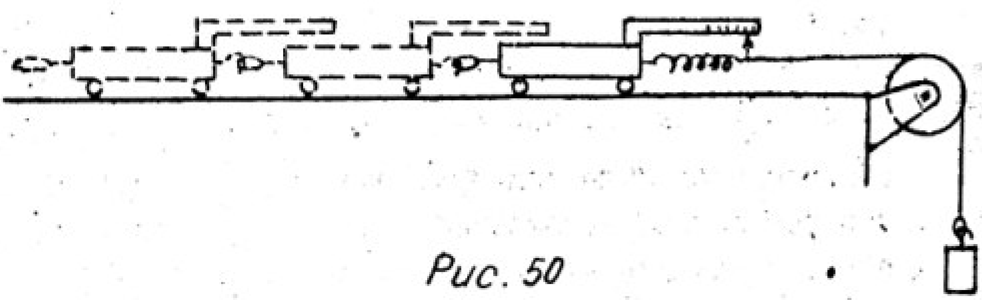


Рис. 50

Результаты подобного опыта можно суммировать следующим образом. Если натяжение пружины не изменяется, тележка движется равномерно-ускоренно, причем ускорение w пропорционально приложенной силе f :

$$w \sim f. \qquad /II-I/$$

I/ Деформация, подчиняющаяся закону Гука, называется упругой деформацией.

Следует иметь в виду, что наличие трения между колесиками тележки и осью, а также колесиками и столом будет искажать полученный результат. Однако по мере уменьшения трения, мы все больше будем приближаться к указанному выше соотношению.

Установленная нами закономерность дает в наше распоряжение еще один способ количественного сравнения сил: отношение двух сил f_1 и f_2 можно найти, определив ускорения w_1 и w_2, приобретаемые каким-либо телом под действием этих сил:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{w_1}{w_2}. \qquad /II-2/$$

Если взять другую тележку, то хотя характер движения и соотношение между силой и ускорением для нее останутся теми же, ускорение ее при той же величине силы f, вообще говоря, будет иным по величине. Это объясняется тем, что разные тележки обладают различной "неподатливостью" действию силы, или, как говорят, различной инерцией.

Мерой инертности тела является масса. Очевидным свойством массы является ее аддитивность; это означает, что масса тела равна сумме масс отдельных его частей.

Возьмем несколько тележек, одинаковых в том отношении, что ускорения, сообщаемые им равными силами, одинаковы по величине /предполагается, что трение пренебрежимо мало/. Такие тележки, очевидно, обладают равными массами m. Соединим две тележки в одну /см.рис.50/. Масса такой составной тележки в силу аддитивности массы будет равна $2m$.

Опыт дает, что ускорение двух соединенных тележек под действием некоторой силы f в два раза меньше, чем ускорение каждой из тележек, взятой в отдельности. Если соединить три одинаковых тележки, ускорение оказывается в три раза меньше и т.д. Следовательно, при неизменной по величине силе ускорение обратно пропорционально массе тела:

$$w \sim \frac{1}{m}. \qquad /II-3/$$

Отсюда вытекает способ сравнения масс: отношение масс двух тел m_1 и m_2 равно обратному отношению ускорений w_1 и w_2, сообщаемых этим телам равными силами:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w_2}{w_1}.[1] \qquad /II-4/$$

Объединяя выражения /II-I/ и /II-3/, получаем, что

$$w = k \cdot \frac{f}{m}, \qquad /II-5/$$

где k - коэффициент пропорциональности.

Соотношение /II-5/ выполняется, как показывает опыт, для любого тела и представляет собой содержание второго закона Ньютона.

Итак, второй закон Ньютона формулируется следующим образом: **у с к о р е н и е в с я к о г о т е л а п р я м о п р о п о р ц и о н а л ь н о д е й с т в у ю щ е й н а н е г о с и л е и о б р а т н о п р о п о р ц и о н а л ь н о м а с с е т е л а** . Этот закон, как и первый закон Ньютона, справедлив только в инерциальных системах отсчета.

В частном случае силы, равной нулю /при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел/ ускорение, как следует из /II-5/, также будет равно нулю. Этот результат совпадает с утверждением первого закона Ньютона. Таким образом, первый закон входит во второй закон как его частный случай.

I/ Это соотношение можно положить в основу определения массы, то есть определить массу как физическую величину, обратно пропорциональную ускорению, приобретаемому телом под действием силы. Тогда рассмотренный нами опыт с тележками будет доказывать, что определенная указанным способом масса обладает свойством аддитивности.

Воздействие одних тел на другие имеет направленный характер. Следовательно, и сила является величиной, характеризующейся, кроме численного значения, также и направлением. Однако этого еще недостаточно для того, чтобы отнести силу к категории векторов. Необходимо еще выяснить, какому закону сложения подчиняются силы. Для этого проделаем опыт с тележкой, подвергнутой действию двух натянутых нитей /см.рис.5I, на котором дан вид на тележку сверху/. Опыт подобного рода дает, что ускорение тележки под действием сил $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ имеет такую же величину и направление, как и в случае действия лишь одной силы $\vec{f}$, получающейся из сил $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ по правилу сложения векторов. Следовательно, сила есть векторная величина.

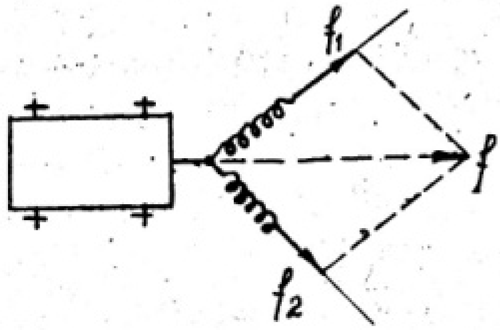


Рис. 51

Поскольку сила есть вектор и направление ускорения совпадает с направлением силы, уравнение /II-5/ можно написать в векторном виде:

$$\vec{w} = k\frac{\vec{f}}{m} \qquad /II\text{-}6/$$

Масса m и коэффициент пропорциональности k - скалярные величины.

Уравнение /II-6/ является основным уравнением классической механики.

§ I2. Единицы измерения и размерности физических величин

Законы физики, как уже отмечалось, устанавливают количественные соотношения между физическими величинами. Для установления таких соотношений необходимо иметь возможность измерять различные физические величины.

Измерить какую-либо физическую величину /например, скорость/ означает сравнить ее с величиной того же вида /во взятом примере со скоростью/, принятой за единицу.

Вообще говоря, для каждой физической величины можно было бы установить единицу измерения произвольным образом, независимо от единиц измерения других величин. Однако оказывается, что можно ограничиться произвольным выбором единиц измерения для трех /в принципе любых/ величин, принятых за основные. Единицы же измерения всех прочих величин можно установить на основании трех основных единиц, воспользовавшись для этой цели физическими законами, связывающими соответствующую величину с основными величинами, или с величинами, для которых единицы уже установлены подобным образом.

Поясним сказанное следующим примером. Предположим, что мы уже установили единицы измерения для массы и ускорения. Соотношение /II-5/ связывает закономерным образом эти величины с третьей физической величиной - силой:

$$w = k\frac{f}{m}.$$

Выберем единицу измерения силы таким образом, чтобы коэффициент пропорциональности k в этом уравнении был равен единице. Тогда /II-5/ принимает более простой вид:

$$w = \frac{f}{m}. \qquad /12\text{-}1/$$

Из /12-1/ следует, что установленная нами единица силы представляет собой такую силу, под действием которой тело с массой, равной единице, получает ускорение, равное также единице [подстановка в /12-1/ f=1 и m=1 дает w=1].

Из рассмотренного примера видно, что при указанном способе выбора единиц измерения физические соотношения принимают более простой вид. Сама же совокупность единиц измерения образует при этом определенную систему.

Существует несколько систем единиц, отличающихся выбором основных единиц. Системы, в основу которых положены

1198-1000

единицы длины, массы и времени, называются абсолютными.

В СССР введен с I января 1956 г. государственный стандарт ГОСТ 7664-55, устанавливающий системы единиц для измерения механических величин. Допускается применение трех систем единиц:

I/ система МКС, основными единицами которой являются: единица длины - метр /сокращенное обозначение м/, единица массы - килограмм /кг/ и единица времени - секунда /сек/;

2/ система СГС, основными единицами которой являются: единица длины - сантиметр /см/, единица массы - грамм /г/ и единица времени - секунда /сек/;

3/ система МКГСС[1/], основными единицами которой являются: единица длины - метр /м/, единица силы - килограмм-сила /кгс или кГ/ и единица времени - секунда /сек/.

Согласно ГОСТу преимущественно должна применяться система МКС. Однако в физике применялась ранее и продолжает применяться в настоящее время в основном система СГС /ранее она обозначалась cgs/.

Системы МКС и СГС, как следует из их определения, являются абсолютными системами.

За единицу длины, называемую метром, принимается расстояние, при $0^{\circ}C$, между штрихами, нанесенными на платино-иридиевом[2/] стержне, хранящемся в Международном бюро мер и весов в Севре /близ Парижа/. Метр приближенно равен $\frac{I}{40\ 000\ 000}$ доле длины земного меридиана. Сантиметр равен $\frac{I}{100}$ метра.

I/ Эту систему называют обычно технической системой единиц.

2/ Сплав платины с иридием обладает большой твердостью и коррозионной устойчивостью /то есть мало подвержен химическому воздействию окружающей среды/.

За единицу массы, называемую килограммом, принимается масса платино-иридиевого тела, хранящегося в Международном бюро мер и весов. Масса этого эталона близка к массе 1000 куб.см чистой воды при 4°С. Грамм равен 1/1000 килограмма.

Секунда равна 1/86400 доле средних солнечных суток.

Единицы введенных нами в кинематике величин /скорости и ускорения/ являются производными от основных единиц. Так, за единицу скорости принимается скорость равномерно движущегося тела, проходящего в единицу времени /секунду/ путь, равный единице длины /сантиметру или метру/. Обозначается эта единица см/сек в СГС-системе и м/сек в МКС и МКГСС-системах.

За единицу ускорения принимается ускорение равномерно-переменного движения, при котором скорость тела за единицу времени /секунду/ изменяется на единицу /на см/сек или м/сек/. Обозначается эта единица см/сек^2 в СГС-системе и м/сек^2 в МКС и МКГСС-системах.

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду /рад/сек/, а угловое ускорение в радианах в секунду за секунду /рад/сек^2/.

Одна из основных единиц в МКГСС-системе - килограмм-сила определяется как сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение, равное 9,80665 м/сек^2.

Единица силы в СГС-системе называется диной /обозначается дин/. Согласно /12-1/ дина равна силе, под действием которой тело с массой 1 г получает ускорение 1 см/сек^2.

Единица силы в МКС-системе называется ньютоном /н/. Один ньютон равен силе, под действием которой тело с массой 1 кг получает ускорение 1 м/сек^2.

Из определения килограмма-силы следует, что

$$1 \text{ кгс} = 9{,}80665 \text{ н /приближенно } 9{,}81 \text{ н/.}$$

Между ньютоном и диной имеется следующее соотношение:

$$1 \text{ н} = 1 \text{ кг}\cdot 1 \text{ м/сек}^2 = 10^3 \text{г} \cdot 10^2 \text{ см/сек}^2 = 10^5 \text{ дин.}$$

За единицу массы в системе МКГСС согласно /I2-I/ должна быть принята масса такого тела, которое под действием силы в I кгс получает ускорение I м/сек^2. Эта единица обозначается кгс.сек^2/м, специального наименования она не имеет. Очевидно, что I кгс.сек^2/м = 9,80665 кг /приближенно 9,81 кг/.

Из способа построения систем единиц следует, что изменение основных единиц влечет за собой изменение производных единиц. Если, например, за единицу времени принять вместо секунды минуту, то есть увеличить единицу времени в 60 раз, то единица скорости уменьшится в 60 раз /скорость в I м/мин в 60 раз меньше скорости в I м/сек/, а единица ускорения уменьшится в 60·60 = 3600 раз /ускорение в I м/мин^2 в 3600 раз меньше, чем ускорение в I м/сек^2/.

Соотношение, показывающее, как изменяется единица измерения какой-либо величины при изменении основных единиц, называется размерностью этой величины. Для обозначения размерности произвольной физической величины используется ее буквенное обозначение, взятое в квадратные скобки. Так, например, символ $[v]$ означает размерность скорости. Для размерностей основных величин используются специальные обозначения: для длины L, для массы M и для времени T. Таким образом, обозначив длину буквой ℓ, массу буквой m и время буквой t, можно написать:

$$[\ell]=L;\quad [m]=M;\quad [t]=T.$$

В указанных обозначениях размерность произвольной физической величины имеет вид $L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}$ /α; β и γ могут быть как положительными, так и отрицательными, в частности они могут равняться нулю/. Эта запись означает, что при увеличении единицы длины в n_1 раз единица данной величины увеличивается в n_1^{α} раз /соответственно число, которым выражается значение величины в этих единицах, уменьшается в n_1^{α} раз/, при увеличении единицы массы в n_2 раз единица данной величины увеличивается в n_2^{β} раз и, наконец, при увеличении единицы времени в n_3 раз единица данной величины увеличивается в n_3^{γ} раз.

Поскольку физические законы не могут зависеть от выбора единиц измерения фигурирующих в них величин, размерности обеих частей уравнений, являющихся выражением этих законов, должны быть одинаковы. Это условие может быть использовано, во-первых, для проверки правильности полученных физических соотношений и, во-вторых, для установления размерностей физических величин. Так, например, скорость определяется как $v=\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Размерность ΔS равна L, размерность Δt равна T. Размерность правой части написанного соотношения равна $[\Delta S]/[\Delta t]=L/T=LT^{-1}$. Размерность левой части, то есть размерность скорости должна быть такой же. Следовательно,

$$[v]=LT^{-1}. \qquad /12\text{-}2/$$

Написанное соотношение называется формулой размерности, а его правая часть – размерностью соответствующей величины /в данном случае скорости/.

В соответствии с /12-2/ при увеличении единицы времени в n раз единица скорости возрастает в $n^{-1}=\frac{1}{n}$ раз, то есть уменьшается в n раз, что уже отмечалось ранее.

На основании соотношения $w=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ можно установить размерность ускорения:

$$[w]=\frac{[\Delta v]}{[\Delta t]}=\frac{LT^{-1}}{T}=LT^{-2}.$$

Размерность силы должна быть равна размерности массы, умноженной на размерность ускорения:

$$[f]=[m][w]=M\cdot LT^{-2}=MLT^{-2}.$$

Подобным же образом устанавливаются размерности всех прочих величин.

§ 13. Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело M_1 воздействует на тело M_2

с некоторой силой $\vec{f}_{21}$, то и тело M_2, в свою очередь, воздействует на тело M_I с силой $\vec{f}_{12}$.

Как показывает опыт, силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, оказываются всегда равными по величине и противоположными по направлению. Рассмотрим следующий пример. Два тела с массами m_1 и m_2, изолированные от действия внешних тел, притягивают /или отталкивают/ друг друга вследствие того, например, что несут на себе электрические заряды /см. рис. 52-а/.

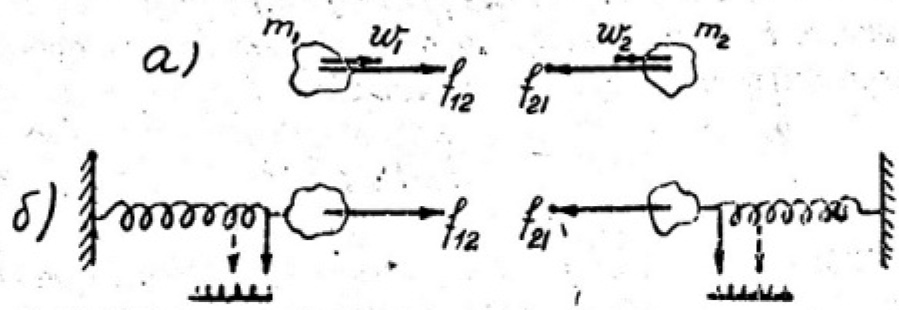


Рис. 52

Под действием сил $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$ тела приобретают ускорения $\vec{w}_1$ и $\vec{w}_2$ соответственно. Величина этих ускорений оказывается обратной массам тел:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

откуда следует равенство $m_1 w_1 = m_2 w_2$, а следовательно, и равенство сил $f_{12} = f_{21}$. Направления сил, очевидно, противоположны.

К тому же результату можно прийти, сопоставляя не ускорения тел, а растяжения калиброванных пружин, с помощью которых можно "привязать" взаимодействующие тела к неподвижным опорам /см.рис. 52-б/. В этом случае силы $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$, измеренные по деформации пружин, также оказываются одинаковыми по величине.

Третий закон Ньютона является обобщением опытных фактов подобного рода. В формулировке самого Ньютона он гласит, что "действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – действия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны". В этой формулировке фигурируют термины "действие" и "противодействие", вследствие чего может возникнуть представление о каком-то различии сил, с которыми тела действуют друг на друга. Скажем, "действию" невольно отводится главенствующая, а "противодействию" - подчиненная роль. На самом деле обе силы $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$ являются совершенно равноправными. Поэтому третий закон Ньютона лучше формулировать следующим образом: в с я к о е д е й с т в и е т е л д р у г н а д р у г а н о с и т х а р а к т е р в з а и м о д е й с т в и я ; с и л ы , с к о т о р ы м и д е й с т в у ю т д р у г н а д р у г а в з а и м о д е й с т в у ю щ и е т е л а , в с е г д а р а в н ы п о в е л и ч и н е и п р о т и в о п о л о ж н ы п о н а п р а в л е н и ю. Используя обозначения сил, примененные на рис. 52, содержание третьего закона можно записать в следующем виде:

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} . \qquad /13\text{-}1/$$

Из сказанного следует, что силы всегда возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-то телу, можно сопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к д р у г о м у телу, взаимодействующему с данным.

§ 14. Принцип относительности Галилея

Основное уравнение механики - уравнение /11-6/ - характерно тем, что из кинематических величин оно содержит только ускорение, скорость же в него не входит. Вместе с тем, ускорение какого-либо тела во всех инерциальных системах отсчета оказывается одним и тем же. В самом деле, если скорость в системе отсчета К обозначить через $\vec{v}$ /см. рис. 48/, а скорость в системе К$'$, движущейся относительно К со скоростью $\vec{v}_0$, обозначить через $\vec{v}'$, то, как было установлено в § 10,

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 .$$

Дифференцируя это уравнение по времени, с учетом того, что $\vec{v}_0$ постоянно, получим:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

В этом соотношении слева стоит ускорение $\vec{w}'$ тела в системе K', справа – ускорение $\vec{w}$ в системе К. Таким образом, ускорение данного тела во всех инерциальных системах отсчета /напомним, что системы К и K' были выбраны произвольным образом/ действительно оказывается одним и тем же. Отсюда по второму закону Ньютона и силы, действующие на тело в системах К и K', также будут одинаковы. По этой причине уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Эти уравнения, как говорят, инвариантны по отношению к преобразованию координат, соответствующему переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны: ни одной из них нельзя отдать предпочтение перед другими. Практически это проявляется в том, что никакими механическими опытами, проведенными в пределах данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли она в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Находясь, например, в вагоне поезда, движущемся без толчков прямолинейно и равномерно, мы, не выглянув в окно, не сможем определить, движется ли вагон или покоится. Свободное падение тел, движение брошенных нами тел и все другие механические процессы будут в этом случае происходить так же, как и в случае, если бы вагон был неподвижен.

Указанные обстоятельства были выяснены еще Галилеем.

Положение о том, что все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится ли данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно, носит название принципа относительности Галилея.

§ 15. Свободное падение тел. Масса и вес

Из повседневного опыта хорошо известно, что поднятое над поверхностью Земли и затем отпущенное тело падает со все возрастающей скоростью на Землю. Это обусловлено тем, что все тела притягиваются Землей /по третьему закону Ньютона все тела в свою очередь притягивают к себе Землю с такой же по величине силой, с какой они притягиваются к Земле/.

Под действием одной только силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым ускорением, которое принято обозначать буквой g . Наблюдаемое обычно различие в ускорении, с которым падают, например, дробинка и комок бумаги или ваты, вызвано тем, что при движении тел в воздухе возникает сила сопротивления среды, неодинаково влияющая на падение различных тел. Если же осуществить падение дробинки и комка бумаги в вакууме, например, в длинной стеклянной трубке, из которой предварительно откачан воздух, то оба таких тела будут падать с одинаковым ускорением и достигать конца трубки одновременно.

Для случая, когда сопротивлением воздуха можно пренебречь, легко определить скорость, с которой тело, падающее с высоты h , достигнет поверхности Земли. Если время падения обозначить через t , то скорость в конце падения будет равна [см. /5-5/; $v_0 = 0$] :

$$v = gt. \qquad /15\text{-}1/$$

За время падения тело пройдет путь h , который согласно /5-6/ можно представить в виде:

$$h = \frac{gt^2}{2}. \qquad /15\text{-}2/$$

Решая совместно уравнения /15-1/ и /15-2/, получим:

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad /15\text{-}3/$$

На первый взгляд может показаться, что сила, с которой тело притягивается Землей /мы будем ее называть силой тяжести и обозначать f_g /, равна произведению массы тела m на ускорение его свободного падения g . Однако это было бы справедливо только в том случае, если бы система отсчета, связанная с Землей, была инерциальной. На самом деле, как мы знаем, это не так. Из-за суточного вращения Земли все тела, находящиеся у ее поверхности, совершают равномерное движение по окружности, радиус которой r зависит от широты местонахождения тела φ /см.рис.53-а/:

$$r = R_з \cdot \cos\varphi,$$

где $R_з$ – радиус земного шара.

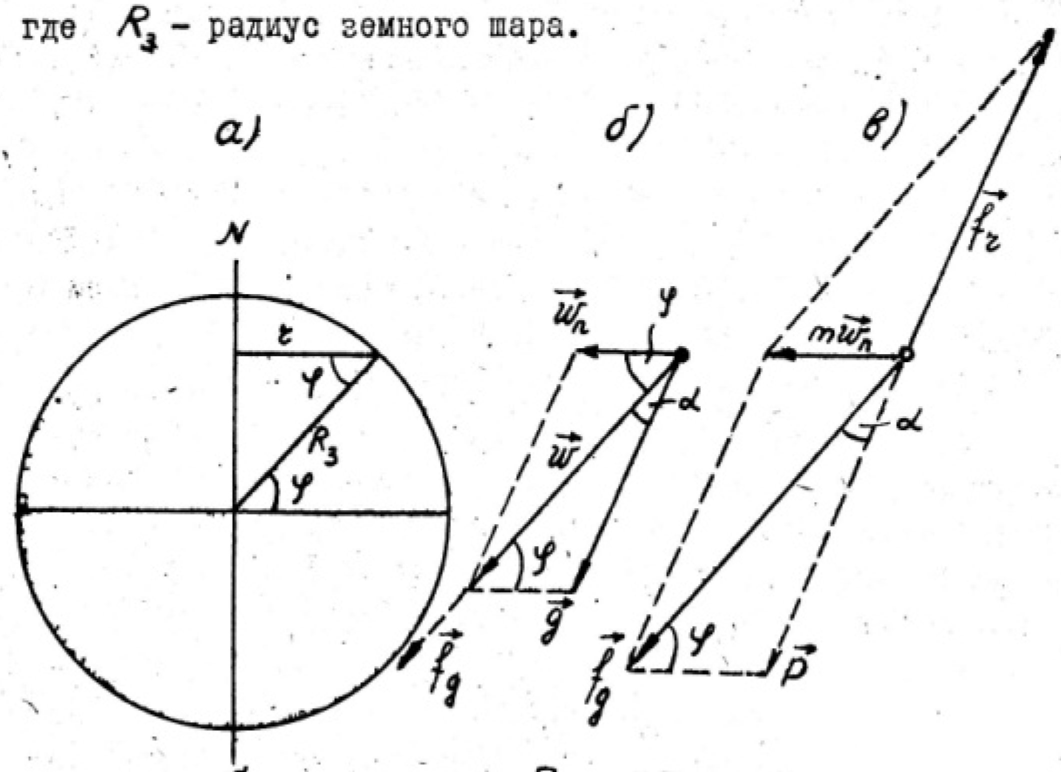


Рис. 53

Следовательно, независимо от того, покоится ли тело или падает на Землю, оно обладает составляющей ускорения:

$$w_n = \omega^2 r = \omega^2 R_з \cos\varphi \; , \qquad /15\text{-}4/$$

/ ω – угловая скорость вращения Земли/.

В случае свободного падения $\vec{w}_n$ обеспечивается только силой $\vec{f}_g$ /больше никаких сил на тело не действует/.

Таким образом, ускорение $\vec{w}$, сообщаемое телу силой $\vec{f_g}$, равно сумме ускорений $\vec{w_n}$ и $\vec{g}$ /см.рис.53-б/.

В случае, если тело покоится относительно Земли, будучи подвешено к опоре или положено на нее, ускорение $\vec{w_n}$ обеспечивается суммой двух сил: силы $\vec{f_g}$ и реакции[1/] подвеса или опоры $\vec{f_r}$ /см.рис.53-в/. Символом $\vec{P}$ на рисунке обозначена сила, с которой тело действует на подвес или опору / $\vec{P} = -\vec{f_r}$ /.

Косоугольные треугольники на рисунках б/ и в/ являются подобными: левый нижний угол у этих треугольников одинаков /он равен φ /, а стороны, образующие этот угол пропорциональны /вектор $\vec{f_g}$ в m раз больше $\vec{w}$/. Следовательно, и вектор $\vec{P}$ в m раз больше, чем вектор $\vec{g}$:

$$\vec{P} = m\vec{g}. \qquad /15\text{-}5/$$

Силу $\vec{P}$, с которой тело действует на неподвижный подвес или опору, называют весом тела.

Из рис. 53-в следует, что вес тела $\vec{P}$, как правило, несколько отличен от силы тяжести $\vec{f_g}$ по величине и по направлению. Это отличие, впрочем, невелико, так как w_n значительно меньше, чем g. В самом деле, $\omega^2 R_з$ приблизительно равно 3,5 см/сек^2 / ω равно 2π, деленным на 86400 сек, $R_з$ составляет примерно 6400 км или 6,4.10^8 см/, в то время как g равно примерно 980 см/сек^2, то есть почти в 300 раз больше, чем максимальное значение w_n.

Угол α между направлениями $\vec{f_g}$ и $\vec{P}$ можно оценить, воспользовавшись теоремой синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{w_n}{g} = \frac{\omega^2 R_з \cos\varphi}{g} \approx \frac{3,5}{980}\cos\varphi \approx 0,0035\cos\varphi,$$

1/ Реакцией подвеса /или опоры/ называется сила, с которой подвес /или опора/ действует на тело.

1098-1000

откуда

$$\sin\alpha \approx 0{,}0035 \sin\varphi\cos\varphi \approx 0{,}0018 \sin 2\varphi .$$

Синус малого угла можно приближенно заменить значением самого угла:

$$\alpha \approx 0{,}0018 \cdot \sin 2\varphi . \qquad /15\text{-}6/$$

Таким образом, в зависимости от широты φ угол α колеблется в пределах от нуля /на экваторе, где $\varphi = 0$, и на полюсах, где $\varphi = 90^\circ$/ до 0,0018 рад или $6'$ /на широте 45°/.

Направление $\vec{P}$ совпадает с направлением нити, натянутой грузом, которое называется направлением отвеса. Сила $\vec{f_g}$ имеет направление к центру Земли. Следовательно, направление отвеса совпадает с направлением к центру Земли только на полюсах и на экваторе, отклоняясь от него на промежуточных широтах на угол, определяемый выражением /15-6/.

Разность $f_g - P$ равна нулю на полюсах и достигает максимума, равного $m\omega^2 R_З$ на экваторе. Отметим, что из-за сплюснутости земного шара у полюсов сила тяжести f_g сама по себе несколько варьирует с широтой, будучи на экваторе примерно на 0,2% меньше, чем у полюсов. В итоге ускорение свободного падения g меняется с широтой в пределах от 978,0 см/сек^2 на экваторе до 983,2 см/сек^2 на полюсах. Значение g = 980,665 см/сек^2 принято в качестве нормального /стандартного/ значения.

Соотношение /15-5/ между массой и весом тела дает способ сравнения масс тел путем взвешивания: отношения весов тел, определенных в одной и той же точке земной поверхности, равно отношению масс этих тел:

$$P_1 : P_2 : P_3 : \ldots = m_1 : m_2 : m_3 : \ldots$$

Веса нужно брать для одной и той же точки земной поверхности, так как в противном случае будет нарушена пропорциональность между массой и весом: g в выражении /15-5/ для различных тел будет иметь неодинаковые значения.

Взвешивание, как известно, можно осуществить с помощью рычажных весов или пружинных. В случае рычажных весов требование одинаковости g выполняется автоматически, поскольку процесс взвешивания заключается в балансировке весов двух сопоставляемых тел. Пружинные весы позволяют в принципе определить веса сравниваемых тел на разных широтах /или высотах[1]/. В этом случае отношение весов отлично от отношения масс на множитель g'/g'' :

$$\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{g'}{g''}\right)\frac{m_1}{m_2},$$

где g' и g'' - значения g для мест, где было произведено взвешивание первого и второго тел соответственно. Следовательно, для того, чтобы с помощью пружинных весов найти правильное отношение масс нескольких тел, взвешивание всех этих тел нужно производить в одном и том же месте земной поверхности.

Весом тела мы назвали силу, с которой тело действует на неподвижный /относительно Земли/ подвес или опору. Условие, чтобы подвес или опора /а следовательно, и тело/ были неподвижны, является весьма существенным. Дело в том, что в случае их движения относительно Земли с некоторым ускорением $\vec{w}$, сила, с которой тело действует на опору или подвес, уже не будет равна $m\vec{g}$. Пусть подвес в виде пружины движется вместе с телом с ускорением $\vec{w}$ /см.рис. 54/. Напишем уравнение движения тела, причем пренебрежем небольшим различием между $\vec{P}$ и $\vec{f_g}$ и будем полагать силу, с которой тело притягивается к Земле, равной $\vec{P}$. Кроме того, пренебрежем составляющей

---

[1] Следует иметь в виду, что вес P и ускорение g зависят также от высоты над уровнем моря: с удалением от центра Земли сила f_g уменьшается.

ускорения $\vec{w}_n$ [см. /15-4/] и будем считать $\vec{w}$ полным ускорением тела[1/]. Тогда уравнение движения тела будет иметь следующий вид:

$$\vec{P} + \vec{f}_r = m\vec{w}, \qquad /15\text{-}7/$$

где $\vec{f}_r$ - реакция подвеса, то есть сила, с которой пружина действует на тело.

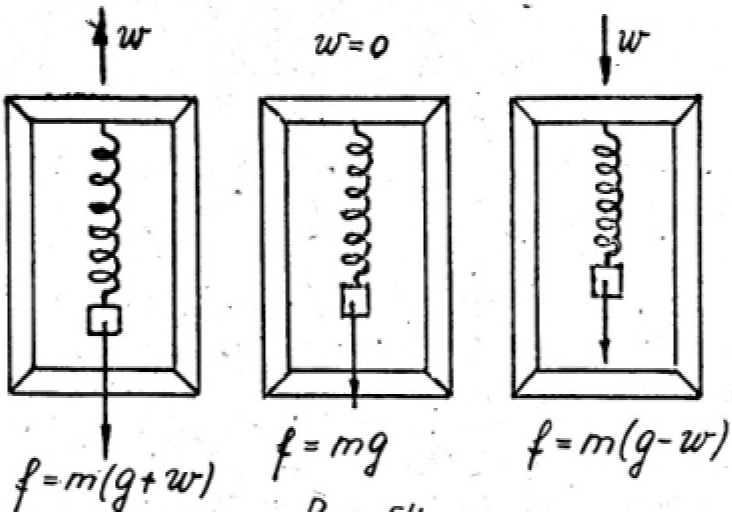


Рис. 54

По третьему закону Ньютона, тело действует на пружину с силой $\vec{f}=-\vec{f}_r$. Заменяя реакцию $\vec{f}_r$ силой $\vec{f}$ и учтя, что $\vec{P}=m\vec{g}$, уравнение /15-7/ можно написать в виде:

$$\vec{f} = \vec{P} - m\vec{w} = m(\vec{g} - \vec{w}). \qquad /15\text{-}8/$$

Таким образом, сила, с которой тело действует на пружину, оказывается равной весу тела $\vec{P} = m\vec{g}$ только тогда, когда подвес и тело покоятся /либо движутся относительно Земли прямолинейно и равномерно, то есть с $\vec{w} = 0$/.

[1/] Отметим, что погрешности, обусловленные этими допущениями, взаимно компенсируют друг друга, так что результат, к которому мы придем, оказывается точным. В этом можно убедиться, написав уравнение движения в точном виде и учтя, что $m\vec{w}_n=\vec{f}_g-\vec{P}$.

Этот результат, очевидно, справедлив для подвеса или опоры любого вида.

Предположим, что тело и подвес движутся вдоль линии отвеса /в этом предположении выполнен рис. 54/. Спроектируем /I5-8/ на направление отвеса:

$$f = m(g \pm w). \qquad /I5-9/$$

В этом выражении f, g и w суть модули соответствующих векторов. Знак "+" соответствует $\vec{w}$, направленному вверх, знак "-" - $\vec{w}$, направленному вниз.

При свободном падении рамки с подвесом $\vec{w} = \vec{g}$ и сила f, с которой тело действует на подвес /или опору/, равна нулю.

§ I6. Практическое применение законов Ньютона

Некоторое представление о том, как следует пользоваться законами Ньютона для решения конкретных задач о движении тел в заданных условиях, дают примеры, рассмотренные в предыдущем параграфе. Однако мы считаем необходимым специально остановиться на этом вопросе и рассмотреть еще несколько примеров.

Уравнение второго закона Ньютона в векторной форме устанавливает связь между силой, массой тела и его ускорением в общем виде. Для того чтобы осуществить вычисления, нужно перейти от векторов к их проекциям на соответствующим образом выбранные направления. При этом мы пользуемся следующими свойствами проекций:

I/ равные вектора имеют одинаковые проекции,

2/ проекция вектора, получающегося умножением какого-то другого вектора на скаляр, равна произведению проекции этого второго вектора на скаляр,

3/ проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых векторов.

Пример I. Два тела с массами m_1 и m_2 прикреплены к концам нерастяжимой, практически невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок /см.рис.55/. Нить может скользить по желобку блока практически без трения. Найти скорость и ускорение тел.

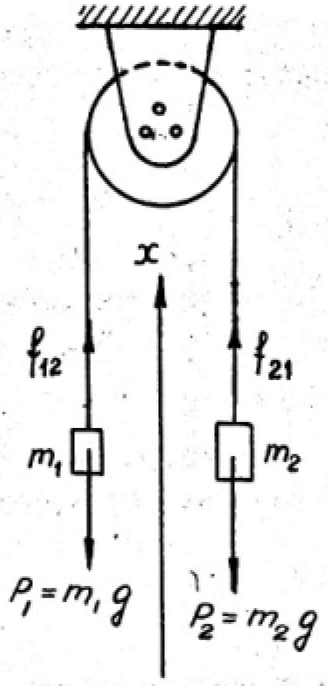


Рис. 55

Каждое из тел находится под воздействием двух сил: веса $\vec{P}$ и реакции нити $\vec{f_r}$ /рассмотрение ведем в системе отсчета, связанной с Землей, полагая эту систему инерциальной/. Напишем для обоих тел уравнение второго закона:

$$\left.\begin{aligned} \vec{P_1} + \vec{f_{r1}} &= m\vec{w_1} \\ \vec{P_2} + \vec{f_{r2}} &= m\vec{w_2} \end{aligned}\right\} . \qquad /\mathrm{I6{-}I}/$$

В связи с тем, что нить невесома и скользит по блоку без трения, ее натяжение по всей длине одинаково. Поэтому обе силы реакции равны и могут быть обозначены одинаковым символом $\vec{f_r}$:

$$\vec{f_{r1}} = \vec{f_{r2}} = \vec{f_r} . \qquad /\mathrm{I6{-}2}/$$

Вследствие нерастяжимости нити ускорения обоих тел равны по величине. Направления ускорений обоих тел, очевидно, противоположны:

$$\vec{w_1} = -\vec{w_2} \qquad /\mathrm{I6{-}3}/$$

С учетом /I6-2/ и /I6-3/ уравнения /I6-I/ принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \vec{P_1} + \vec{f_r} &= m_1\vec{w_1} \\ \vec{P_2} + \vec{f_r} &= -m_2\vec{w_1} \end{aligned}\right\} . \qquad /\mathrm{I6{-}4}/$$

198-I000

Спроектируем векторы, фигурирующие в уравнениях /16-4/, на ось x, направленную вверх по вертикали:

$$\left.\begin{aligned} -P_1 + f_2 &= m_1 w_1 \\ -P_2 + f_2 &= -m_2 w_1 \end{aligned}\right\} . \qquad /16\text{-}5/$$

Здесь P_1, P_2 и f_2 - модули соответствующих векторов, а w_1 - проекция вектора $\vec{w}_1$ на ось x, то есть величина алгебраическая.

Решая систему уравнений /16-5/ относительно неизвестных величин f_2 и w_1, получаем:

$$w_1 = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$f_2 = \frac{P_1 m_2 + P_2 m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Если $m_2 > m_1$, то w_1 положительно, то есть ускорение первого тела $\vec{w}_1$ направлено вверх, а ускорение второго тела $\vec{w}_2$ направлено вниз. При $m_2 < m_1$ направления обоих ускорений меняются на противоположные. В случае $m_1 = m_2$ тела движутся без ускорений /или покоятся/.

Зная ускорение, легко найти по формуле /5-5/ и скорость тела.

Пример 2. Тело массы m подвешено к концу нерастяжимой нити длиной ℓ /см.рис.56/. Точка крепления нити к опоре движется относительно Земли с постоянным ускорением $\vec{w}$, образующим угол α с горизонтом. Найти отклонение нити от вертикали / φ / и силу f, с которой тело действует на нить.

Тело будет двигаться с таким же ускорением $\vec{w}$, как и точка крепления нити к опоре. Следовательно, уравнение второго закона для тела имеет вид:

$$\vec{P} + \vec{f}_2 = m\vec{w} .$$

Спроектируем векторы, входящие в это уравнение, на горизонтальное направление x и вертикальное направление y:

$$\left.\begin{aligned} P_x + f_{rx} &= m w_x \\ P_y + f_{ry} &= m w_y \end{aligned}\right\} \qquad /16\text{-}6/$$

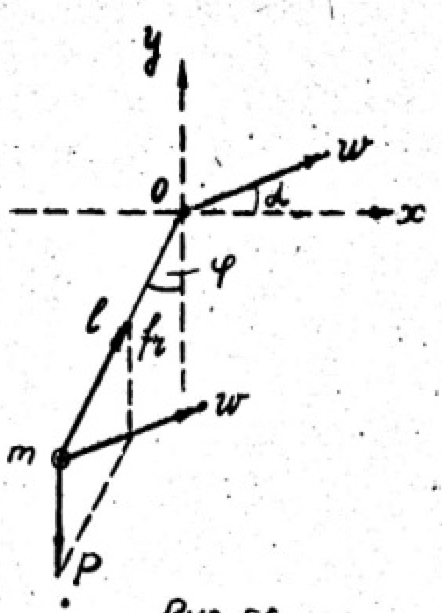


Рис. 56

Из рис. 56 следует, что:

$P_x = 0;\ P_y = -P = -mg$

$f_{rx} = f_r \sin\varphi = f \sin\varphi;$

$f_{ry} = f_r \cos\varphi = f \cos\varphi$

$w_x = w\cos\alpha;\ w_y = w\sin\alpha$

/при написании проекций $\vec{f_r}$ мы воспользовались тем, что искомая сила $\vec{f}$ и сила $\vec{f_r}$ равны по величине: $f_r = f$ /.

Подставим значения проекций в /16-6/:

$$0 + f\sin\varphi = m w \cos\alpha$$
$$-mg + f\cos\varphi = m w \sin\alpha.$$

Решая эту систему уравнений относительно φ и f, получаем:

$$tg\,\varphi = \frac{w\cos\alpha}{g + w\sin\alpha}$$

$$f = m\sqrt{g^2 + 2gw\sin\alpha + w^2}. \qquad /16\text{-}7/$$

При $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ /"+" соответствует направлению $\vec{w}$ вверх, "–" – направлению $\vec{w}$ вниз/ формула /16-7/

переходит в знакомую уже нам формулу /I5-9/.

§ I7. Импульс силы. Количество движения

В соответствии со вторым законом Ньютона сила сообщает телу ускорение. Изменение состояния движения тока /то есть величины и направления скорости/, помимо величины силы f, будет, очевидно, определяться также длительностью ее действия. Результат, к которому приводит действие силы, должен быть пропорционален как величине силы f, так и промежутку времени Δt, в течение которого происходило действие силы. Произведение $\vec{f} \cdot \Delta t$ называется **импульсом силы**. Если вектор силы не остается постоянным, импульс силы за время, прошедшее с момента t_1, до момента t_2, определяется выражением:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{f}\,dt.$$

Умножим обе части уравнения второго закона Ньютона на элемент времени dt:

$$\vec{f}\,dt = m\vec{w}\,dt = m\,d\vec{v}. \qquad /I7\text{-}I/$$

Здесь мы учли, что $\vec{w}\,dt$ равно приращению скорости $d\vec{v}$ за время dt.

Поскольку масса m для данного тела есть величина постоянная, ее можно внести под знак дифференциала. Тогда получим:

$$\vec{f}\,dt = d(m\vec{v}). \qquad /I7\text{-}2/$$

Слева здесь стоит импульс силы, справа – приращение величины $m\vec{v}$. Величину $\vec{K} = m\vec{v}$ называют количеством движения[I/] тела /точнее, материальной точки; напомним, что

I/ В теоретической физике эту величину обычно называют импульсом и обозначают символом $\vec{p}$.

в этой главе излагается динамика материальной точки/. Таким образом, **количеством движения** называется величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{K} = m\vec{v}. \qquad /17\text{-}3/$$

Из определения следует, что количество движения - величина векторная.

Интегрируя выражение /17-1/, получаем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{f}dt = \int_{t_1}^{t_2} d(m\vec{v}) = (m\vec{v})_2 - (m\vec{v})_1 = \vec{K}_2 - \vec{K}_1. \qquad /17\text{-}4/$$

Таким образом, приращение вектора количества движения равно импульсу силы.

Уравнение /17-2/ выражает, по существу, второй закон Ньютона. Оказывается, однако, что в форме /17-2/ этот закон оказывается справедливым в более широких пределах, чем уравнение /17-1/. Дело в том, что как устанавливает теория относительности, масса тела является функцией скорости: с увеличением скорости масса тела растет. Правда, зависимость массы от скорости такова[1], что при скоростях, значительно меньших скорости света, непостоянство массы практически не наблюдается. Однако при больших скоростях масса начинает зависеть от скорости весьма заметным образом, вследствие чего уравнение /17-1/ становится совершенно не применимым. В то же время уравнение /17-2/ остается справедливым и при этих условиях. Таким образом, уравнение/17-2/ сохраняет свое значение и в релятивистской механике /см. § 9/.

---

[1] Эта зависимость имеет вид:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где m - масса тела в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью v, m_0 - масса покоя, то есть масса при $v = 0$, c - скорость света в пустоте.

Соотношение /I7-2/ может быть приведено к следующему виду:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{K}}{dt}. \qquad /I7-5/$$

Следовательно, выяснив, как количество движения изменяется со временем, можно установить силу, действующую на тело.

§ I8. Закон сохранения количества движения

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек /для кратности будем называть ее системой тел/. Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, можно подразделить на внутренние и внешние. Внутренними мы будем называть силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела системы, внешними - силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе.

В случае, если внешние силы отсутствуют, система называется *замкнутой*.

Количеством движения системы $\vec{K}$ называется векторная сумма количеств движения тел, образующих систему:

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \cdots + \vec{K}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i .$$

Назовем *центром инерции* системы точку, положение которой в пространстве задается радиусом-вектором $\vec{r}_c$, определяемым следующим образом:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \qquad /I8-I/$$

где m_i - масса i-го тела, $\vec{r}_i$ - радиус-вектор, определяющий положение этого тела в пространстве, m - масса системы.

Декартовы координаты центра инерции равны проекциям $\vec{r}_c$ на координатные оси:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \qquad /18\text{-}2/$$

Отметим, что центр инерции совпадает с центром тяжести системы.

Скорость центра инерции получается путем дифференцирования $\vec{r}_c$ по времени:

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}.$$

Учтя, что $m_i \vec{v}_i$ есть $\vec{K}_i$, а $\sum \vec{K}_i$ дает количество движения системы $\vec{K}$, можно написать:

$$\vec{K} = m\vec{v}_c. \qquad /18\text{-}3/$$

Таким образом, количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра инерции.

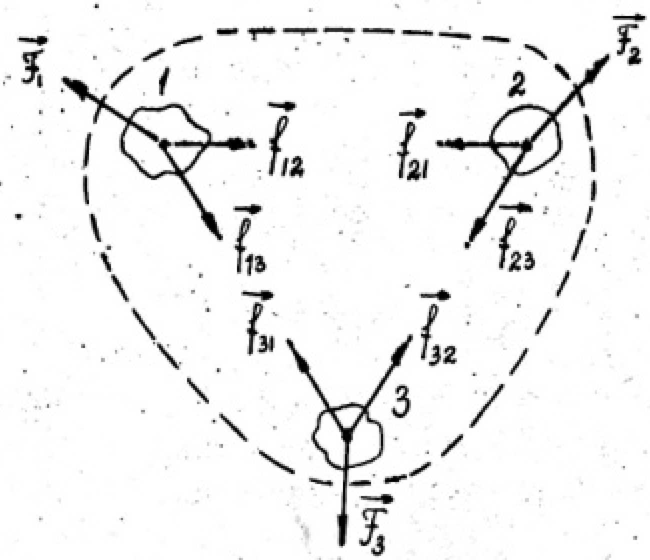


Рис. 57

Пусть система состоит из трех тел /см.рис.57/. Каждой из внутренних сил, например, $\vec{f}_{12}$, то есть силе, с которой на тело I воздействует тело 2, соответствует сила $\vec{f}_{21}$, с которой тело I воздействует на тело 2, причем по третьему закону Ньютона $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$.

Символами $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ обозначены результирующие всех сил, с которыми внешние тела воздействуют соответственно на I-е, 2-е и 3-е тело системы.

Напишем для каждого из трех тел уравнение /I7-5/:

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_1=\vec{f}_{12}+\vec{f}_{13}+\vec{F}_1$$
$$\frac{d}{dt}\vec{K}_2=\vec{f}_{21}+\vec{f}_{23}+\vec{F}_2$$
$$\frac{d}{dt}\vec{K}_3=\vec{f}_{31}+\vec{f}_{32}+\vec{F}_3 .$$

Сложим все три уравнения вместе. Сумма всех внутренних сил будет равна нулю, вследствие чего:

$$\frac{d}{dt}(\vec{K}_1+\vec{K}_2+\vec{K}_3)=\frac{d}{dt}\vec{K}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3 . \qquad /I8-4/$$

При отсутствии внешних сил получается, что $\frac{d}{dt}\vec{K}=0$, откуда следует, что для замкнутой системы $\vec{K}$ постоянно.

Этот результат легко обобщить на систему, состоящую из произвольного числа тел N. Пользуясь сокращенной записью сумм, уравнение /I7-5/ для всех N тел, можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_i=\sum_{k\neq i}\vec{f}_{ik}+\vec{F}_i \quad (i=1,2,\ldots N). \qquad /I8-5/$$

Выражение /I8-5/ представляет собой систему N уравнений, отличающихся друг от друга значением индекса i. Суммирование в каждом из этих уравнений производится по индексу k, причем в i-м уравнении индекс k пробегает все значения от I до N, кроме значения $k=i$.

Складывая эти уравнения с учетом того, что $\vec{f}_{ik}=-\vec{f}_{ki}$ получим:

$$\frac{d}{dt}\vec{K}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i . \qquad /I8-6/$$

Следовательно, производная по времени от вектора количества движения системы равна векторной сумме всех внешних сил, приложенных к телам системы.

Для замкнутой системы правая часть соотношения /I8-6/ равна нулю, вследствие чего $\vec{K}$ не зависит от времени. Это утверждение представляет собой содержание з а к о н а *сохранения количества движения*, который можно сформулировать следующим образом: *количество движения замкнутой системы не изменяется.*

Отметим, что количество движения системы остается постоянным и для системы, подверженной внешним воздействиям, при условии, что внешние силы, действующие на каждое из тел, уравновешивают друг друга. Более того, если даже внешние силы не уравновешивают друг друга, но обладают тем свойством, что их проекции на некоторое направление равны нулю, будет иметь место постоянство составляющей количества движения по тому же направлению. В этом легко убедиться, спроектировав все величины уравнения /I8-6/ на произвольное направление x. Учтя, что $\left(\frac{d}{dt}\vec{K}\right)_x = \frac{d}{dt}K_x$ I/, получим:

$$\frac{d}{dt}K_x = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}_{xi} \,, \qquad /I8\text{-}7/$$

откуда и вытекает высказанное нами утверждение.

Можно назвать много явлений, в основе которых лежит закон сохранения количества движения. Находясь, например, на скользком горизонтальном полу, невозможно сдвинуть с места какой-либо предмет без того, чтобы самому не прийти в движение в противоположном направлении. Действие ракет /и реактивных двигателей/ основано на том, что в результате выбрасывания из сопла ракеты струи образующихся при

I/ Согласно /2-8/ любой вектор $\vec{A}$ можно представить в виде: $\vec{A} = A_x\cdot\vec{i} + A_y\cdot\vec{j} + A_z\cdot\vec{k}$. Орты осей $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ суть постоянные векторы. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \left(\frac{d}{dt}A_x\right)\vec{i} + \left(\frac{d}{dt}A_y\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dt}A_z\right)\vec{k} \,,$$

откуда вытекает, что проекции вектора $\frac{d}{dt}\vec{A}$ на оси x, y и z соответственно равны: $\frac{d}{dt}A_x$; $\frac{d}{dt}A_y$; $\frac{d}{dt}A_z$.

Подобным же образом можно, в частности, показать, что:

$$v_x = \dot{x};\quad v_y = \dot{y};\quad v_z = \dot{z}$$
$$w_x = \ddot{x};\quad w_y = \ddot{y};\quad w_z = \ddot{z}\,.$$

сгорании топлива газов, ракете сообщается такое же по величине количество движения, какое уносят с собой газы.

§ 19. Абсолютно неупругий удар шаров

Абсолютно неупругим ударом двух тел называется такой удар, после которого скорость обоих соударяющихся тел оказывается одинаковой. В случае, когда тела образуют замкнутую систему или внешние силы, приложенные к телам, уразновешивают друг друга, можно, воспользовавшись законом сохранения количества движения, найти скорость тел после соударения, если известны их массы и скорости, которыми они обладали до удара.

Мы ограничимся рассмотрением центрального удара двух шаров. Удар называется центральным, если шары до удара двигались вдоль прямой, проходящей через их центры.

При центральном ударе соударение может произойти в двух случаях: 1/ если шары движутся навстречу друг другу /см. рис.58-а/ и 2/если один из шаров догоняет другой /см. рис. 58-б/.

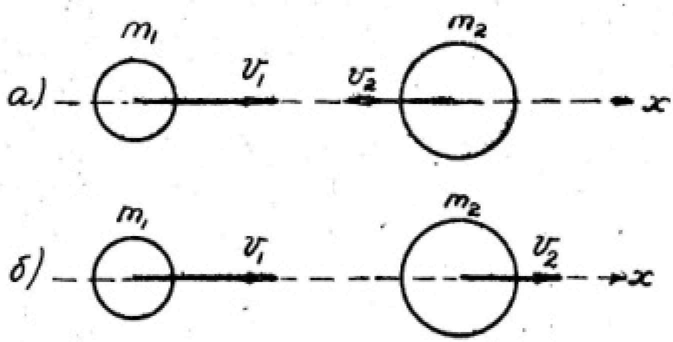


Рис.58

Пусть массы шаров равны m_1 и m_2, а скорости до удара $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$. В силу закона сохранения суммарное количество движения шаров после удара должно быть таким же, как и до удара:

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v} + m_2\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{v} \quad /19\text{-}1/$$

/ $\vec{v}$ – скорость шаров после удара/.

Отсюда следует, что

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}. \qquad /19\text{-}2/$$

Поскольку векторы $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ направлены вдоль одной и той же прямой, вектор $\vec{v}$ также имеет направление, совпадающее с этой прямой.

Для того чтобы найти величину скорости $\vec{v}$ и определить, в какую сторону она будет направлена, спроектируем /19-2/ на ось x /см.рис.58/. В первом случае /рис.58-а/ получаем:

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad /19\text{-}3/$$

где v_1 и v_2 – м о д у л и соответствующих векторов /то есть положительные величины/, а v – п р о е к ц и я вектора $\vec{v}$ на ось x /то есть величина алгебраическая/. При таком выборе направления x, как на рис. 58, положительному значению v соответствует направление $\vec{v}$ вправо, отрицательному значению – направление $\vec{v}$ влево.

В случае, соответствующем рис. 58-б, проектирование /19-2/ на ось x дает:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad /19\text{-}4/$$

откуда вытекает, что v имеет такой же знак, как v_1 и v_2. Следовательно, вектор $\vec{v}$ направлен в ту же сторону, что и векторы $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$.

§ 20. Силы трения

Силы трения возникают при относительном перемещении соприкасающихся тел или их частей. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется в н е ш н и м ; трение между перемещающимися друг относительно друга частями одного и того же тела /например, жидкости или газа/, носит название в н у т р е н н е г о трения.

Силу трения, возникающую при движении твердого тела относительно жидкой или газообразной среды, следует отнести к категории сил внутреннего трения, поскольку в этом случае слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, вовлекаются им в движение с той же скоростью, какую имеет тело, и на движение тела оказывает влияние трение между этими и более внешними слоями среды.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например, слоя смазки между ними, называется **с у х и м**. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также трение между слоями такой среды называется **в я з к и м** /или жидким/.

Применительно к сухому трению различают трение **с к о л ь ж е н и я** и трение **к а ч е н и я**.

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям /или слоям/, причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей /слоев/. Так, например, если два слоя жидкости скользят друг по другу, двигаясь с различной по величине скоростью, то сила, приложенная к слою, движущемуся быстрее, направлена в сторону, противоположную направлению движения, а сила, действующая на слой, движущийся медленнее, направлена в сторону движения слоя.

<u>Сухое трение</u>. В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое скольжение. В последнем случае она называется **с и л о й т р е н и я п о к о я**. Рассмотрим два соприкасающихся тела I и 2, из которых последнее закреплено неподвижно /см.рис.59/. Тело I прижимается к телу 2 силой f_n, направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел. Сила f_n, называемая силой нормального давления, может быть обусловлена весом тела I, либо другими причинами. Попытаемся

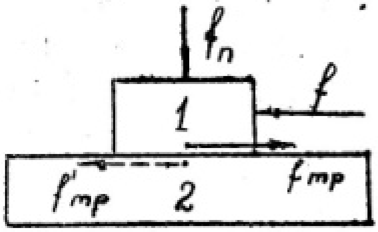


Рис. 59

переместить тело I, подействовав на него внешней силой f. При этом обнаружится, что для каждой конкретной пары тел и каждого значения силы нормального давления имеется определенное минимальное значение f_0 силы f, при котором тело I удается сдвинуть с места. При значениях внешней силы, заключенных в пределах $0<f<f_0$, тело остается в покое. По второму закону Ньютона это возможно в том случае, если сила f уравновешивается равной ей по величине и противоположно направленной силой. Эта сила и есть сила трения покоя $f_{тр}$ /см.рис.59/, которая автоматически[I] принимает значение, равное величине внешней силы f /при условии, что последняя не превосходит f_0 /. Само тело I при этом несколько деформируется, причем тем больше, чем больше сила f и, соответственно, сила $f_{тр}$. Из сказанного следует, что f_0 представляет собой наибольшее значение силы трения покоя.

Отметим, что в соответствии с третьим законом Ньютона на тело 2 в этом случае также действует сила трения покоя $f'_{тр}$ /на рис. 59 эта сила показана пунктиром/, равная по величине силе $f_{тр}$, но имеющая противоположное ей направление.

Если внешняя сила f превзойдет по величине f_0, тело начинает скользить, причем его ускорение определяется результирующей двух сил: внешней силы $\vec{f}$ и силы трения скольжения $\vec{f}_{тр}$, величина которой в той или иной мере зависит от скорости. В зависимости от природы и состояния поверхностей влияние скорости скольжения на величину силы трения имеет различный характер.

Чаще всего встречающийся вид зависимости силы трения от скорости показан графически на рис. 60-а /на графике изображена зависимость проекции силы трения от проекции скорости на направление, вдоль которого происходит скольж-

---

I/ Это происходит подобно тому, как пружина под действием растягивающей силы "автоматически" приобретает такое удлинение, при котором упругая сила точно уравновешивает внешнюю силу.

жение; обе эти проекции имеют, очевидно, противоположные знаки/. График охватывает как случай покоя, так и случай скольжения. Сила трения покоя, как уже отмечалось, может иметь значения в пределах от нуля до f_0, что отражено на графике вертикальным отрезком. Сила трения скольжения с увеличением скорости вначале несколько убывает, причем так, что при стремлении v к нулю ее величина стремится к f_0. При дальнейшем увеличении скорости сила трения начинает возрастать.

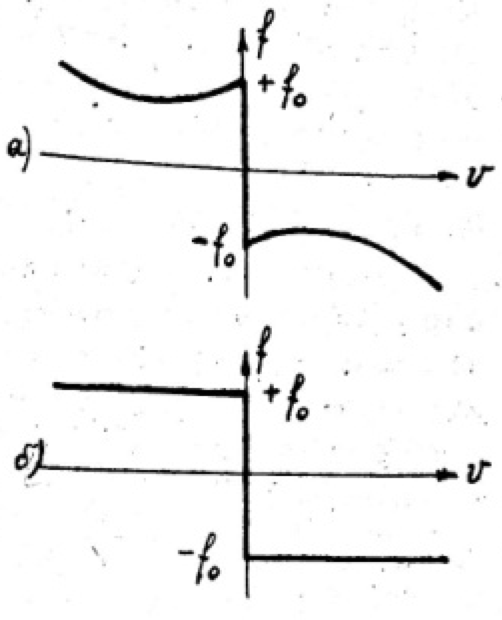


Рис. 60

В случаях, когда состояние и природа поверхностей не изменяются[I/], сила трения скольжения оказывается практически не зависящей от скорости и равной максимальному значению силы трения покоя f_0 /см.рис.60-б/.

Законы сухого трения сводятся к следующему: максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения, не зависит от величины поверхности соприкосновения трущихся тел и оказывается приблизительно пропорциональной величине силы нормального давления f_n, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$f_{тр} = k \cdot f_n . \qquad /20\text{-}I/$$

I/ Изменение поверхностей может происходить за счет сглаживания шероховатостей при скольжении, окисления поверхностей вследствие нагрева и т.п.

Ш98-I000

Независимость силы трения от величины поверхности соприкосновения наглядно обнаруживается на следующем примере. Если тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда /форму кирпича/ и прижимается к другому телу только силой своего веса, то величина максимальной силы трения /или силы трения скольжения, взятой при одной и той же скорости/ не зависит от того, какой гранью это тело трется о другую поверхность.

Безразмерный коэффициент пропорциональности К в уравнении /20-I/ называют коэффициентом трения /соответственно покоя или скольжения/. Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, в частности от их шероховатости. В случае скольжения коэффициент трения является функцией скорости.

Чтобы дать представление о величине коэффициента трения, приведем значения коэффициента трения покоя для некоторых материалов:

металл по металлу /без смазки/	0,I5 - 0,25
металл по дереву	0,5
дерево по дереву	0,65
кожа по металлу	0,6

Силы трения играют очень большую роль в природе и, в частности, в нашей повседневной жизни, причем их роль нередко оказывается весьма полезной. Достаточно вспомнить огромные затруднения, которые испытывают пешеходы и транспорт во время гололедицы, когда трение между покрытием дороги и подошвами пешеходов или колесами транспорта значительно уменьшается. Не будь сил трения, мебель, например, пришлось бы прикреплять к полу, как на судне во время качки, ибо в противном случае при малейшей негоризонтальности пола она сползала бы в направлении покатости. Читатель может сам привести ряд подобных примеров.

Наряду с этим, во многих случаях роль трения оказывается крайне отрицательной, и приходится принимать меры к тому, чтобы по возможности его ослабить. Так обстоит например, дело с трением в подшипниках или с трением между втулкой колеса и осью.

Наиболее радикальным способом уменьшения сил трения является замена трения скольжения трением качения, которое возникает, например, между цилиндрическим или шарообразным телом, катящимся по плоской или изогнутой поверхности. Трение качения подчиняется формально тем же законам, что и трение скольжения - сила трения для данного тела и поверхности, по которой оно катится, пропорциональна силе нормального давления, только коэффициент трения в этом случае оказывается значительно меньшим, чем для скольжения.

Вязкое трение и сопротивление среды. В отличие от сухого вязкое трение характерно тем, что сила вязкого трения обращается в нуль одновременно со скоростью. Поэтому, как бы ни была мала внешняя сила, она может сообщить относительную скорость слоям вязкой среды. Законы, которым подчиняются силы трения между слоями среды, будут рассмотрены в главе, посвященной механике жидкостей.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением сил трения между твердым телом и вязкой /жидкой или газообразной/ средой. При этом следует иметь в виду, что, помимо собственно сил трения, при движении тел в жидкой или газообразной среде возникают так называемые силы сопротивления среды, которые могут быть гораздо значительнее, чем силы трения. Не имея возможности рассматривать достаточно подробно причины возникновения этих сил, мы ограничимся изложением закономерностей, которым подчиняются силы /трения и сопротивления среды совместно/, действующие на тело, движущееся в вязкой среде, причем мы будем называть эти силы условно силами трения. Эти закономерности вкратце сводятся к следующему.

Величина силы трения зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности, скорости по отношению к среде и от свойства среды, называемого вязкостью. Типичная зависимость силы трения от скорости тела по отношению к среде показана графически на рис. 61. При сравнительно небольших скоростях сила трения растет линейно со скоростью:

$$\vec{f}_{тр} = -k_1 \cdot \vec{v}, \qquad /20\text{-}2/$$

где знак "-" отражает то обстоятельство, что сила трения направлена в сторону, противоположную скорости.

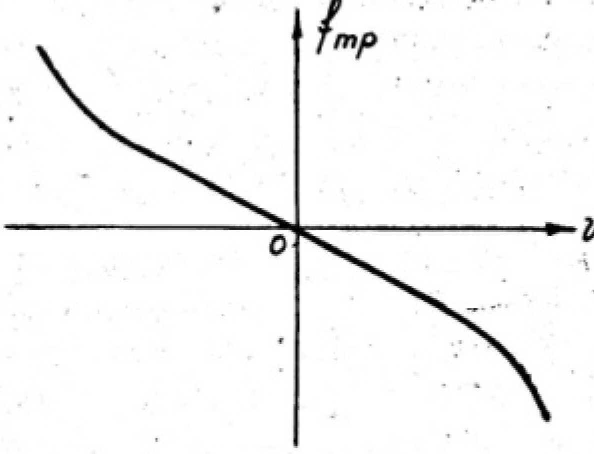


Рис. 61

При бо́льших скоростях линейный закон переходит в квадратичный, то есть сила трения начинает расти пропорционально квадрату скорости:

$$\vec{f}_{тр} = -k_2 v^2 \frac{\vec{v}}{v} \cdot \qquad /20\text{-}3/$$

Значение знака "-" то же, что и в выражении /20-2/.

Величина коэффициентов k_1 и k_2 /их можно назвать коэффициентами трения/ в сильной степени зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности и от вязких свойств среды. Например, для глицерина они оказываются гораздо большими, чем для воды. Более того, значение скорости, при которой закон /20-2/ переходит в /20-3/, оказывается зависящим от тех же причин.

§ 21. Закон всемирного тяготения

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен Ньютоном и носит название закона всемирного тяготения. Согласно этому закону сила, с которой два тела притягивают друг друга, пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$f=\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad /21\text{-}1/$$

где γ - коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной.

Направлена сила вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела /см.рис.62/. Формула /21-1/ дает численное значение равных по величине сил $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$.

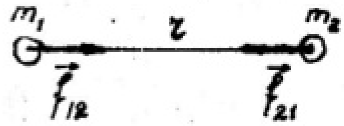


Рис. 62

Тела, о которых идет речь в соотношении /21-1/, представляют собой, очевидно, материальные точки. Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как материальные точки, эти тела нужно разбить на элементарные массы Δm, то есть небольшие объемы, каждый из которых можно было бы принять за материальную точку /см.рис.63/. Согласно /21-1/ i-я элементарная масса тела 1 притягивается к К-й элементарной массе тела 2 с силой:

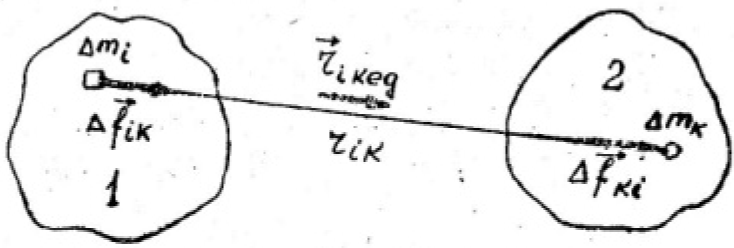


Рис. 63

$$\Delta\vec{f}_{ik}=\gamma\frac{\Delta m_i\cdot\Delta m_k}{r_{ik}^2}\cdot\vec{r}_{iked}, \qquad /21\text{-}2/$$

где $\vec{r}_{iked}$ - единичный вектор, имеющий направление от Δm_i к Δm_k, а r_{ik} - расстояние между этими элементарными массами.

Просуммировав /21-2/ по всем значениям К, получим результирующую всех сил, действующих со стороны тела 2 на элементарную массу Δm_i :

$$\Delta \vec{f}_{i2} = \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \cdot \Delta m_k}{r_{ik}^2} \cdot \vec{r}_{iked} \, . \qquad /21\text{-}3/$$

Наконец, просуммировав /21-3/ по всем значениям индекса i , то есть сложив силы, приложенные ко всем элементарным массам первого тела, получим силу, с которой тело 2 воздействует на тело I:

$$\vec{f}_{12} = \sum_{i,k} \gamma \frac{\Delta m_i \cdot \Delta m_k}{r_{ik}^2} \vec{r}_{iked} \, . \qquad /21\text{-}4/$$

Суммирование производится по всем значениям индексов i и k. Следовательно, если тело I разбить на N_1 , а тело 2 - на N_2 элементарных масс, то сумма /21-4/ будет содержать $N_1 \cdot N_2$ слагаемых.

По третьему закону Ньютона тело I воздействует на тело 2 с силой $\vec{f}_{21}$, которая равна $-\vec{f}_{12}$.

Практически суммирование /21-4/ сводится к интегрированию и представляет собой, вообще говоря, очень сложную математическую задачу. Если взаимодействующие тела представляют собой однородные шары, то есть шары с равномерно распределенной массой[1/], то вычисление согласно /21-4/ приводит к следующему результату:

$$\vec{f}_{12} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{r}_{12ed} \, , \qquad /21\text{-}5/$$

где m_1 и m_2 - массы шаров, r - расстояние между их центрами, $\vec{r}_{12ed}$ - единичный вектор, имеющий направление от центра первого шара к центру второго. Таким образом, шары взаимодействуют как материальные точки, имеющие массы, равные массам шаров и помещенные в их центрах.

1/ Достаточно, чтобы распределение массы в пределах каждого шара обладало центральной симметрией, то есть чтобы плотность была функцией только расстояния от центра шара.

Если одно из тел представляет собой шар очень большого радиуса R /например, земной шар/, а второе тело, не будучи шаром, имеет размеры, гораздо меньшие R, и находится вблизи поверхности шара, то их взаимодействие описывается формулой /2I-5/, где вместо r нужно взять радиус шара /расстоянием от второго тела до поверхности шара можно пренебречь по сравнению с R/.

С коэффициентом пропорциональности γ в уравнении /2I-I/ нецелесообразно поступать так, как мы поступили с коэффициентом пропорциональности в уравнении второго закона Ньютона /то есть делать его равным единице за счет выбора единицы измерения силы/, поскольку в этом случае пришлось бы при рассмотрении различных физических явлений пользоваться разными единицами измерения одной и той же величины - силы. Если же пользоваться для измерения величин, входящих в /2I-I/, ранее установленными единицами, то гравитационная постоянная γ оказывается размерной величиной, численное значение которой должно быть установлено опытным путем.

Размерность γ в соответствии с /2I-I/ равна:

$$[\gamma] = \frac{[f][r^2]}{[m^2]} = \frac{\frac{ML}{T^2}\cdot L^2}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2}.$$

Численное значение γ было определено путем измерения силы, с которой притягиваются друг к другу тела известной массы. При таких измерениях возникают большие трудности, обусловленные тем, что для тел, массы которых могут быть непосредственно измерены, сила притяжения оказывается крайне малой. Так, например, два тела с массой I0 кг каждое, находящиеся на расстоянии I0 см друг от друга, взаимодействуют с силой порядка 0,07 дин, то есть порядка $7 \cdot 10^{-5}$ гс.

Первой успешной попыткой определения γ были измерения, осуществленные Кавендишем /I798 г./, который применил для измерения сил весьма чувствительный метод крутильных весов /см.рис.64/. Два свинцовых шара m /с массой

729 г каждый/, прикрепленных к концам легкого коромысла, помещались вблизи симметрично расположенных шаров M /с массой 158 кг каждый/. Коромысло было подвешено на упругой нити, по закручиванию которой можно было измерять силу притяжения шаров друг к другу. Верхний конец нити был закреплен в установочной головке, поворотом которой можно было менять расстояние между шарами m и M.

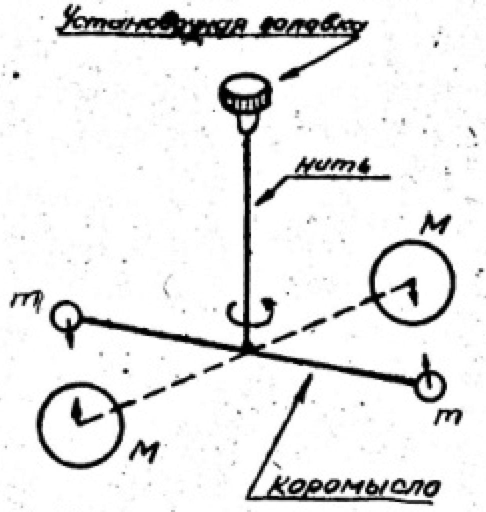


Рис. 64

Жоли предложил метод определения γ, в котором сила взаимодействия двух шаров измерялась с помощью чувствительных рычажных весов.

Наиболее точным из определенных подобными способами считается значение:

$$\gamma = 6{,}685 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г}\cdot\text{сек}^2.$$

Если в /21-5/ подставить m_1, m_2 и r, равные единице, то сила f оказывается численно равной γ. Таким образом, два шарика с массой 1 г каждый, центры которых отстоят друг от друга на 1 см, притягиваются взаимно с силой, равной $6{,}685 \cdot 10^{-8}$ дин.

Масса инертная и масса гравитационная. Масса оказывается фигурирующей в двух различных законах: во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения. В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором - гравитационные свойства, то есть способность тел притягиваться друг к другу. В связи с этим возникает вопрос, не следует ли различать инертную массу m_u, проявляющуюся в инертности тела, и массу гравитационную /или тяготеющую/ m_r, проявляющуюся во взаимном притяжении тел.

Ответ на этот вопрос может дать только опыт. В связи с этим рассмотрим свободное падение тел в гелиоцентрической системе отсчета. Всякое тело, находящееся вблизи поверхности Земли, испытывает силу притяжения к Земле, которая согласно /21-5/ равна:

$$f = \gamma \frac{m_г \cdot M_з}{R_з^2},$$

где $m_г$ - гравитационная масса данного тела, $M_з$ - гравитационная масса Земли и $R_з$ - радиус земного шара.

Под действием этой силы тело приобретает ускорение w /но не g; см. рис. 58-б и соответствующий текст/, которое должно быть равно силе f, деленной на инертную массу тела $m_и$:

$$w = \frac{f}{m_и} = \gamma \frac{M_з}{R_з^2} \cdot \frac{m_г}{m_и}. \qquad /21\text{-}6/$$

Опыт дает, что ускорение w для всех тел одинаково /на данной широте w пропорционально g, поэтому из одинаковости g вытекает одинаковость w/. Множитель $\gamma M_з/R_з^2$ также одинаков для всех тел. Следовательно, и отношение $m_г/m_и$ оказывается для всех тел одним и тем же. К такому же результату приводят и все другие опыты, в которых могло бы проявиться различие между инертной и гравитационной массой.

Таким образом, вся совокупность опытных фактов указывает на то, что введение двух различных масс-инертной и гравитационной лишено физического смысла. Существует единственная масса, которая проявляется как в инертности тел, так и в тяготении. Тождественность инертной и гравитационной массы получила теоретическое объяснение в так называемой общей теории относительности.

Отметим, что с самого начала массу в /21-1/ мы полагали совпадающей с инертной массой тел, вследствие чего численное значение γ нами было определено в предположении, что $m_г = m_и$. Поэтому /21-6/ можно записать в виде:

$$w = \gamma \frac{M_з}{R_з^2}. \qquad /21\text{-}7/$$

Определение масс небесных тел. Соотношение /21-7/ позволяет определить массу Земли $M_З$. Подстановка в него измеренных значений w, $R_З$ и γ дает для массы Земли значение 5,98.10^{27} г.

Далее, зная радиус земной орбиты $R_{ор}$ и время полного обращения Земли вокруг Солнца Т, можно найти массу Солнца $M_С$. Ускорение Земли, равное $\omega^2 R_{ор}$ $/\omega = 2\pi/T/$, обусловливается силой притяжения Земли к Солнцу. Следовательно,

$$\omega^2 R_{ор} \cdot M_З = \gamma \frac{M_З \cdot M_С}{R_{ор}^2},$$

откуда может быть вычислена масса Солнца.

Подобным же образом были определены массы других небесных тел.

§ 22. Силы, действующие при криволинейном движении

Как было показано в § 6, ускорение при криволинейном движении можно представить в виде суммы двух составляющих - нормального ускорения $\vec{w}_n$ и тангенциального ускорения $\vec{w}_t$. В соответствии с этим и силу, действующую на тело, можно разложить на нормальную составляющую $\vec{f}_n$ и тангенциальную составляющую $\vec{f}_t$. Нормальная составляющая силы $\vec{f}_n$ обусловливает изменение скорости по направлению, не изменяя ее величины; тангенциальная составляющая силы $\vec{f}_t$ обусловливает изменение скорости по величине, не изменяя ее направления. Отсюда вытекает важное следствие: если сила, действующая на тело, каждый момент времени оказывается перпендикулярной скорости тела, скорость тела, изменяясь по направлению, остается постоянной по величине. При условии, что сила, кроме того, остается постоянной по величине, нормальное ускорение v^2/R / R - радиус кривизны траектории/ также будет неизменно по величине, и тело будет двигаться по траектории постоянной кривизны, то есть по окружности.

При равномерном движении по окружности ускорение тела и действующая на него сила все время направлены

/"устремлены"/ к центру окружности, вследствие чего в этом случае их называют **ц е н т р о с т р е м и т е л ь н ы м у с к о р е н и е м** и **ц е н т р о с т р е м и т е л ь н о й с и л о й**.

В случае, если центростремительное ускорение обеспечивается воздействием на данное тело только одного тела, например, нити, которая "привязывает" движущиеся тело к центру окружности, то по третьему закону Ньютона на это тело /в данном примере на нить/ движущееся тело действует с равной по величине силой, имеющей постоянно направление от центра окружности, вследствие чего эту силу называют **ц е н т р о б е ж н о й**. Центростремительная сила и центробежная сила приложены к **р а з н ы м** телам.

На практике центростремительное ускорение обычно бывает обусловлено одновременным воздействием на движущееся тело со стороны нескольких тел. В качестве примера рассмотрим равномерное движение по окружности тела, находящегося под воздействием веса $\vec{P}$ и реакции натянутой нити $\vec{f_r}$ /см. рис.65/. В этом случае центростремительная сила $\vec{f_{цс}}$ является результирующей сил $\vec{P}$ и $\vec{f_r}$. Тело, к которому была бы приложена сила, равная по величине $\vec{f_{цс}}$ и имеющая противоположное ей направление, не существует. Таким образом, в случае, когда центростремительная сила является результирующей нескольких сил, понятие центробежной силы теряет смысл. Центробежная сила оказывается как бы "распределенной" между несколькими телами /например, нитью и Землей/, рассмотрение же результирующей сил, приложенных к разным телам, лишено всякого смысла.

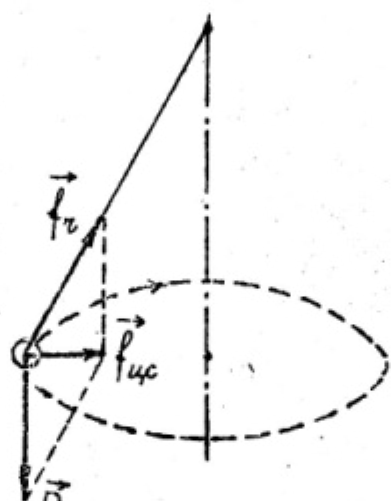


Рис. 65

Глава III. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

§ 23. Работа. Скалярное произведение векторов

Пусть тело, на которое действует сила f, проходит, двигаясь по некоторой траектории, путь S. Сила f в это время либо изменяет скорость тела, сообщая ему ускорение, либо компенсирует действие другой силы /или сил/, противодействующей движению. Действие силы f на пути S характеризуется величиной, которая называется работой.

Работой называется скалярная величина, равная проекции силы на направление перемещения f_s, умноженной на путь S, проходимый точкой приложения силы:

$$A = f_s \cdot S. \qquad /23\text{-}1/$$

Выражение /23-1/ справедливо в том случае, если величина проекции силы f_s на направление перемещения /то есть на направление скорости/ остается все время неизменной. В частности, это имеет место, когда тело движется прямолинейно и постоянная по величине сила f образует с направлением движения постоянный угол α /см. рис. 66/. Поскольку $f_s = f \cdot \cos\alpha$, выражению /23-1/ можно придать следующий вид:

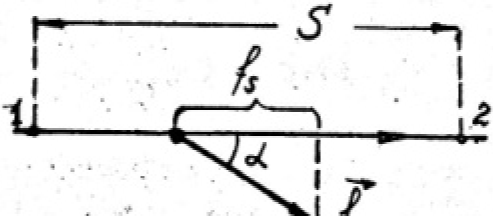


Рис. 66

$$A = f \cdot S \cdot \cos\alpha. \qquad /23\text{-}2/$$

Работа – алгебраическая величина. Если сила и направление перемещения образуют острый угол $/\cos\alpha > 0/$, работа положительна. Если угол α тупой $/\cos\alpha < 0/$, работа отрицательна. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ работа равна нулю. Последнее обстоятельство особенно отчетливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе. В обыденном понимании всякое усилие, в частности, мускульное напряжение всегда сопровождается совершением работы. Так, например, для того, чтобы держать тяжелый груз, стоя неподвижно, а тем более для того, чтобы перенести этот груз по горизонтальному пути, носильщик затрачивает много усилий, то есть "совершает работу" в обыденном понимании. Однако работа, как механическая величина, в этих случаях равна нулю.

Если величина проекции силы на направление перемещения не остается постоянной во время движения, для вычисления работы следует разбить путь S на элементарные участки ΔS, взяв их столь малыми, чтобы за время прохождения телом такого участка величину f_S можно было считать почти неизменной /см. рис. 67/. Тогда работа силы на каждом элементарном участке будет приближенно равна:

Рис. 67

$$\Delta A \cong f_S \Delta S,$$

а работа на всем пути S может быть вычислена как сумма элементарных работ:

$$A = \sum \Delta A_i \cong \sum f_{Si} \Delta S_i \,. \qquad /23\text{-}3/$$

При устремлении всех ΔS_i к нулю приближенное равенство /23-3/ перейдет в строгое равенство:

$$\Delta = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum f_{Si} \Delta S_i = \int_S f_S \, dS \text{ [1]}. \qquad /23\text{-}4/$$

I/ Ход рассуждений в данном случае точно такой, как при выводе формулы для пути, пройденного при неравномерном движении /см. § 4/.

На рис. 68 построен график f_s как функции положения точки на траектории /горизонтальную ось можно назвать осью S – длина отрезка этой оси между точками I и 2 равна полной длине пути/. Из рисунка видно, что элементарная работа ΔA_i численно равна площади заштрихованной полоски, а работа А на пути от точки 1 до точки 2 численно равна площади фигуры, ограниченной кривой f_s, вертикальными прямыми I и 2 и осью S.

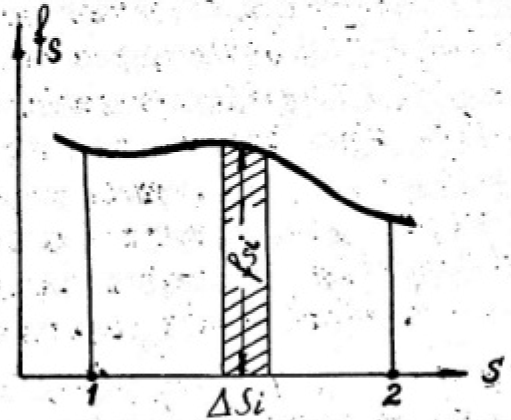


Рис. 68

Найдем работу, совершаемую при растяжении пружины, подчиняющейся закону Гука. Растяжение будем производить медленно, чтобы силу, с которой мы действуем на пружину, можно было считать все время равной по величине упругой силе $f = kx$, где x – удлинение пружины. Сила действует в направлении перемещения, так что $f_x = f$. Путь, проходимый точкой приложения силы, равен x /см. рис. 69/.

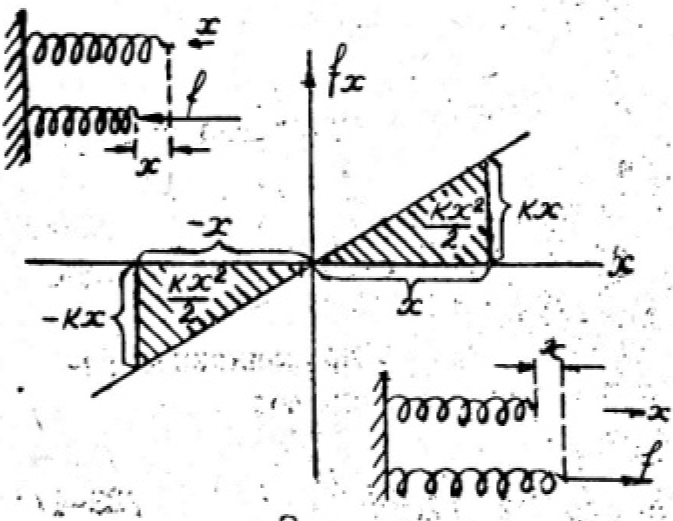


Рис. 69

Как следует из рис. 69, работа, которую нужно совершить, чтобы вызвать удлинение пружины x, равна:

$$A = \frac{kx^2}{2} \quad /23\text{-}5/$$

При сжатии пружины на величину x совершается такая же по величине и знаку работа, как и при растяжении. Проекция силы f_x в этом случае отрицательна /сила, действующая на пружину, направлена влево, x

 II98-I000

растет вправо - см.рис.69/, все Δx- тоже отрицательны, вследствие чего $f_x \Delta x$ положительно.

Отметим, что работа упругой силы, то есть силы, действующей со стороны пружины на деформирующее ее тело, и при растяжении, и при сжатии равна $-\frac{kx^2}{2}$, так как упругая сила каждый момент времени равна по величине, но противоположна по направлению силе, вызывающей деформацию.

Единицы работы. В качестве единицы работы в каждой из систем единиц служит работа, совершаемая силой, равной единице и действующей в направлении перемещения, на пути, равном единице:

I/ В СГС - системе единицей работы является эрг, который равен работе, совершаемой силой в I дину на пути в I см.

2/ В МКС-системе - джоуль, равный работе, совершаемой силой в I ньютон на пути в I м.

$$1 \text{ дж} = 1 \text{ н.} \times 1 \text{ м.} = 10^5 \text{ дин} \times 10^2 \text{ см} = 10^7 \text{ эрг.}$$

3/ В МКГСС-системе - килограммометр, равный работе, совершаемой силой в I кгс на пути в I м.

$$1 \text{ кгс.м} = 1 \text{ кгс} \times 1 \text{ м} = 9{,}81.10^5 \text{дин} \times 10^2 \text{ см} =$$

$$= 9{,}81.10^7 \text{ эрг} = 9{,}81 \text{ дж.}$$

Скалярное произведение векторов. Выражение для работы может быть представлено в виде скалярного произведения вектора силы и вектора перемещения.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними /см.рис. 70/. Символически скалярное произведение записывается в виде $\vec{A}\,\vec{B}$, то есть

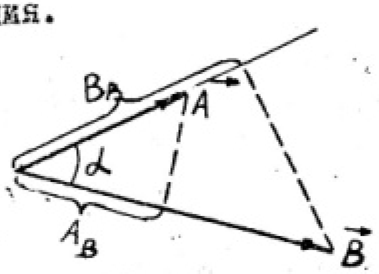


Рис.70

пишутся рядом символы перемножаемых векторов без какого-либо значка между ними[1].

Таким образом, скалярное произведение по определению равно:

$$\vec{A}\vec{B} = AB\cos\alpha \qquad /23\text{-}6/$$

/$\vec{A}\,\vec{B}$ – не вектор, а скаляр!/.

При α остром $\vec{A}\,\vec{B}$ больше нуля, при α тупом $\vec{A}\,\vec{B}$ меньше нуля; скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ равно нулю.

Из определения следует, что скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей. Следовательно, в отличие от векторного произведения, скалярное произведение коммутативно.

Выражению /23-6/ можно придать следующий вид:

$$\vec{A}\vec{B} = AB\cos\alpha = A(B\cos\alpha) = B(A\cos\alpha).$$

Из рис. 70 видно, что $B\cos\alpha$ равно B_A – проекции вектора $\vec{B}$ на направление вектора $\vec{A}$, аналогично $A\cos\alpha = A_B$ – проекции вектора $\vec{A}$ на направление вектора $\vec{B}$. Поэтому скалярному произведению можно дать следующее определение: скалярным произведением двух векторов называется скаляр, равный произведению модуля одного из перемножаемых векторов на проекцию второго вектора на направление первого:

$$\vec{A}\vec{B} = A_B B = AB_A. \qquad /23\text{-}7/$$

Воспользовавшись скалярным произведением векторов, выражение для работы /23-4/ можно записать в следующем

---

[1] Менее употребительны такие обозначения: $\vec{A}.\vec{B}$ и $(\vec{A},\vec{B})$.

1193-1000

виде:

$$A = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum \vec{f_i} \Delta \vec{S_i} = \int_S \vec{f} d\vec{S}, \qquad /23\text{-}8/$$

где под $\Delta \vec{S}$ подразумевается вектор элементарного перемещения, который мы ранее обозначали через $\Delta \vec{r}$. Такое изменение обозначения допустимо вследствие того, что модуль элементарного перемещения $|\Delta \vec{r}|$ равен /в пределе/ элементарному пути ΔS /см. § 4/.

Элементарное перемещение $\Delta \vec{S}$ может быть представлено как произведение вектора $\vec{v}$ на промежуток времени Δt:

$$\Delta \vec{S} = \vec{v} \cdot \Delta t.$$

Поэтому формуле /23-8/ можно придать вид:

$$A = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum \vec{f_i} \vec{v_i} \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \vec{v} dt. \qquad /23\text{-}9/$$

В соответствии с /23-7/ $f_S \Delta S = f \Delta S_f$, где ΔS_f – проекция элементарного перемещения на направление силы. Поэтому работу можно записать как:

$$A = \lim_{\Delta S_{f_i} \to 0} \sum f_i (\Delta S_f)_i = \int_S f \cdot dS_f. \qquad /23\text{-}10/$$

В таком виде выражение для работы удобно в том случае, когда сила имеет постоянную величину и направление /см. рис. 71/. Тогда f можно вынести за знак суммы, причем сумма, получающаяся после вынесения f, оказывается равной проекции пути S на направление силы:

$$A = f \sum (\Delta S_f)_i = f \cdot S_f. \qquad /23\text{-}11/$$

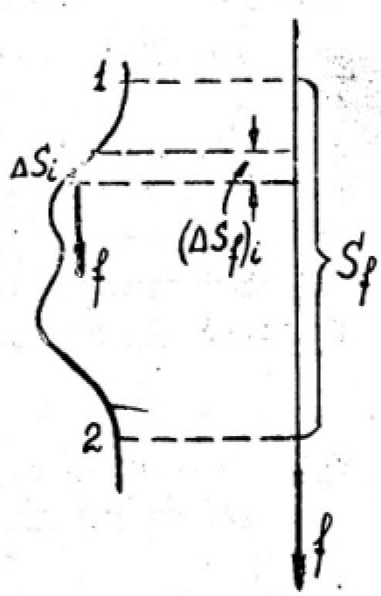


Рис.71

Примеры и упражнения на перемножение векторов

I. Квадрат вектора равен

квадрату его модуля:

$$\vec{A}^2 = \vec{A}\vec{A} = AA\cos 0 = A^2. \qquad /23\text{-}12/$$

2. Смешанным /или векторно-скалярным/ произведением трех векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ /см. рис. 72/ называется выражение:

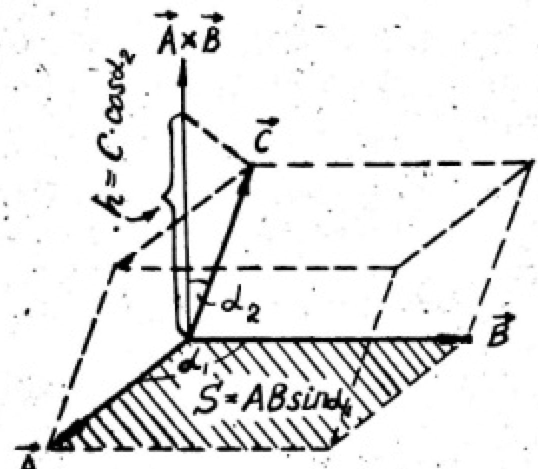


Рис. 72

$$(\vec{A}\times\vec{B})\vec{C}.$$

Скобки указывают, что сначала нужно перемножить векторно $\vec{A}$ и $\vec{B}$, а затем получившийся вектор умножить скалярно на $\vec{C}$. В результате получится скаляр, равный

$$AB\sin\alpha, C\cos\alpha_2$$

/ α_1 - угол между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$, α_2 - угол между векторами $\vec{A}\times\vec{B}$ и $\vec{C}$/.

Полученный результат численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$. Действительно, $AB\sin\alpha_1$, численно равно площади основания этого параллелограмма, а $C\cos\alpha_2$ - его высоте.

Взятый нами порядок, в котором расположены векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$, образует правовинтовую последовательность: при вращении головки правого винта в направлении от первого вектора ко второму получается перемещение винта в направлении третьего вектора. Если взять те же векторы в левовинтовой последовательности, знак результата изменится на обратный. Например:

$$(\vec{B}\times\vec{A})\vec{C} = -V,$$

где V - объем параллелепипеда.

Рекомендуется убедиться в том, что:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\vec{C} = (\vec{B}\times\vec{C})\vec{A} = (\vec{C}\times\vec{A})\vec{B}.$$

II..-1000

3. Даны три взаимно перпендикулярные и равные по модулю вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$. Показать, что:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\vec{C} = A^3$$

$$(\vec{B}\times\vec{A})\vec{C} = -A^3$$

$$(\vec{A}\vec{B})\vec{C} = 0$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{A}\times\vec{C}) = 0$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{B}\times\vec{A}) = -A^4.$$

§ 24. Мощность

На практике обычно имеет значение не только величина совершенной работы, но и время, в течение которого она совершается. Поэтому для характеристики механизмов, предназначенных для совершения работы, вводится величина, показывающая, какую работу данный механизм совершает в единицу времени. Эта величина называется м о щ н о с т ь ю.

Таким образом, мощность W есть величина, равная отношению работы ΔA к промежутку времени Δt, за который она совершается:

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \qquad /24\text{-}1/$$

Если за одинаковые, сколь угодно малые промежутки времени Δt совершается неодинаковая работа ΔA, мощность оказывается изменяющейся со временем. В этом случае вводится в рассмотрение мгновенное значение мощности:

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \qquad /24\text{-}2/$$

В случае, когда мгновенная мощность /2А-2/ непостоянна, выражение /24-I/ дает среднее значение мощности за промежуток времени Δt.

Пусть за время dt точка приложения силы получает перемещение $d\vec{s}$. Тогда элементарная работа dA, совершаемая за время dt, будет равна:

$$dA = \vec{f}\,d\vec{s},$$

вследствие чего мощность можно представить в виде:

$$W = \frac{dA}{dt} = \vec{f}\,\frac{d\vec{s}}{dt}.$$

Но $\frac{d\vec{s}}{dt}$ равно вектору скорости $\vec{v}$. Следовательно, мощность оказывается равной скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы:

$$W = \vec{f}\,\vec{v}. \qquad /24\text{-}3/$$

Единицы мощности. В каждой из систем за единицу мощности принимается такая мощность, при которой в единицу времени совершается работа, равная единице:

I/ В СГС-системе – эрг в секунду эрг/сек.

2/ В МКС-системе – ватт /вт/, равный джоулю в секунду.

3/ В МКГСС-системе – килограммометр в секунду кгс.м/сек.

Между единицами разных систем имеются следующие соотношения:

I вт = 10^7 эрг/сек

I кгс.м/сек = 9,80665 вт /приближенно 9,81 вт/.

Внесистемной единицей мощности является лошадиная сила /л.с./, которая равна 75 килограммометрам в секунду:

I л.с. = 75 кгс.м/сек = 735,499 вт /приближенно 736 вт/

§ 25. Потенциальное поле сил. Силы консервативные и неконсервативные

Если какое-то тело поставлено в такие условия, что в каждой точке пространства оно подвержено воздействию другого тела с силой, закономерно изменяющейся от точки к точке, говорят, что это тело находится в поле сил. Так, например, тело вблизи поверхности Земли находится в поле сил тяжести - в каждой точке на него действует сила $P = mg$, направленная по вертикали вниз.

В качестве второго примера рассмотрим тело М, "привязанное" посредством пружины к некоторому центру О /см.рис.73/: один конец пружины может вращаться на шарнире вокруг неподвижной точки О в любом направлении, другой конец прикреплен к телу М. В каждой точке пространства на тело М действует сила, направленная по радиусу /то есть вдоль прямой, проходящей через центр О и тело М/ и равная:

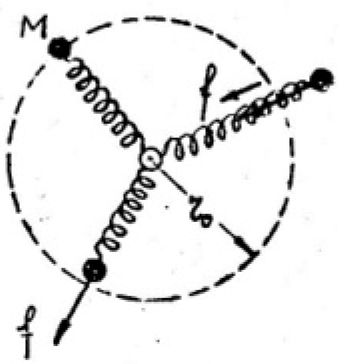


Рис. 73

$$f = -k(r - r_0), \qquad /25\text{-}1/$$

где r - расстояние тела от центра О, r_0 - длина недеформированной пружины, k - коэффициент пропорциональности. Если $r > r_0$ /пружина растянута/, сила направлена к центру и имеет знак "-" /направления силы и радиуса-вектора $\vec{r}$ противоположны/; если $r < r_0$ /пружина сжата/, сила направлена от центра и имеет знак "+". Рассмотренное поле сил представляет собой частный случай так называемого поля центральных сил, характерного тем, что направление силы, действующей в любой точке пространства, проходит через некоторый центр, а величина силы зависит только от расстояния до этого центра: $f = f(r)$. Поле сил тяжести /вблизи поверхности Земли/ тоже является частным случаем центрального поля сил, центр которого практически удален на бесконечность.

Если работа, совершаемая над телом силами поля, не зависит от пути, а определяется только начальным и конечным положением тела в пространстве, то поле сил называется потенциальным, а сами силы - консервативными. Силы, работа которых зависит от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое, называются неконсервативными.

Работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю. В самом деле, разобьем замкнутый путь, по которому совершает обход тело, находящееся в потенциальном поле сил, на две части: I, по которой тело переходит из точки I в точку 2, и II, по которой тело переходит из точки 2 в точку I, причем точки I и 2 выберем совершенно произвольно /см.рис.74/. Работа на всем замкнутом пути будет равна сумме работ, совершаемых на каждом из участков:

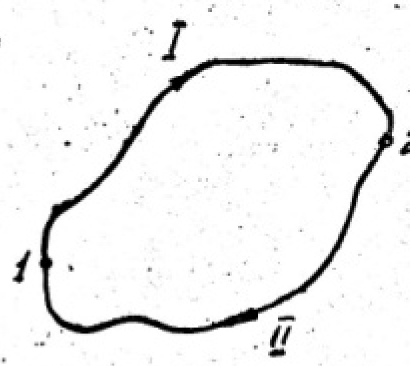


Рис. 74

$$A = (A_{12})_{I} + (A_{21})_{II}, \qquad /25-2/$$

где символом $(A_{12})_{I}$ обозначена работа на пути I при переходе тела из точки I в точку 2, а символом $(A_{21})_{II}$ - работа на пути II при переходе из точки 2 в точку I.

Покажем, что работа, совершаемая на каком-либо пути, например, на пути II /см.рис.74/, при переходе тела по нему точки I в точку 2, равна взятой с обратным знаком работе, совершаемой на том же пути при обратном переходе из точки 2 в точку I. Рассмотрим участок траектории ΔS /см.рис.75/. Поскольку в потенциальном поле сила $\vec{f}$ зависит только от положения тела в пространстве и не зависит от состояния движения тела /в частности, от направления движения/, элементарная работа на пути ΔS при движении в одном

Рис. 75

направлении равна $\Delta A = \vec{f} \Delta \vec{S}$, при движении же в другом направлении она равна $\Delta A' = \vec{f} \Delta \vec{S'}$. Так как $\Delta \vec{S'} = -\Delta \vec{S}$, то $\Delta A' = -\Delta A$. Это справедливо для любого элементарного участка пути, а следовательно, и для работы на всем пути, так что

$$(A_{21})_{II} = -(A_{12})_{II} . \qquad /25\text{-}3/$$

Воспользовавшись полученным результатом, равенство /25-2/ можно записать следующим образом:

$$A = (A_{12})_{I} - (A_{12})_{II} . \qquad /25\text{-}4/$$

Но в потенциальном поле сил работа не зависит от пути, то есть $(A_{12})_I = (A_{12})_{II}$. Следовательно, выражение /25-4/ равно нулю, что и требовалось доказать.

Если работа каких-то сил на любом замкнутом пути равна нулю, то работа этих сил при переходе тела из одного положения в другое, очевидно, не зависит от пути /это можно доказать, обратив ход проведенных выше рассуждений/. Поэтому потенциальное поле сил можно определить как поле таких сил, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.

Поскольку работа в потенциальном поле сил на замкнутом пути равна нулю, на одних участках замкнутого пути силы совершают положительную работу, а на других отрицательную. Работа сил трения за промежуток времени Δt согласно /23-9/ равна

$$\Delta A = \vec{f} \vec{v} \Delta t = -f v \Delta t ,$$

так как векторы $\vec{f}$ и $\vec{v}$ все время имеют противоположные направления[1]. Следовательно, работа сил трения все время остается отрицательной и на замкнутом пути будет отлична от нуля. Таким образом, силы трения принадлежат к числу неконсервативных сил.

1/ Здесь имеется в виду случай трения между движущимся телом и неподвижными /относительно системы отсчета/ телами. В некоторых случаях работа силы трения может оказаться положительной. Это имеет место, например, тогда, когда сила трения обусловлена взаимодействием данного тела с другим телом, движущимся в том же направлении, но с большей скоростью.

Докажем, что поле сил тяжести является потенциальным. Сила, действующая на тело в любой точке траектории, имеет одинаковую величину $P = mg$ и направление – вниз по вертикали /см.рис.76/. Поэтому согласно /23-II/ работа равна произведению силы P на величину проекции пути на вертикальное направление, то есть на $(h_1 - h_2)$:

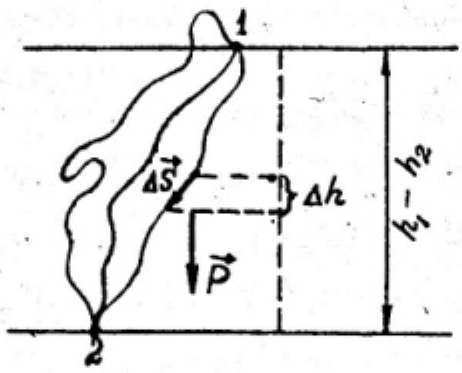


Рис. 76

$$A = P(h_1 - h_2) = mg(h_1 - h_2). \quad /25\text{-}5/$$

Это выражение, очевидно, не зависит от пути, откуда следует, что поле сил тяжести потенциально.

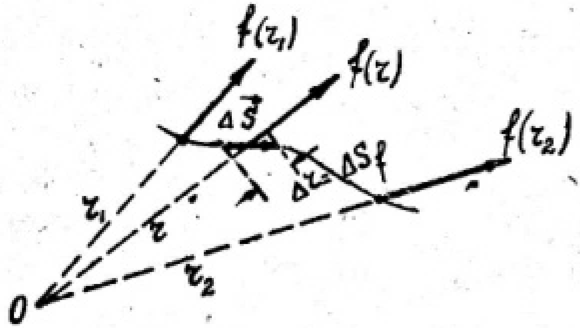


Рис. 77

Поле центральных сил также потенциально. Элементарная работа на пути ΔS /см.рис.77/ равна:

$$\Delta A = f(r)\,\Delta S_f.$$

Но проекция $\Delta\vec{S}$ на направление силы в данном месте, то есть на направление радиуса-вектора $\vec{r}$ равна Δr – приращению расстояния тела от точки O: $\Delta S_f = \Delta r$. Поэтому:

$$\Delta A = f(r)\,\Delta r.$$

Работа на всем пути:

$$A = \sum \Delta A_i = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{r=r_1}^{r=r_2} f(r_i)\,\Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\,dr.$$

Последнее выражение зависит, очевидно, только от вида функции $f(r)$ и от значений r_1 и r_2. От вида траектории оно никак не зависит, что служит свидетельством того, что центральное поле сил является потенциальным.

§ 26. Энергия. Закон сохранения энергии

Как показывает опыт, тела часто оказываются в состоянии совершать работу над другими телами. Эта способность совершать работу называется энергией. Энергия тела может быть обусловлена причинами двоякого рода: во-первых, движением тела с некоторой скоростью и, во-вторых, нахождением тела в потенциальном поле сил. Энергия первого вида, обусловленная движением тела, называется кинетической энергией. Энергия второго вида, зависящая от положения тела в потенциальном поле сил, называется потенциальной энергией. Кратко можно сказать, что кинетическая энергия это энергия движения, а потенциальная энергия - энергия положения.

Кинетическая энергия. Пусть тело I массы m воздействует при своем движении на соприкасающееся с ним тело 2 с постоянной силой $\vec{f}$, совпадающей по направлению со скоростью тела $\vec{v}$ /см. рис. 78/. За время t оба тела пройдут путь S, при этом тело I совершит над телом 2 работу:

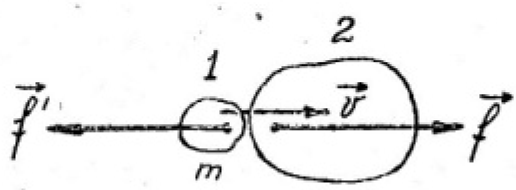


Рис. 78

$$A = f \cdot S. \qquad /26\text{-}1/$$

По третьему закону Ньютона тело 2 действует на тело I с постоянной силой $\vec{f}' = -\vec{f}$. Под действием этой силы тело I будет двигаться равномерно замедленно, вследствие чего за время t его скорость уменьшится от значения v_1 до v_2, причем

$$v_1 - v_2 = wt = \frac{f'}{m}t = \frac{f}{m}t \ . \qquad /26\text{-}2/$$

Таким образом, за совершение над телом 2 работы /26-I/ тело I расплачивается уменьшением своей скорости /26-2/. Очевидно, что в данном случае тело I совершает работу над другим телом за счет запаса энергии, которой оно обладает в силу своего движения, то есть за счет запаса кинетической энергии $E_к$. Поэтому величина совершенной работы должна быть равна убыли кинетической энергии:

$$A = E_{к1} - E_{к2}. \qquad /26\text{-}3/$$

Воспользуемся приведенным примером для того, чтобы выяснить, каким образом кинетическая энергия тела зависит от его скорости.

Поскольку движение является равномерно-переменным, выражение /26-I/ можно представить в виде:

$$A = f\frac{v_1 + v_2}{2}t\,.$$

Подставляя в это соотношение значение ft из /26-2/, получим:

$$A = \frac{m(v_1 + v_2)(v_1 - v_2)}{2} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}. \qquad /26\text{-}4/$$

Сопоставляя /26-4/ и /26-3/, мы приходим к выводу, что кинетическая энергия тела массы m, движущегося со скоростью v, равна

$$E_к = \frac{mv^2}{2}. \qquad /26\text{-}5/$$

Правда, указанное сопоставление дает нам право утверждать только, что $E_к = \frac{mv^2}{2} + Const$, где $Const$ какая-то постоянная величина, которая исключается, если брать разность энергий. Однако из физических соображений ясно, что при $v = 0$ кинетическая энергия $E_к$ также равна нулю, откуда следует, что эту константу нужно положить равной нулю.

Уменьшение кинетической энергии тела I в рассмотренном примере можно трактовать как результат того, что над этим телом тело 2 совершает отрицательную работу:

$$A' = -f'S = -fS = -A\,,$$

Совершение над телом положительной работы приводит к возрастанию его кинетической энергии. Покажем это для случая силы, произвольным образом меняющейся со временем.

Рассмотрим тело массы m, движущееся в данный момент времени со скоростью v и находящееся под действием силы f, имеющей то же направление, что и скорость /см. рис. 79/.

За время dt над телом будет совершена работа:

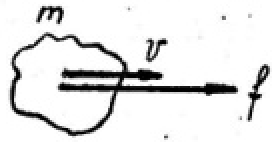


Рис. 79

$$dA' = fv\,dt \qquad /26\text{-}6/$$

в результате чего скорость тела возрастет на величину:

$$dv = w\,dt = \frac{f}{m}\,dt. \qquad /26\text{-}7/$$

Подставим в /26-6/ значение $f\,dt$, взятое из /26-7/:

$$dA' = mv\,dv.$$

Правая часть этого равенства представляет собой дифференциал выражения $\frac{mv^2}{2}$:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\,dv.$$

Следовательно,

$$dA' = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

так что работа dA', совершенная над телом, равна приращению величины $\frac{mv^2}{2}$, то есть приращению кинетической энергии тела E_K [см. /26-5/].

Суммируя элементарные работы, совершенные над телом силой f, получаем:

$$A' = \int dA' = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{K2} - E_{K1}, \qquad /26\text{-}8/$$

где E_{k1} - начальное, а E_{k2} - конечное значение кинетической энергии тела.

Потенциальная энергия. Теперь рассмотрим пример, поясняющий наличие способности совершать работу у тела, находящегося в потенциальном поле сил.

Пусть тело I, поднятое на высоту h над каким-то уровнем, принятым за начало отсчета, воздействует через нерастяжимую нить на тело 2, лежащее на горизонтальной плоскости /см. рис. 80/. Предполагается, что массой нити, массой блока, через который перекинута нить, и трением в блоке можно пренебречь. Допустим, что сила трения тела 2 о плоскость практически равна весу тела I. Это допущение необходимо для того, чтобы силу натяжения нити можно было считать равной по величине весу тела I:

$$f = mg$$

/здесь m - масса тела I/.

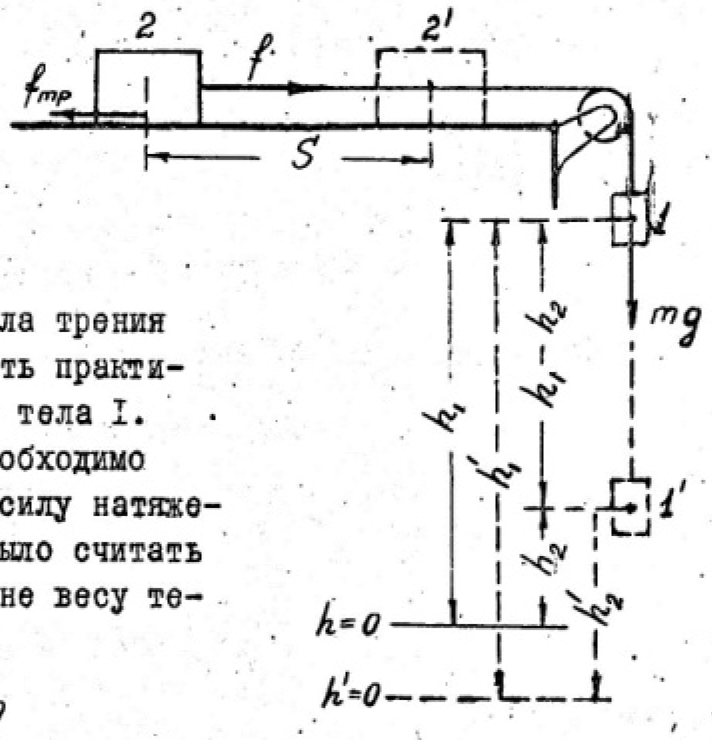


Рис. 80

При этих условиях тела I и 2 будут двигаться без ускорения. За время, пока тело I опустится с высоты h_1 до высоты h_2, тело 2 пройдет путь, равный

$$S = h_1 - h_2 = -\Delta h,$$

где Δh – приращение высоты, на которой находится тело I[1/].

На этом пути тело I совершает над телом 2 работу:

$$A = fS = mg(h_1 - h_2). \qquad /26\text{-}9/$$

Эта работа совершается за счет того, что тело I изменяет свое положение в потенциальном поле сил земного тяготения. Напомним, что скорость тела I, а следовательно, и его кинетическая энергия практически не изменяются.

Рассмотренный пример показывает, что тело, находящееся в потенциальном поле сил, действительно может обладать способностью совершать работу над другими телами, то есть обладает потенциальной энергией E_p.

Соотношение /26-9/ позволяет установить вид потенциальной энергии для случая поля сил земного тяготения. В самом деле, поскольку работа совершается за счет запаса потенциальной энергии тела E_p, величина совершенной работы должна быть равна убыли потенциальной энергии:

$$A = E_{p1} - E_{p2}. \qquad /26\text{-}10/$$

I/ Изменение какой-либо величины a можно характеризовать либо ее приращением, либо убылью. Приращением величины a, которое мы будем обозначать Δa, называют разность конечного /a_2/ и начального /a_1/ значений этой величины:

$$\text{приращение} = \Delta a = a_2 - a_1.$$

Убылью величины a называют разность ее начального /a_1/ и конечного /a_2/ значений:

$$\text{убыль} = a_1 - a_2 = -\Delta a.$$

Убыль величины равна ее приращению, взятому с обратным знаком.

Приращение и убыль алгебраические величины. В рассматриваемом примере приращение h – отрицательно, а убыль h – положительна. Если бы тело I двигалось вверх, приращение и убыль h имели бы противоположные знаки.

Сопоставляя /26-9/ с /26-10/, получаем, что

$$E_p = mgh + const. \qquad /26\text{-}11/$$

В данном случае нельзя положить $const$ равной нулю, как это было сделано в выражении для кинетической энергии. В самом деле, величина mgh зависит от выбора начала отсчета для h, значение же E_p от этого выбора зависеть не может. Поэтому, если за начало отсчета принять уровень $h' = 0$ /см. рис. 80/, либо какой-нибудь другой уровень, то соответственно должно изменяться значение $const$ в выражении /26-11/. Таким образом, потенциальная энергия может быть определена только с точностью до некоторой неизвестной аддитивной постоянной. Такая неопределенность в значениях E_p не имеет никакого значения, так как во все физические соотношения входит только разность значений E_p в двух положениях тела.

Практически уславливаются считать E_p какого-то определенного положения тела равной нулю, а энергию других положений брать по отношению к этой энергии. Если, например, положить E_p на уровне $h = 0$, равной нулю, то $const$ в выражении /26-11/ обращается в нуль.

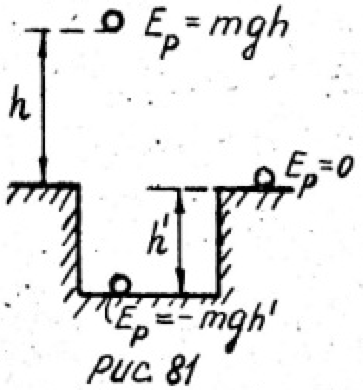


Рис. 81

Поскольку начало отсчета E_p можно выбирать произвольно, потенциальная энергия может иметь отрицательные значения. Если, например, принять за нуль потенциальную энергию тела, находящегося на поверхности земли, то потенциальная энергия тела, лежащего на дне ямы глубиной h', будет равна $E_p = -mgh'$ /см.рис. 81/. Отметим, что кинетическая энергия не может быть отрицательной.

В рассмотренном выше примере потенциальную энергию $E_p = mgh$ мы относили к телу 1. Однако, строго говоря, потенциальную энергию следует относить к системе взаимодействующих друг с другом тел. Так, в разобранном случае $E_p=mgh$ есть энергия системы Земля – тело I. Потенциальная энергия системы тел зависит от их расположения по отношению друг к другу.

Потенциальной энергией может обладать не только система взаимодействующих тел, но и отдельно взятое упруго деформированное тело /например, сжатая или растянутая пружина/. В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения отдельных частей тела /например, от расстояния между соседними витками пружины/.

Согласно /23-5/, как для сжатия, так и для растяжения пружины на величину x, необходимо затратить работу $A=\frac{1}{2}kx^2$. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Следовательно, зависимость E_p пружины от удлинения x имеет следующий вид:

$$E_p=\frac{kx^2}{2}. \qquad /26\text{-}12/$$

На рис. 82 эта зависимость показана графически.

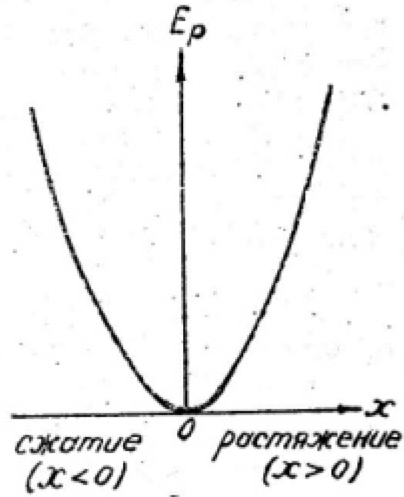


Рис. 82

Заметим, что не всякая система взаимодействующих друг с другом тел обладает потенциальной энергией. Взаимодействие должно быть таким, чтобы соответствующие силы были консервативными. Например, при перемещении тела I относительно тела 2, как показано на рис.83, тела взаимодействуют друг с другом с силой, обусловленной трением, и для такого перемещения необходимо совершить над этой системой тел некоторую работу. Однако способность этих тел совершать работу при этом не изменяется. Причина этого заключается в том, что

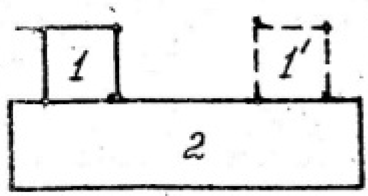


Рис. 83

силы трения не являются консерватизными.

<u>Полная механическая энергия системы тел</u>. В общем случае тело может обладать одновременно и кинетической и потенциальной энергией. Сумма этих энергий образует полную механическую энергию. Так, например, тело М, находящееся на высоте h над поверхностью Земли и движущееся относительно Земли со скоростью v, обладает полной энергией:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh. \qquad /26\text{-}13/$$

Точнее говоря, написанное выражение дает полную энергию системы Земля - тело: mgh есть взаимная потенциальная энергия этой системы, $\frac{mv^2}{2}$ - кинетическая энергия тела М, а кинетическая энергия Земли в рассматриваемой системе отсчета равна нулю, что и дает нам основание говорить об энергии /26-13/, как об энергии тела М.

Потенциальная и кинетическая энергия могут превращаться друг в друга. Рассмотрим случай свободного падения первоначально покоившегося тела с высоты h. До падения кинетическая энергия тела равна нулю /тело покоится/, а потенциальная равна mgh. В конце падения тело обладает скоростью

$$v = \sqrt{2gh} \qquad /26\text{-}14/$$

и, следовательно, кинетической энергией:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh,$$

но зато потенциальная энергия на высоте $h = 0$ будет равна нулю. Таким образом, потенциальная энергия превращается в эквивалентное количество кинетической энергии.

Тело, брошенное с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью v, обладает вначале кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальной энергией, равной нулю. Постепенно теряя скорость, тело сможет подняться на высоту h, связанную с начальной скоростью соотношением /26-14/. На высоте h скорость, а следовательно, и кинетическая энергия тела станет равной нулю, но зато появится потенциальная энергия в количестве, равном первоначальному запасу кинетической энергии.

В обоих случаях /падения и подъема тела вблизи поверхности Земли/ полная энергия тела остается неизменной. Легко убедиться[1] в том, что на любой промежуточной высоте $h'(0<h'<h)$ сумма

$$\frac{mv'^2}{2} + mgh'$$

/ v' - скорость на высоте h' / равна mgh или $\frac{mv^2}{2}$.

Этот результат получился потому, что тело находилось под действием только силы, обусловливающей наличие потенциальной энергии /сила mg есть внутренняя сила, действующая в системе Земля - тело/. Иначе обстоит дело при наличии внешних сил. За счет работы, совершаемой этими силами над телами, образующими систему, будет происходить изменение полной энергии этой системы. Пусть, например, первоначально покоившееся на поверхности Земли тело М окажется под действием силы f, большей веса тела mg и имеющей направление вверх по вертикали /эта сила может исходить только от тел, не входящих в систему Земля - тело М/. Тогда тело начнет подниматься с некоторым ускорением, вследствие чего его потенциальная и кинетическая энергия будут расти, причем увеличение полной энергии будет равно работе, совершенной над телом М внешней силой f.

Полная механическая энергия системы, состоящей из N тел, между которыми действуют консервативные силы,

---

1/ Рекомендуется проделать это в порядке упражнения.

слагается из потенциальной энергии системы как целого и из кинетической энергии системы, которая в свою очередь слагается из кинетических энергий отдельных тел, образующих систему:

$$E = E_p + E_\kappa = E_p + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad /26\text{-}15/$$

Закон сохранения энергии. Рассмотрим систему из N тел, в которой действуют только консервативные силы /см. рис. 84/. Предположим, что тело I переместилось по произвольной траектории в положение I'. При этом силы, с которыми воздействуют на тело I все остальные тела системы, совершат работу, величина которой не зависит от пути, по которому двигалось тело I, а определяется лишь начальным и конечным положением тела относительно всех других тел. Эта работа совершается за счет запаса потенциальной энергии, которой обладает вся система тел в целом. Если внешние силы отсутствуют, работа, совершенная внутренними силами над телом I, пойдет на увеличение его кинетической энергии [см. /26-8/].

Рис. 84

При перемещении всех N тел системы в новые положения над этими телами внутренние силы, действующие в системе, совершают работу, величина которой зависит только от начального и конечного расположения тел друг относительно друга. Если система замкнута, то есть внешние силы отсутствуют, эта работа пойдет на увеличение суммарной кинетической энергии всех тел системы.

Следовательно, каждому расположению тел друг относительно друга соответствует определенное значение потенциальной энергии E_p системы как целого. Изменение расположения тел сопровождается совершением над телами системы работы, равной убыли потенциальной энергии системы $E_{p1}-E_{p2}$. При отсутствии внешних сил эта работа идет на увеличение кинетической энергии системы $E_{k2}-E_{k1}$. Отсюда получается, что для замкнутой системы:

$$E_{p1}-E_{p2}=E_{k2}-E_{k1},$$

откуда

$$E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}.$$

Поскольку начальное /I/ и конечное /2/ расположения тел были взяты совершенно произвольно, можно утверждать, что

$$E=E_k+E_p=Const. \qquad /26\text{-}16/$$

Действие внешних сил может вызвать изменение взаимного расположения тел /то есть изменение потенциальной энергии системы/, либо изменение скоростей тел /то есть изменение кинетической энергии системы/. Таким образом, работа А, совершаемая над телами внешними силами, идет на приращение полной энергии системы:

$$A=E_2-E_1=\Delta E. \qquad /26\text{-}17/$$

Если работа внешних сил положительна, энергия системы возрастает. Если работа внешних сил отрицательна /в этом случае тела системы совершают над внешними телами положительную работу/, энергия системы уменьшается.

Соотношения /26-16/ и /26-17/ представляют собой содержание одного из основных законов механики /и физики вообще/ - з а к о н а с о х р а н е н и я э н е р г и и . В механике этот закон формулируется следующим образом: п о л н а я м е х а н и ч е с к а я э н е р г и я з а м к н у т о й с и с т е м ы т е л , м е ж д у к о т о р ы м и д е й с т в у ю т т о л ь к о к о н с е р в а т и в н ы е с и л ы , о с т а е т с я п о с т о я н н о й . Р а б о т а в н е ш н и х   с и л ,   с о в е р ш а е м а я   н а д   т е л а м и   с и с т е м ы ,   р а в н а   п р и р а щ е н и ю   п о л н о й   э н е р г и и   с и с т е м ы .

При наличии в системе неконсервативных сил /например, сил трения/ закон сохранения механической энергии перестает выполняться, так как действие таких сил приводит к превращению механической энергии в другие, немеханические, виды энергии. В этом случае выполняется более общий закон сохранения – в изолированной от любых внешних воздействий системе остается постоянной сумма всех видов энергии /включая и немеханические/.

Из /26-17/ следует, что энергия имеет такую же размерность, как и работа. Это дает возможность измерять энергию в тех же единицах, которые используются для измерения работы.

§ 27. Связь между потенциальной энергией и силой

Каждой точке потенциального поля соответствует с одной стороны некоторое значение вектора силы $\vec{f}$, с другой стороны – некоторое значение потенциальной энергии E_p . Следовательно, между силой и потенциальной энергией должна существовать определенная связь. Для установления этой связи вычислим элементарную работу ΔA , совершаемую силами поля при малом перемещении тела ΔS , происходящем вдоль произвольно выбранного направления в пространстве, которое мы обозначим буквой S /см. рис. 85/. Эта работа равна:

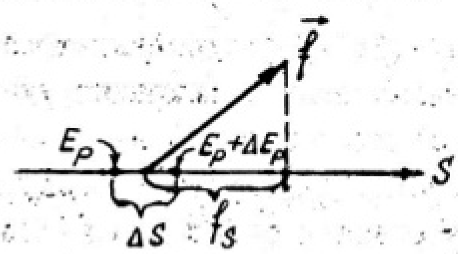


Рис. 85

$$\Delta A = f_s \Delta S, \qquad /27\text{-}1/$$

где f_s – проекция силы $\vec{f}$ на направление S .

Вместе с тем, поскольку в данном случае работа совершается за счет запаса потенциальной энергии E_p , она численно равна убыли потенциальной энергии $-\Delta E_p$ на отрезке оси ΔS :

$$\Delta A = -\Delta E_p . \qquad /27\text{-}2/$$

Сопоставляя /27-I/ и /27-2/, получаем:

$$f_s \Delta S = -\Delta E_p ,$$

откуда:

$$f_s = -\frac{\Delta E_p}{\Delta S} . \qquad /27\text{-}3/$$

Выражение /27-3/ дает среднее значение f_s на отрезке ΔS . Чтобы получить значение f_s в данной точке, нужно произвести предельный переход:

$$f_s = -\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta E_p}{\Delta S} . \qquad /27\text{-}4/$$

Поскольку E_p может изменяться не только при перемещении вдоль оси s , но также и при перемещениях вдоль других направлений, предел в формуле /27-4/ представляет собой так называемую частную производную от E_p по S :

$$f_s = -\frac{\partial E_p}{\partial s} . \qquad /27\text{-}5/$$

Соотношение /27-5/ справедливо для любого направления в пространстве, в частности и для направлений декартовых координатных осей x , y , z :

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ f_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ f_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{aligned}\right\} . \qquad /27\text{-}6/$$

Формулы /27-6/ определяют проекции вектора силы на координатные оси. Если известны эти проекции, оказывается определенным и сам вектор силы. В соответствии с с /2-8/:

$$\vec{f} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right). \quad /27-7/$$

В математике вектор

$$\frac{\partial a}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{k},$$

где a – скаляр, являющийся функцией x, y, z, называется градиентом этого скаляра и обозначается символом $grad\, a$. Следовательно, выражение, стоящее в скобках в формуле /27-7/, есть градиент потенциальной энергии, так что связь между потенциальной энергией и силой можно записать в виде:

$$\vec{f} = -grad\, E_p . \quad /27-8/$$

Пример. Возьмем в качестве примера поле сил тяжести. Ось z направим по вертикали вверх; тогда оси x и y окажутся горизонтальными /см.рис.86/. При таком выборе координатных осей потенциальная энергия будет иметь вид [см./26-II/] :

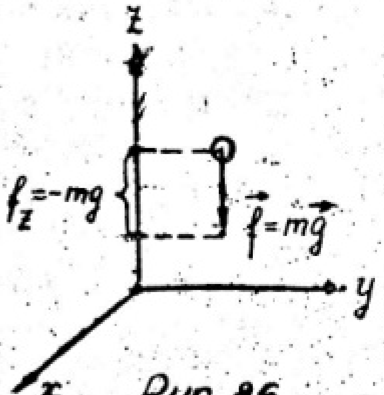


Рис.86

$$E_p = mgz + const.$$

Проекции силы на оси согласно /27-6/ равны:

$$f_x = 0; \; f_y = 0; \; f_z = -mg,$$

откуда следует, что сила равна mg и направлена в сторону, противоположную направлению z, то есть вниз по вертикали.

§ 28. Абсолютно упругий удар шаров

Абсолютно упругим ударом тел называется такой удар, который не сопровождается превращением механической энергии в другие, немеханические, виды энергии. В момент соударения тела испытывают упругие деформации, в результате чего кинетическая энергия тел полностью или частично превращается в потенциальную энергию упругой деформации. Вслед за этим первоначальная форма тел полностью восстанавливается, причем потенциальная энергия упругой деформации превращается снова в кинетическую энергию тел.

Таким образом, если соударяющиеся тела образуют замкнутую систему, при абсолютно упругом ударе выполняются два закона сохранения: закон сохранения количества движения и закон сохранения энергии.

Рассмотрим абсолютно упругий центральный удар шаров. Как уже указывалось в § 19, при центральном ударе соударение может произойти в двух случаях:

I/ если шары движутся навстречу друг другу и

2/ если один из шаров нагоняет другой /см.рис.58/.

Обозначим массы шаров m_1 и m_2, скорости шаров до удара $\vec{v}_{10}$ и $\vec{v}_{20}$ и, наконец, скорости шаров после удара $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Напишем уравнения сохранения количества движения и энергии:

$$m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad /28\text{-I}/$$

$$\frac{m_1\vec{v}_{10}^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{v}_{20}^{\,2}}{2} = \frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2}.\text{[1]} \qquad /28\text{-2}/$$

Преобразуем /28-I/ следующим образом:

$$m_1(\vec{v}_{10} - \vec{v}_1) = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_{20}). \qquad /28\text{-3}/$$

Учтя, что $(\vec{A}^2 - \vec{B}^2) = (\vec{A} + \vec{B})(\vec{A} - \vec{B})$, приведем /28-2/ к виду:

$$m_1(\vec{v}_{10} + \vec{v}_1)(\vec{v}_{10} - \vec{v}_1) = m_2(\vec{v}_2 + \vec{v}_{20})(\vec{v}_2 - \vec{v}_{20}). \qquad /28\text{-4}/$$

I/ См. /23-12/.

Разделив /28-4/ на /28-3/, получим:

$$\vec{v}_{10} + \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{20} . \qquad /28-5/$$

Умножая /28-5/ на m_2 и вычитая результат из /28-3/, а затем умножая /28-5/ на m_1 и складывая результат с /28-3/, получим векторы скоростей шаров после удара:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{2m_2 \vec{v}_{20} + (m_1 - m_2)\vec{v}_{10}}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2 &= \frac{2m_1 \vec{v}_{10} + (m_2 - m_1)\vec{v}_{20}}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} . \qquad /28-6/$$

Для численных подсчетов спроектируем /28-6/ на направление вектора $\vec{v}_{10}$:

$$v_1 = \frac{\mp 2m_2 v_{20} + (m_1 - m_2) v_{10}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1 v_{10} \mp (m_2 - m_1) v_{20}}{m_1 + m_2} ,$$

где v_{10} и v_{20} - модули, а v_1 и v_2 - проекции соответствующих векторов. Верхний знак "-" соответствует случаю шаров, движущихся навстречу друг другу; нижний знак "+" - случаю, когда первый шар нагоняет второй.

Отметим, что скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми. В самом деле, приравняв друг другу выражения /28-6/ для $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и произведя преобразования, получим:

$$\vec{v}_{10} = \vec{v}_{20} .$$

Следовательно, для того, чтобы скорости шаров после удара оказались одинаковыми, необходимо, чтобы они были одинаковыми до удара. Однако в этом случае, очевидно, соударение не может произойти.

Отсюда следует, что условие равенства скоростей шаров после удара не совместимо с законом сохранения энергии. Таким образом, при неупругом ударе механическая энергия не сохраняется – она частично переходит в так называемую внутреннюю энергию соударяющихся тел, вследствие чего эти тела нагреваются.

Рассмотрим случай, когда массы соударяющихся шаров равны: $m_1 = m_2$. Из /28-6/ следует, что при этом условии:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{20}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{10} \; ,$$

то есть шары при соударении обмениваются скоростями.

В частности, если один из шаров одинаковой массы, например, второй до соударения покоится, то после удара он движется с такой же скоростью, какую имел первоначально первый шар; первый же шар после удара оказывается неподвижным.

С помощью формул /28-6/ можно определить скорость шара после упругого удара о неподвижную или движущуюся стенку /которую можно рассматривать как шар бесконечно большой массы m_2 и бесконечно большого радиуса/. Деля числитель и знаменатель выражений /28-6/ на m_2 и пренебрегая членами, содержащими множитель m_1/m_2, получаем:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{20} \; .$$

Как следует из полученного результата, скорость стенки остается неизменной. Скорость же шара, если стенка неподвижна / $\vec{v}_{20} = 0$/, меняет направление на противоположное; в случае движущейся стенки, кроме того, изменяется также величина скорости шара /возрастает на $2v_{20}$, если стенка движется навстречу шару, и убывает на $2v_{20}$, если стенка "уходит" от догоняющего ее шара/.

Глава IУ. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

§ 29. Силы инерции

Как уже отмечалось /см. § IO/, законы Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета. Любая неинерциальная система отсчета будет двигаться относительно любой инерциальной системы с некоторым ускорением $\vec{w}_0$; в противном случае она была бы также инерциальной. Отметим, что, поскольку все инерциальные системы движутся друг относительно друга без ускорения, ускорение $\vec{w}_0$ какой-либо неинерциальной системы по отношению ко всем инерциальным системам будет одно и то же.

Если какое-либо тело /имеется в виду материальная точка/ движется относительно неинерциальной системы с ускорением $\vec{w}'$, то его ускорение $\vec{w}$ относительно любой инерциальной системы отсчета будет равно:

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}', \qquad /29\text{-}I/$$

где $\vec{w}_0$ - ускорение неинерциальной системы относительно инерциальной.

Пусть результирующая всех сил, обусловленных воздействием на данное тело со стороны других тел, равна $\vec{f}$. Тогда согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{w} = \frac{1}{m}\vec{f} .$$

Ускорение же относительно неинерциальной системы отсчета можно в соответствии с /29-I/ представить в виде:

$$\vec{w}' = \vec{w} - \vec{w}_0 = \frac{1}{m}\vec{f} - \vec{w}_0 .$$

Таким образом, если даже результирующая всех сил, приложенных к телу, будет равна нулю, тело будет двигаться

 II9?-IOOO

по отношению к неинерциальной системе отсчета с ускорением $-\vec{w}_0$, то есть так, как если бы оно находилось под воздействием силы, которая равна $-m\vec{w}_0$.

Из сказанного вытекает, что при описании движения в неинерциальных системах отсчета можно пользоваться уравнениями динамики, справедливыми только для инерциальных систем, если наряду с силами, обусловленными воздействием тел друг на друга, учитывать так называемые с и л ы   и н е р ц и и $\vec{f}_{in}$, которые следует полагать равными произведению массы тела на взятое с обратным знаком ускорение неинерциальной системы отсчета по отношению к инерциальной системе:

$$\vec{f}_{in} = -m\vec{w}_0 . \qquad /29\text{-}2/$$

Тогда уравнение второго закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета будет иметь вид:

$$m\vec{w}' = \vec{f} + \vec{f}_{in} ,$$

где $\vec{w}'$ – ускорение тела по отношению к неинерциальной системе отсчета, $\vec{f}$ – сумма всех действующих на тело сил, обусловленных взаимодействием его с другими телами, $\vec{f}_{in}$ – сила инерции.

Поясним сказанное следующим примером. К кронштейну, закрепленному на тележке, подвешен на нити груз /см.рис.87/. Пока тележка покоится или движется без ускорения, нить будет расположена вертикально и вес тела $\vec{P}$ будет уравновешиваться реакцией нити $\vec{f}_r$.

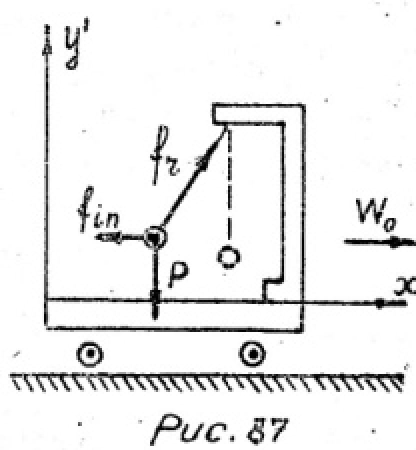


Рис. 87

Теперь приведем тележку в поступательное движение с ускорением $\vec{w}_0$. Нить отклонится от вертикали на такой угол, чтобы результирующая сил $\vec{P}$ и $\vec{f}_r$ обеспечивала ускорение тела, равное $\vec{w}_0$. Относительно системы отсчета, связанной с тележкой, тело покоится, несмотря на то, что результирующая сил $\vec{P}$ и $\vec{f_r}$ отлична от нуля. Отсутствие ускорения тела по отношению к этой системе отсчета можно формально объяснить за счет того, что, кроме сил $\vec{P}$ и $\vec{f_r}$, на тело действует еще и сила инерции $\vec{f}_{in} = - m\vec{w}_0$.

Введение сил инерции дает возможность описывать движение тел в любых /как инерциальных, так и неинерциальных/ системах отсчета с помощью одних и тех же уравнений движения.

Следует отчетливо понимать, что силы инерции нельзя ставить в один ряд с такими силами, как упругие, гравитационные силы и силы трения, то есть силами, которые обусловлены воздействием на тело со стороны других тел. Силы инерции обусловлены не воздействием одних тел на другие, а свойствами той системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления. В этом смысле силы инерции можно назвать фиктивными силами.

Введение в рассмотрение сил инерции не является принципиально необходимым. В принципе любое движение можно всегда рассмотреть по отношению к инерциальной системе отсчета. Однако практически часто представляет интерес как раз движение тел по отношению к неинерциальным системам отсчета, например, по отношению к земной поверхности. Введение сил инерции дает возможность решить соответствующую задачу непосредственно по отношению к такой системе отсчета, что, кстати сказать, обычно оказывается значительно проще, чем рассмотрение движения в инерциальной системе.

§ 30. Центробежные силы инерции

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг перпендикулярной ему оси z с угловой скоростью ω /см.рис.88/. Вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, прикрепленный к центру диска с помощью пружины. Шарик при вращении занимает такое положение на спице, при котором сила реакции пружины оказывается равной произведению массы шарика на центростремительное ускорение $\omega^2 r$/ r - расстояние шарика от центра диска/.

Относительно системы отсчета, связанной с диском, шарик покоится, что можно, как мы видели, объяснить тем, что в этой системе отсчета кроме силы, действующей на стороны пружины, к шарику приложена сила инерции:

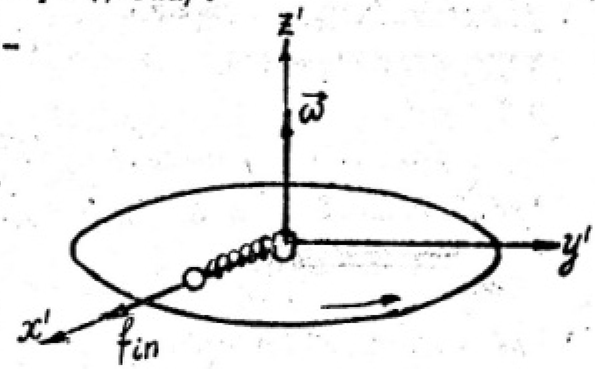


Рис.88

$$f_{in} = m\omega^2 r, \qquad /30\text{-}I/$$

действующая вдоль радиуса в направлении от центра диска.

Силу инерции /30-I/, возникающую во вращающейся /по отношению к инерциальным системам/ системе отсчета, называют **центробежной силой инерции**.

Центробежную силу инерции не следует смешивать с центробежной силой, о которой шла речь в § 22. Центробежная и центростремительная силы приложены к разным телам /в рассмотренном примере - к пружине и к шарику/. Сила, которая в инерциальной системе является центростремительной, и центробежная сила инерции приложены к одному и тому же телу /к шарику/.

Различные точки во вращающейся системе отсчета обладают различным по величине и направлению ускорением $\vec{w_0}$ по отношению к инерциальной системе. В соответствии с этим центробежная сила инерции зависит от положения тела во вращающейся системе отсчета.

Центробежная сила инерции действует на тело во вращающейся системе отсчета независимо от того, покоится ли тело в этой системе /как мы предполагали до сих пор/, или движется относительно нее со скоростью $\vec{v'}$.

При точном решении задач о движении тел относительно земной поверхности нужно учитывать центробежную силу инерции, равную $m\omega_з^2 R_з \cos\varphi$, где m - масса тела, $\omega_з$ - угловая скорость вращения Земли вокруг ее оси, $R_з$ - радиус земного шара, φ - широта местности /см.рис.53 на стр. 66/.

<u>Упражнение</u>. Показать, что центробежную силу инерции можно представить в виде:

$$m(\vec{\omega} \times \vec{r}') \times \vec{\omega},$$

где m - масса тела, $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращающейся системы отсчета, $\vec{r}'$ - радиус-вектор тела относительно начала вращающейся системы отсчета, совпадающего с одной из точек оси вращения /см. рис. 89/.

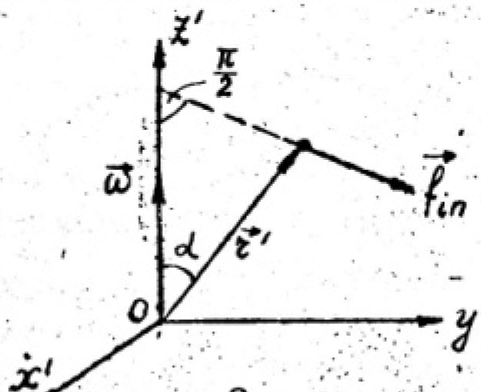


Рис. 89

§ 31. Силы Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы инерции, появляется еще одна сила инерции, которая называется **силой Кориолиса** или **кориолисовой силой инерции**.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую ОА /см.рис.90-а/. Запустим в направлении от О к А шарик со скоростью $\vec{v}'$. Если диск не вращается, шарик будет катиться вдоль прочерченной нами прямой. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик, запущенный из О в направлении к А, будет катиться по изображенной пунктиром кривой ОВ, причем его скорость относительно диска $\vec{v}'$ будет изменять свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила $\vec{f}_к$, перпендикулярная его скорости $\vec{v}'$.

Чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой, нужно сделать направляющую, например, в виде ребра ОА, показанного на рис. 90-б. При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой $\vec{f}_r$. Относительно вращающейся системы /диска/ шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно объяснить тем, что сила $\vec{f}_r$ уравновешивается приложенной к шарику силой инерции $\vec{f}_к$, перпендикулярной скорости $\vec{v}'$. Сила $\vec{f}_к$ и есть кориолисова сила инерции.

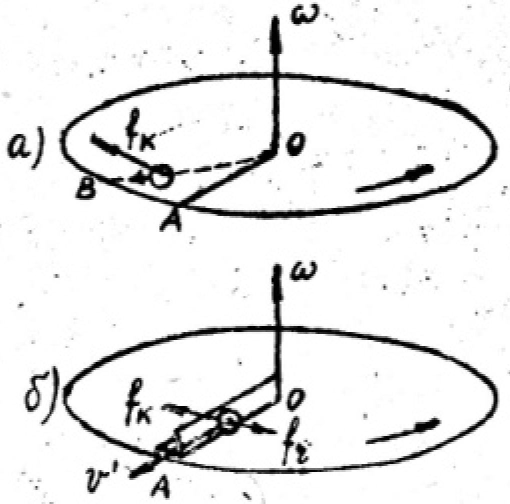


Рис. 90

Согласно /29-2/ и /29-I/ сила инерции равна:

$$\vec{f}_{in} = -m\vec{w}_o = -m(\vec{w} - \vec{w}').$$

Таким образом, для определения силы инерции, приложенной к телу, движущемуся во вращающейся системе отсчета, нужно найти ускорение тела $\vec{w}$ относительно инерциальной системы и, вычтя из него ускорение $\vec{w}'$ относительно вращающейся системы, умножить полученный вектор на массу тела m и изменить знак на обратный.

Начнем с нахождения силы Кориолиса для некоторых частных случаев.

Случай I. Тело движется в радиальном направлении с постоянной скоростью $\vec{v}'$, перпендикулярной оси вращения /см. рис. 91/. Поскольку $\vec{v}'$ постоянно, ускорение $\vec{w}'$

равно нулю, и сила инерции равна $-m\vec{w}$.

Пусть в некоторый момент времени t тело находится в положении I. В этот момент скорость $\vec{v}$ относительно неподвижной системы отсчета слагается из двух составляющих: составляющей вдоль радиуса $\vec{v}_{\parallel}$, равной скорости тела $\vec{v}'$, и перпендикулярной радиусу составляющей $\vec{v}_{\perp}$, равной по модулю ωr / r - расстояние тела от оси вращения, ω - угловая скорость вращающейся системы отсчета/.

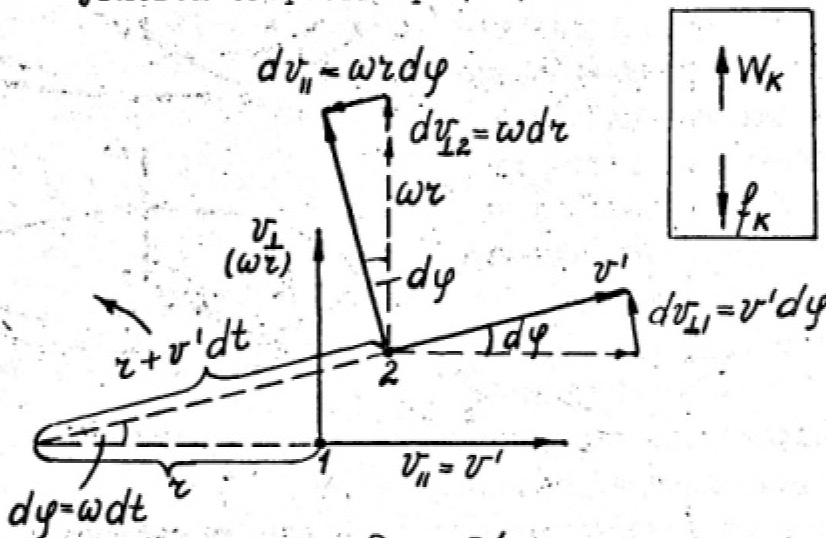


Рис. 91

За время dt прямая, вдоль которой движется тело, повернется на угол $d\varphi=\omega dt$, а тело сместится вдоль этой прямой на отрезок $dr=v'dt$ и окажется в положении 2. В результате обе составляющие скорости $\vec{v}$, получив соответствующее перпендикулярное им приращение, повернутся на угол $d\varphi$. Кроме того, модуль составляющей $\vec{v}_{\perp}$ возрастет на $\omega dr=\omega v'dt$. Это происходит потому, что в положении 2 составляющая $\vec{v}$, перпендикулярная радиусу, вдоль которого движется тело, становится равной $\omega(r+dr)$.

Таким образом, приращение $d\vec{v}$, которое получает за время dt скорость $\vec{v}$, можно представить как векторную сумму трех приращений /см.рис.91/: $d\vec{v}_{\perp 1}$, $d\vec{v}_{\perp 2}$ и $d\vec{v}_{\parallel}$, из которых первые два перпендикулярны вектору $\vec{v}'$, а третье направлено вдоль той же прямой, что и $\vec{v}'$ /необходимо иметь в виду малость $d\varphi$ /.

Разделив соответствующие составляющие $d\vec{v}$ на dt, мы получим составляющие ускорения $\vec{w}$ по отношению к неподвижной системе. Составляющая $\vec{w}_{\parallel}$ оказывается равной по модулю:

$$w_{\parallel} = \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \omega r \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 r.$$

Эта составляющая не зависит от $\vec{v}'$; она существует и при $\vec{v}' = 0$. Произведение этой составляющей на $-m$ дает уже известную нам центробежную силу инерции.

Составляющая $d\vec{v}_{\perp}$, равная сумме $d\vec{v}_{\perp 1}$ и $d\vec{v}_{\perp 2}$, после деления на dt дает составляющую $\vec{w}_{\perp}$ ускорения $\vec{w}$, модуль которой равен:

$$w_{\perp} = \frac{dv_{\perp 1}}{dt} + \frac{dv_{\perp 2}}{dt} = v' \frac{d\varphi}{dt} + \omega \frac{dr}{dt} = v'\omega + \omega v' = 2\omega v'.$$

Составляющая $\vec{w}_{\perp}$ /в дальнейшем мы ее будем обозначать $\vec{w}_k$/ перпендикулярна векторам $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$ и может быть представлена в виде:

$$\vec{w}_k = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') \qquad /31\text{-}1/$$

/вектор $\vec{\omega}$ на рис. 91 перпендикулярен плоскости чертежа и направлен на нас/.

Ускорение /31-1/ называется **кориолисовым ускорением**. Умножив его на m и изменив знак на обратный, получим кориолисову силу инерции:

$$\vec{f}_k = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega}). \qquad /31\text{-}2/$$

Случай 2. Относительно вращающейся системы отсчета тело движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения, причем центр окружности лежит на этой оси /см.рис.92/. По отношению к вращающейся системе тело обладает центростремительным ускорением, которое равно:

$$\vec{w}' = \frac{v'^2}{r} \cdot \vec{n}, \qquad /31\text{-}3/$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный $\vec{v}'$ и имеющий направление к центру вращения.

Скорость тела относительно неподвижной системы отсчета будет слагаться из двух перпендикулярных радиусу r составляющих: v' и ωr. В зависимости от направления скорости v' и направления вращения системы эти составляющие будут иметь либо одинаковые, либо противоположные направления. Модуль скорости $\vec{v}$ будет равен:

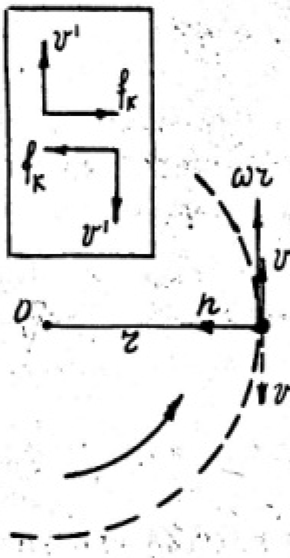


Рис. 92

$$v = |v' \pm \omega r|, \qquad /31\text{-}4/$$

где верхний знак /"+"/ соответствует одинаковым, а нижний знак /"–"/ противоположным направлениям скоростей v' и ωr.

По отношению к неподвижной системе тело также будет двигаться равномерно по окружности, так что ускорение $\vec{w}$ можно записать следующим образом:

$$\vec{w} = \frac{v^2}{r}\cdot\vec{n} = \frac{(v' \pm \omega r)^2}{r}\cdot\vec{n} = \frac{v'^2}{r}\cdot\vec{n} + \omega^2 r\cdot\vec{n} \pm 2v'\omega\cdot\vec{n}.$$

Первое слагаемое представляет собой ускорение $\vec{w}'$ относительно вращающейся системы [см. /31-3/]. Следовательно, $\vec{w}_0 = \vec{w} - \vec{w}'$ равно:

$$\vec{w}_0 = \omega^2 r\cdot\vec{n} \pm 2v'\omega\cdot\vec{n}.$$

В соответствии с этим выражением сила инерции оказывается состоящей из двух компонент:

$$\vec{f}_{in} = -m\vec{w}_0 = -m\omega^2 r\cdot\vec{n} \mp 2mv'\omega\cdot\vec{n}. \qquad /31\text{-}5/$$

Первая из этих сил есть центробежная сила инерции, вторая – кориолисова сила $\vec{f}_к$.

Сила $\vec{f}_к$ перпендикулярна векторам $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$ и имеет направление: а/ от центра, если скорости v' и ωr совпадают по направлению [верхний знак в /31-5/], и б/ к центру, если скорости v' и ωr направлены в противоположные стороны /нижний знак/. Очевидно, что оба эти случая можно объединить в следующем выражении:

$$\vec{f}_к = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega}). \qquad /31\text{-}6/$$

Полученное выражение совпадает с /31-2/.

Случай 3. Скорость $\vec{v}'$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения и ориентирована относительно этой оси произвольным образом /см. рис. 93/. Разложим $\vec{v}'$ на две составляющие: $\vec{v}_1'$ - параллельную r и $\vec{v}_2'$ - перпендикулярную r. Этим составляющим соответствуют согласно /31-2/ и /31-6/ кориолисовы силы:

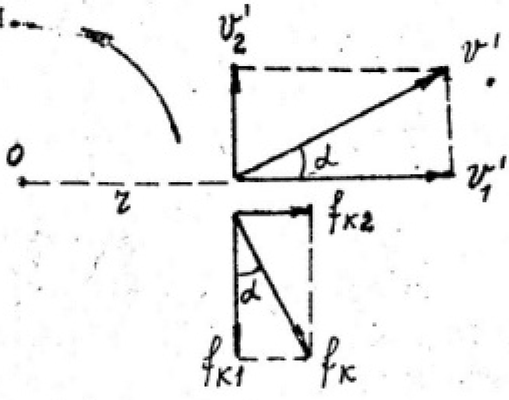


Рис. 93

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_{к1} &= 2m(\vec{v}_1' \times \vec{\omega}); \; f_{к1} = 2mv_1'\omega \\ \vec{f}_{к2} &= 2m(\vec{v}_2' \times \vec{\omega}); \; f_{к2} = 2mv_2'\omega \end{aligned}\right\} \; /31\text{-}7/$$

Результирующая сила $\vec{f}_к = \vec{f}_{к1} + \vec{f}_{к2}$ имеет модуль:

$$f_к = \sqrt{f_{к1}^2 + f_{к2}^2} = 2m\omega\sqrt{v_1'^2 + v_2'^2} = 2mv'\omega.$$

Поскольку в соответствии с /31-7/ $f_{к1} : f_{к2} = v_1' : v_2'$, сила $\vec{f}_к$ оказывается перпендикулярной скорости $\vec{v}'$ /см. рис. 93/ и можно написать, что:

$$\vec{f}_к = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega}). \qquad /31\text{-}8/$$

Случай 4. Скорость $\vec{v}'$ параллельна оси вращения /см. рис. 94/. Скорость v относительно неподвижной системы слагается из двух взаимно перпендикулярных скоростей: v' и ωr. За счет вращения изменяется только составляющая ωr, причем изменение соответствует ускорению $\omega^2 r \cdot \vec{n}$. Следовательно, сила инерции равна $-m\omega^2 r \cdot \vec{n}$, то есть является центробежной силой инерции. Кроме этой никаких других сил инерции нет / $f_k = 0$/.

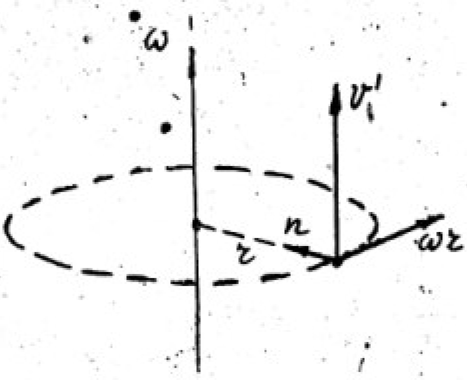


Рис. 94

Теперь, зная результат для рассмотренных частных случаев, можно найти выражение кориолисовой силы в самом общем случае, когда скорость $\vec{v}'$ имеет произвольное направление относительно вращающейся системы отсчета /см. рис. 95/.

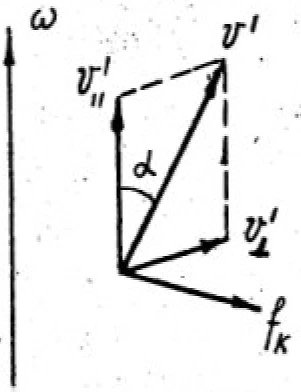


Рис. 95

Разложим $\vec{v}'$ на две составляющие: $\vec{v}_{\parallel}'$ - параллельную оси вращения системы и $\vec{v}_{\perp}'$ - лежащую в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Составляющая $\vec{v}_{\perp}'$ равна по модулю $v' \sin\alpha$, где α - угол между направлениями векторов $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$.

Составляющая $\vec{v}_{\parallel}'$, как мы видели, не приводит к возникновению кориолисовой силы инерции. Составляющей $\vec{v}_{\perp}'$ согласно /31-8/ соответствует сила Кориолиса:

$$\vec{f}_k = 2m(\vec{v}_{\perp}' \times \vec{\omega}). \qquad /31\text{-}9/$$

Модуль этой силы равен $2\, m v_{\perp}' \omega = 2\, m v' \omega \sin\alpha$. Направлена сила /31-9/ перпендикулярно векторам $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$. Это дает нам основание написать выражение для $\vec{f}_k$ в следующем виде:

$$\vec{f}_k = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega}). \qquad /31\text{-}10/$$

Это выражение определяет силу Кориолиса в любом случае. Легко убедиться в том, что результаты, полученные в четырех рассмотренных частных случаях, могут быть получены как следствие общего выражения /3I-I0/.

Отметим, что сила Кориолиса всегда лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

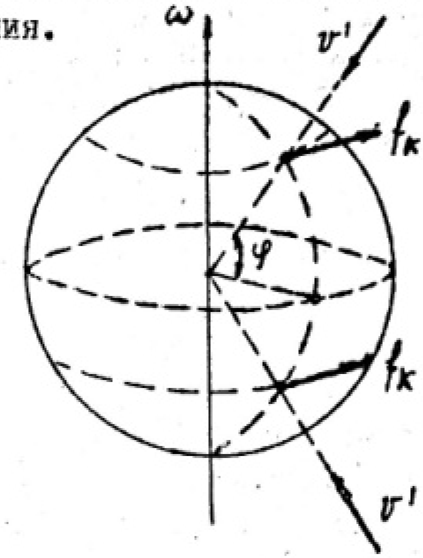


Рис. 96

При истолковании явлений, связанных с движением тел относительно земной поверхности, в ряде случаев необходимо учитывать влияние кориолисовых сил. Например, при свободном падении тел на них действует кориолисова сила, обусловливающая отклонение тел к востоку от линии отвеса /см.рис.96/. Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах.

Летящий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции /см.рис.97/. При выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу - в южном. При стрельбе вдоль меридиана на юг направления отклонения будут противоположными. При стрельбе вдоль параллели силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в направлении на запад, и поднимать его кверху, если выстрел произведен в восточном направлении.

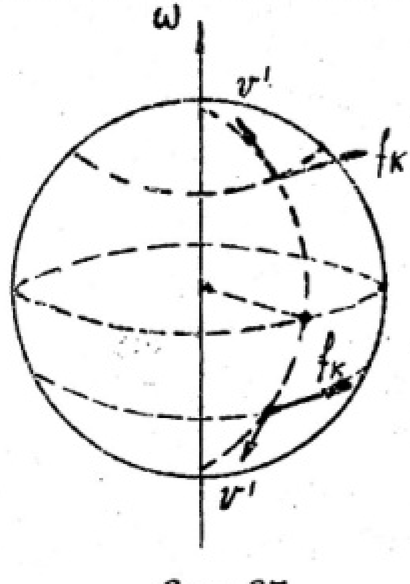


Рис. 97

Предоставляем читателю самому убедиться в том, что сила Кориолиса, действующая на тело, движущееся вдоль меридиана в любом направлении /на север или на юг/, направлена по отношению к направлению движения вправо в северном полушарии и влево в южном полушарии. Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый берег в южном полушарии. Эти же причины обусловливают неодинаковый износ рельсов, наблюдаемый при двухколейном движении.

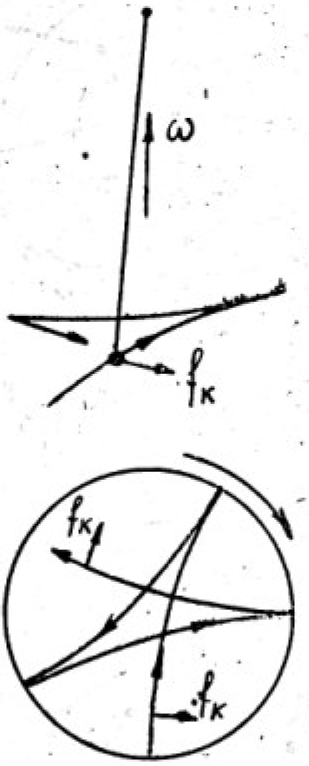


Рис. 98

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника. На рис. 98 показана траектория груза маятника /для простоты предположено, что маятник находится на полюсе/. На северном полюсе сила Кориолиса будет все время направлена вправо по ходу маятника, на южном полюсе - влево. В итоге траектория имеет вид розетки, показанной на нижнем из рис. 98.

Как следует из рисунка, плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, причем за сутки она совершает один оборот. Относительно гелиоцентрической системы отсчета дело обстоит так, что плоскость качаний остается неизменной, а Земля поворачивается относительно нее, делая за сутки один оборот.

Можно показать, что на широте φ плоскость качаний маятника поворачивается за сутки на угол $2\pi\sin\varphi$.

Таким образом, наблюдения за вращением плоскости качаний маятника /маятники, предназначенные для этой цели, называются маятниками Фуко/ дают непосредственное доказательство вращения Земли вокруг ее оси.

Тип.МИФИ, зак.1098-1000, 16/XII-58 г.