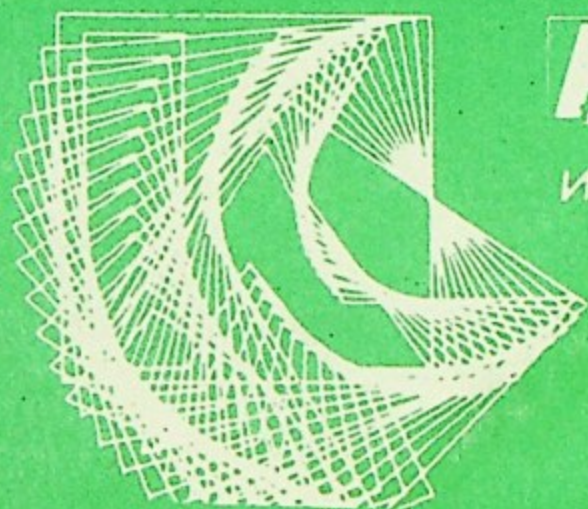


621.38
М 32
МФН

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Э.С. Масунов С.М. Полозов



ФАКУЛЬТЕТ
АВТОМАТИКИ
И ЭЛЕКТРОНИКИ

Лабораторный практикум по курсу
**«ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ И
ТЕХНОЛОГИИ»**

Часть 1
ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ

Москва 2004

621.38
173

Э.С. Масунов С.М. Полозов

Лабораторный практикум по курсу

**“ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ И
ТЕХНОЛОГИИ”**

Часть 1

ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ

Утверждено к изданию
советом факультета «А»



Москва 2004

УДК 621.384.6(075)

ББК 22.338я7

М32

Масунов Э.С., Полозов С.М. Практикум по курсу «Электрофизические установки и технологии» Ч. 1. Линейные ускорители. Учебное пособие. М.: МИФИ, 2004 – 72 с.

Данный практикум включает в себя пять компьютерных лабораторных работ, проводимых в рамках курса «Электрофизические установки и технологии». Лабораторные работы состоят из теоретической части и рабочего задания. Практикум позволит студентам углубить свое знание теории ускорителей заряженных частиц.

Пособие предназначено для студентов старших курсов МИФИ, обучающихся по специальности «Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника», но может быть полезно и студентам других вузов и специальностей.

Рецензент А.В. Нестерович

Утверждено редсоветом МИФИ
в качестве учебного пособия

© Московский инженерно-физический
институт (государственный университет), 2004

ВВЕДЕНИЕ

Данный практикум включает в себя пять лабораторных работ, проводимых в компьютерном классе кафедры «Электрофизические установки». Все лабораторные работы выполняются в рамках курса «Электрофизические установки и технологии» Часть 1. Линейные ускорители. Данные лабораторные работы подготовлены авторами пособия в 2000 – 2002 годах и проводятся в течение последних трех лет со студентами групп А6-06 и А6-07.

Цель проведения лабораторного практикума состоит в более глубоком усвоении студентами наиболее сложных теоретических разделов курса «Электрофизические установки и технологии». В сборник включены лабораторные работы, связанные с изучением фазового движения пучков заряженных частиц в электронных и ионных ускорителях и с анализом процесса группировки пучка в волноводном группирователе. На примере тонких линз рассматривается расчет простейшей системы поперечной фокусировки пучков. На примере системы с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой проводится ознакомление с методами численного моделирования динамики пучков в ускорителях. Кроме того, в практикум включены краткие методические указания по работе с математическим пакетом Mathsoft © Mathcad [1], с использованием которого подготовлено большинство из предлагаемых лабораторных работ. При выполнении лабораторных работ от студента требуется лишь общее знакомство с элементами программирования.

Описание лабораторных работ построено по одинаковой схеме, содержащей краткое изложение теоретических основ, описание математической модели и программы, с использованием которой проводится лабораторная работа, порядок выполнения работы, требования к оформлению отчета и контрольные вопросы и задачи.

Следует отметить, что в рамках курса «Электрофизические установки и технологии» пособие по циклу лабораторных работ подготовлено впервые.

ПРИНЦИП АВТОФАЗИРОВКИ. ФАЗОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ИОННОГО ПУЧКА В ЛИНЕЙНОМ УСКОРИТЕЛЕ НА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЕ

Цель работы – закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; изучение особенностей фазового движения ионов в нерелятивистском случае; определение области устойчивости фазовых колебаний в процессе ускорения ионного пучка.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим ускорение частиц в поле бегущей волны в линейном ускорителе ионов (подробнее см. в [2-4]). Выберем в пучке частицу, скорость которой v_z совпадает с фазовой скоростью волны v_ϕ ($v_z = v_\phi$). Эту частицу будем в дальнейшем называть синхронной. Фаза этой частицы φ_s будет постоянной в процессе ускорения (рис. 1.1). Фазой частицы в поле волны назовем величину

$$\varphi = \int k_z dz - \omega t, \quad (1.1)$$

где ω – частота ВЧ поля, k_z – продольное волновое число:

$$k_z = \frac{\omega}{v_\phi}. \quad (1.2)$$

Прирост энергии синхронной частицы пропорционален произведению амплитуды ВЧ поля на косинус синхронной фазы $E_{\max} \cos \varphi_s$. Рассмотрим другую частицу в пучке, фаза которой меньше синхронной ($\varphi < \varphi_s$). Действующая на эту частицу продольная сила волны будет больше силы, действующей на синхронную частицу. Следовательно, она будет получать больший прирост энергии, чем синхронная частица и будет «догонять» синхронную частицу. После того, как частица обгонит по фазе синхронную, действующая на нее величина поля станет меньше, чем поле, действующее на синхронную. Прирост энергии частицы станет меньше, чем у синхронной частицы и она будет двигаться назад по фазе. Таким образом, частицы в пучке будут совершать колебания вблизи синхронной частицы. Этот эффект получил название автофазировки

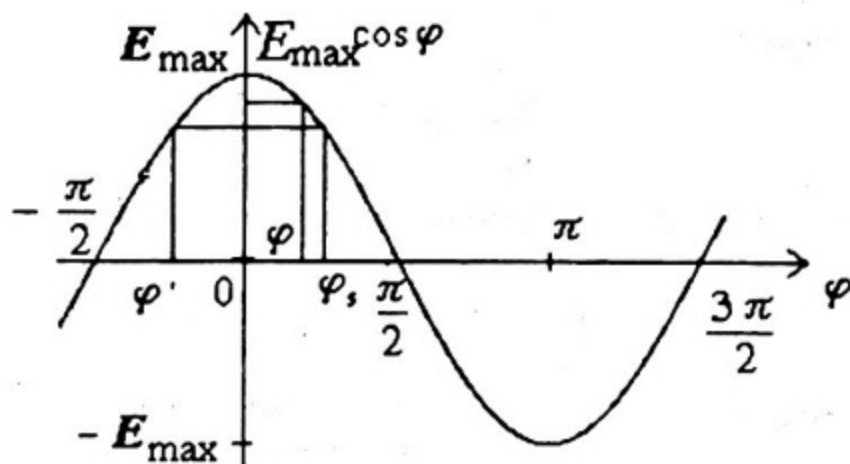


Рис. 1.1. Ускорение частиц ВЧ полем

(открыт В.И. Векслером в 1944 г. и независимо Дж. Макмиланом в 1945 г.). Рассмотрим теперь частицу в области слева от максимума поля (см. $\varphi' = -\varphi_s$ на рис. 1.1) и имеющую скорость, совпадающую с фазовой скоростью волны. Около этой частицы фазовые колебания совершаться не будут. Действительно, частицы, имеющие фазу, меньшую φ' будут получать меньший прирост энергии и отставать от частицы с фазой φ' . Частицы, имеющие большую фазу, будут получать больший прирост энергии и опережать частицу с фазой φ' . Таким образом, очевидно, что синхронная фаза должна находиться в пределах $0 < \varphi_s < \pi/2$.

После качественного рассмотрения принципа автофазировки перейдем к более подробному анализу фазового движения. Запишем уравнение движения заряженной частицы в ВЧ поле бегущей волны:

$$\frac{dp}{dt} = e \cdot E_{\max} \cos \varphi, \quad (1.3)$$

где e — заряд электрона, $E_{\max}$ — амплитуда ВЧ поля, p — импульс частицы. В нерелятивистском случае импульс равен произведению массы покоя на скорость: $p = mv$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} \cdot E_{\max} \cos \varphi. \quad (1.4)$$

Подставив значение k_z в формулу (1.3) и преобразовав с учетом

$v_s = v_s$, получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \left(\frac{v}{v_s} - 1 \right). \quad (1.5)$$

Зависимость скорости синхронной частицы от времени определяется из уравнения:

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{e}{m} \cdot E_{\max} \cos \varphi_s. \quad (1.6)$$

Вычтем уравнение (1.6) из (1.2) и рассмотрим, как будет меняться скорость произвольной частицы относительно синхронной:

$$\frac{d(v - v_s)}{dt} = \frac{e}{m} \cdot E_{\max} (\cos \varphi - \cos \varphi_s). \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.5) и (1.7) можно получить первый интеграл уравнения движения (гамильтониан). Для этого следует домножить правую часть уравнения (1.7) на левую часть уравнения (1.5) и, наоборот, правую часть уравнения (1.5) на левую часть уравнения (1.7). Полученное выражение является полным дифференциалом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot (v - v_s)^2 \right) = \frac{e}{m} \cdot \frac{E_{\max} \cdot v_s}{\omega} (\cos \varphi - \cos \varphi_s) \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.8)$$

Проинтегрировав его по времени можно найти гамильтониан системы H , величина которого определяется начальными условиями:

$$\frac{(v - v_s)^2}{2} - \frac{e \cdot E_{\max} \cdot v_s}{m \cdot \omega} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s) = H. \quad (1.9)$$

Полученное уравнение связывает величину отклонения скорости произвольной частицы от скорости синхронной частицы $(v - v_s)$ с величиной фазы φ . В дальнейшем это уравнение удобно анализировать на фазовой плоскости $(v - v_s, \varphi)$. Каждому значению H соответствует своя траектория на фазовой плоскости $(v - v_s, \varphi)$. Когда траектория замкнута, то фазовое движение будет устойчивым (финитное движение).

Физический смысл интеграла состоит в том, что для каждой фазовой траектории сумма кинетической T и потенциальной энергии U взаимодействия частицы с ВЧ полем в системе координат, связанной с волной, является постоянной величиной:

$$T + U = H. \quad (1.10)$$

Таким образом, выражение для гамильтониана позволяет найти

потенциальную функцию для частицы в электрическом поле в зависимости от фазы:

$$U = -\frac{e \cdot E_{\max} \cdot v_s}{m \cdot \omega} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s). \quad (1.11)$$

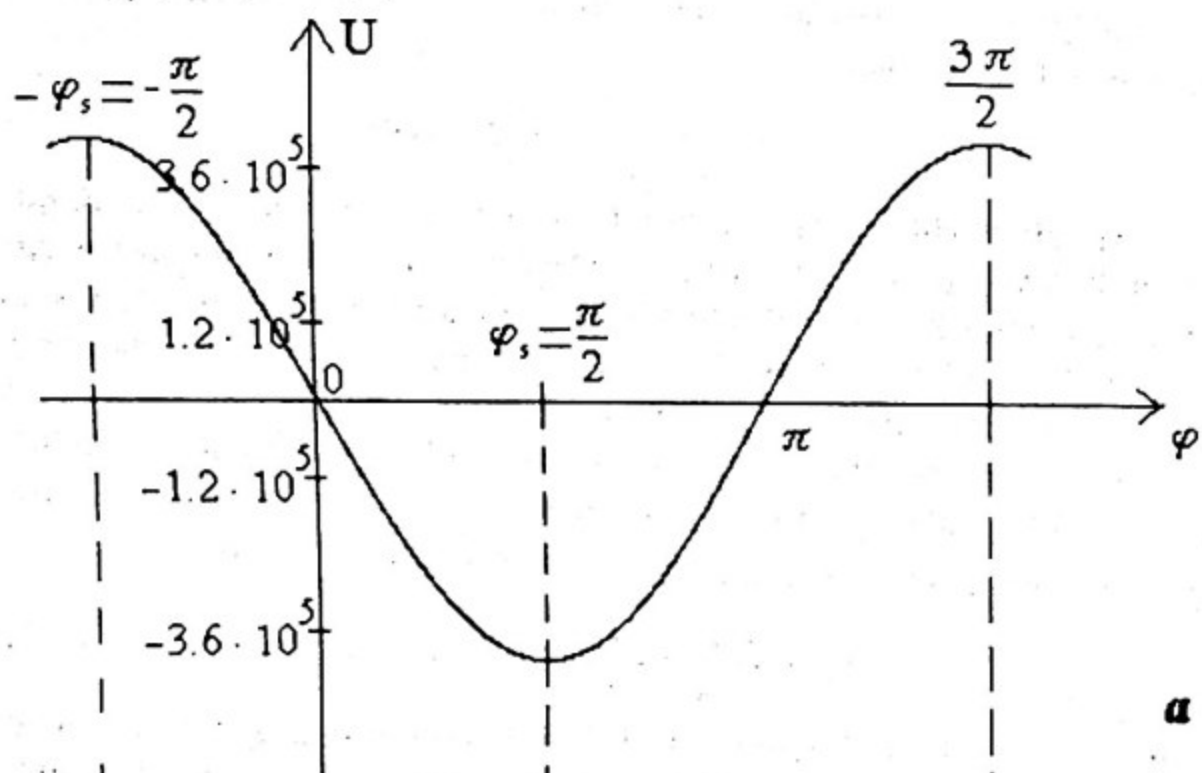
По аналогии с тем, как это делается в теории нелинейных колебаний, функцию U можно рассматривать как некоторую потенциальную яму, в которой частицы совершают колебания. Гамильтониан, соответствующий границе области устойчивых фазовых колебаний (сепаратрисе) H_0 , можно найти с учетом того, что одна из точек этой границы, являющаяся точкой неустойчивого равновесия, всегда находится в фазе $\varphi_n = -\varphi_s$, соответствующей максимуму потенциальной функции, и в этой точке $(v - v_s) = 0$:

$$H_0 = \frac{e \cdot E_{\max} \cdot v_s}{m \cdot \omega} (\sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s). \quad (1.12)$$

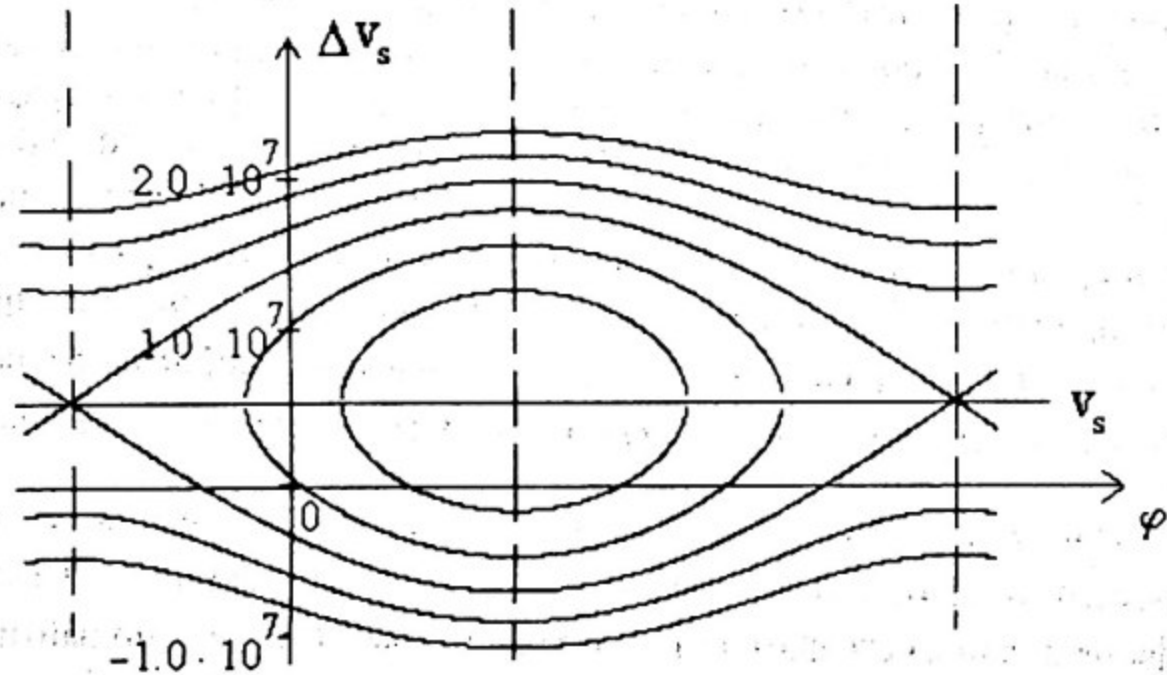
Если $H < H_0$, то все траектории будут замкнутыми, т.е. фазовое движение является устойчивым. При этом рассматриваемый диапазон фаз удобно выбирать в интервале $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$.

На рис. 1.2 приведен вид потенциальной функции (а) и соответствующие ей семейства замкнутых и незамкнутых фазовых траекторий (б) при следующих параметрах: $E_{\max} = 150$ кВ/см, $f = 200$ МГц, $\beta_s = 0.01$, $\varphi_s = \pi/2$. На рис. 1.3 также приведены потенциальная функция (а) и соответствующие ей семейства фазовых траекторий (б) при тех же параметрах, но $\varphi_s = \pi/4$. Из рисунков видно, что при $\varphi_s = \pi/2$ потенциальная яма имеет две точки неустойчивого равновесия, а, следовательно, сепаратриса будет иметь две седловые точки.

При $\varphi_s \neq \pi/2$ седловая точка только одна. Видно, что фазовый размер сепаратрисы Ψ уменьшается при уменьшении φ_s . Связь фазовой длины сепаратрисы с синхронной фазой φ_s можно найти с учетом того, что при фазе, равной фазе правой границы сепаратрисы φ_n $v = v_s$. Легко показать, что $\varphi_n = \varphi_s + \Psi$. Подставим это равенство в уравнение (1.9) и получим выражение связывающее φ_s и Ψ :



a



b

Рис. 1.2. Потенциальные ямы (а) и соответствующие им семейства фазовых траекторий (б) при $\varphi_s = \pi/2$

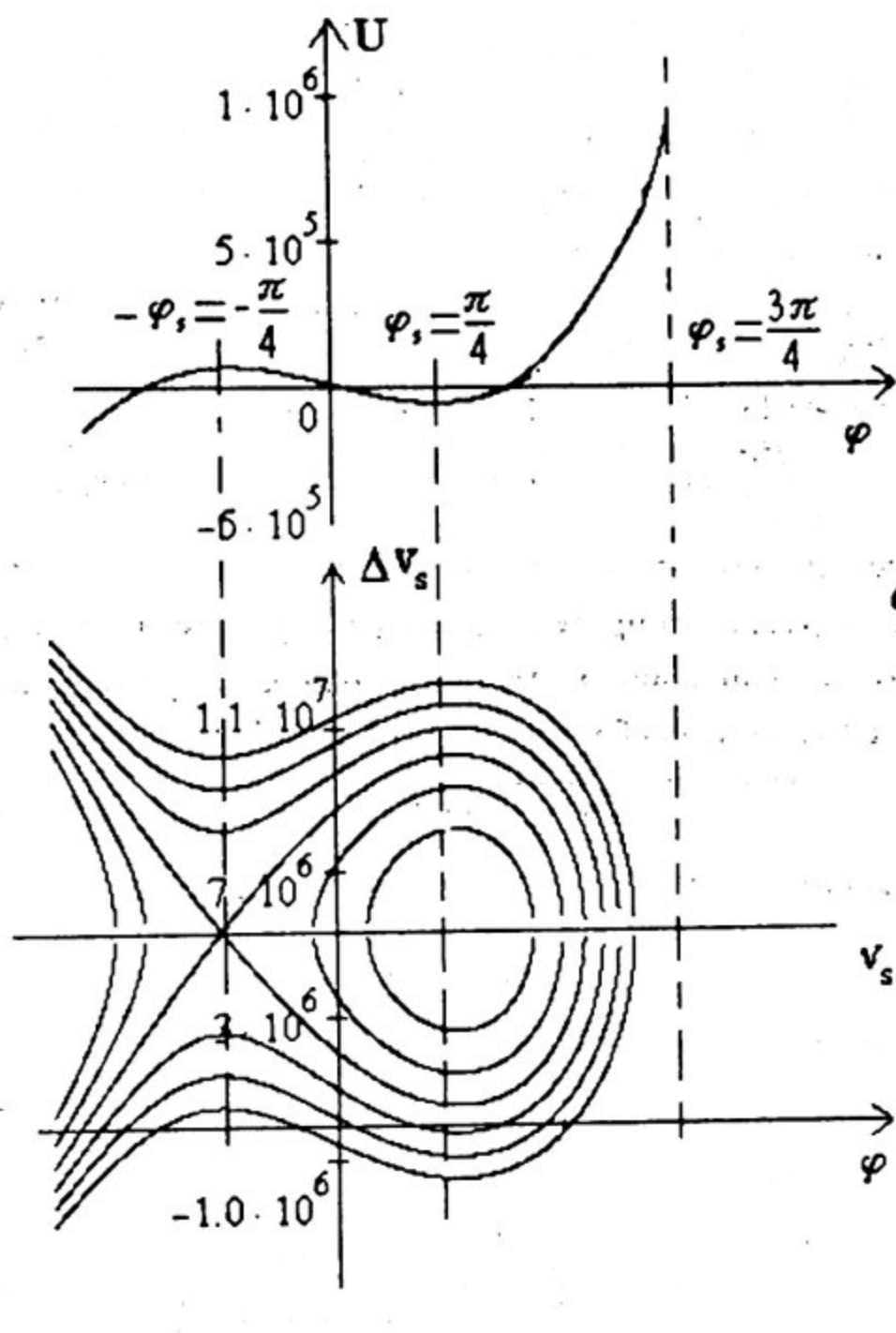


Рис. 1.3. Потенциальные ямы (а) и соответствующие им семейства фазовых траекторий (б) при $\varphi_s = \pi/4$

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{\Psi - \sin \Psi}{1 - \cos \Psi} \quad (1.13)$$

Очевидно, что при $\varphi_s = \pi/2$ $\Psi = 2\pi$ и величина Ψ убывает с уменьшением φ_s . Таким образом, $0 < \Psi < 2\pi$. Можно показать, что при малой величине φ_s $\Psi \approx 3\varphi_s$.

Выражения (1.5) и (1.7) позволяют определить частоту малых фазовых колебаний частицы вблизи синхронной фазы φ_s [2-3]. Для этого продифференцируем выражение (1.5) по времени:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{\omega}{v_s} \frac{d}{dt} (v - v_s) = \frac{e}{m} \cdot \frac{\omega}{v_s} E_{\max} (\cos \varphi - \cos \varphi_s). \quad (1.14)$$

В уравнении для φ (1.14) произведем замену переменных $\varphi = \varphi_s + \Delta\varphi$ и разложим правую часть в ряд с учетом малости отклонения фазы от синхронной: $\Delta\varphi \ll \varphi_s$. Отсюда получим уравнение для малых фазовых колебаний:

$$\frac{d^2 \Delta\varphi}{dt^2} + \Omega_0^2 \Delta\varphi = 0, \quad (1.15)$$

где выражение

$$\Omega_0^2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{\omega}{v_s} E_{\max} \sin \varphi_s \quad (1.16)$$

определяет квадрат частоты малых фазовых колебаний.

С ростом амплитуды колебаний частота Ω уменьшается. Период нелинейных фазовых колебаний можно найти, зная H и зависимость $U(\varphi)$ (1.11):

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2v_s}{\omega} \int_{\varphi_n}^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(H - U(\varphi))}}. \quad (1.17)$$

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель выполнена с использованием математического пакета Mathsoft © Mathcad и состоит из трех основных частей. В первой – блоке начальных данных – заданы основные константы (скорость света, заряд электрона, масса протона и т.д.), используемые при расчетах. В первой части задаются также пара-

метры моделирования: амплитуда E_{max} и частота ω ускоряющего ВЧ поля, энергия инжекции частиц $\beta_{in}=0.01$, синхронная фаза $\phi_s=\pi/2$. На рис. 1.4 показан вид блока начальных данных.

Заряд электрона, Кл	$e := 1.602 \cdot 10^{-19}$
Масса протона, кг	$m := 1.67 \cdot 10^{-27}$
Скорость света, м/с	$c := 3 \cdot 10^8$
Энергия покоя протона, эВ	$W_0 = 9.38 \cdot 10^8$
Частота, Гц	$f := 200 \cdot 10^6$
Амплитуда напряженности электрического поля, В/м	$E := 150 \cdot 10^5$
Энергия синхронной частицы, эВ	$W_s := 150 \cdot 10^3$
Синхронная фаза	$\phi_s := \frac{\pi}{4}$

Рис. 1.4. Блок начальных данных

Во второй части заданы выражения для расчета потенциальной функции и фазовых траекторий, определяется несколько значений полной энергии частиц (значений гамильтониана), т.е. определяется семейство фазовых траекторий, а также производятся расчеты частот фазовых колебаний.

Третья часть представляет собой графики потенциальных функций и фазовых траекторий, а также результаты расчета частоты фазовых колебаний. Используя встроенные средства Mathcad, позволяющие выполнять масштабирование и трассировку графиков, можно определять различные характеристики системы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения особенностей фазового движения пучка заряженных частиц в нерелятивистском случае.
2. Варьируя величину синхронной фазы, определить значения потенциальной функции в точке неустойчивого равновесия.
3. Изменяя величину синхронной фазы, определить фазовую ширину сепаратрисы и максимально допустимую величину отклонения скорости частиц от синхронной скорости.
4. При двух значениях синхронной фазы $\varphi_s = \pi/2$ и $\varphi_s = \pi/4$ найти зависимости максимально допустимой величины отклонения скорости частиц от скорости синхронной частицы при изменении амплитуды ускоряющего поля в диапазоне $E_{\text{max}} = 0 \div 150$ кВ/см (при нескольких значениях скорости синхронной частицы).
5. При двух значениях синхронной фазы $\varphi_s = \pi/2$ и $\varphi_s = \pi/4$ найти зависимости максимально допустимой величины отклонения скорости частиц от скорости синхронной частицы при изменении частоты ускоряющего поля в диапазоне $f = 100 \div 400$ МГц.
6. Исследовать зависимость максимально допустимой величины отклонения скорости частиц от синхронной скорости при изменении скорости синхронной частицы по линейному закону.
7. Исследовать зависимость частоты фазовых колебаний внутри сепаратрисы от величины амплитуды, сравнить результаты, полученные для малых фазовых колебаний вблизи φ_s и для случая нелинейных колебаний с большой амплитудой.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Работа выполняется в виде стандартного отчета. В отчет заносятся: название работы, цель работы; полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, результаты теоретических расчетов.
2. Результаты всех измерений следует заносить в таблицы с соответствующими названиями колонок и отображать на графиках.
3. Произвести расчет теоретических значений фазового размера сепаратрисы в зависимости от синхронной фазы.

4. Результаты измерений зависимости от синхронной фазы величины потенциала в узловой точке и фазового размера сепаратрисы и рассчитанные теоретические значения рекомендуется занести в таблицу следующего вида:

№ пп	φ_s	φ_n	φ_p	$\Psi_{\text{рассч}}$	$\Psi_{\text{теор}}$	U
1						
2						
3						

5. Провести теоретические расчеты зависимостей максимально допустимой величины отклонения скорости частиц от синхронной скорости в зависимости от амплитуды и частоты ускоряющего ВЧ поля и скорости синхронной частицы. Результаты расчета и результаты, полученные в ходе выполнения лабораторной работы, отобразить на одном графике.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. При каких энергиях можно считать, что протоны и электроны являются нерелятивистскими?
2. В чем состоит принцип резонансного ускорения?
3. Определить скорость протона при энергиях 100 кэВ и 1 МэВ.
4. Пояснить качественно принцип автофазировки.
5. Найти гамильтониан системы в нерелятивистском приближении.
6. Вывести зависимость фазового размера сепаратрисы от величины синхронной фазы (формула (1.13)).
7. Показать, что при малых значениях φ_s можно считать, что $\Psi \approx 3\varphi_s$.
8. Для каких частиц максимально допустимая величина отклонения скорости частиц от синхронной скорости больше:
 - а) протонов или ионов дейтерия;
 - б) протонов или α -частиц;
 - в) протонов или электронов?
8. Получить гамильтониан для произвольного иона с зарядом Z и атомной массой A .
9. Вывести уравнение для малых фазовых колебаний.

ПРИНЦИП АВТОФАЗИРОВКИ. ФАЗОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ЛИНЕЙНОМ УСКОРИТЕЛЕ НА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЕ

Цель работы – закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; изучение особенностей фазового движения электронов в релятивистском случае; расчет изменения параметров в области устойчивости фазовых колебаний в процессе ускорения электронного пучка, выбор условий инжекции электронного пучка.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим продольную динамику электронов в линейном резонансном ускорителе, работающем на бегущей волне [3], [5]. Обычно для ускорения электронов используют ускоряющие системы на основе диафрагмированных волноводов. Фазовая скорость волны в таких структурах постоянна и близка или равна скорости света. Запишем уравнение продольного движения частицы в ВЧ поле:

$$\frac{dW}{dz} = e \cdot E_{\max} \cos \varphi, \quad (2.1)$$

где $\varphi = \int k_z dz - \omega t$ – фаза частицы в поле волны, ω – частота ВЧ поля, $k_z = \omega / v_{\text{в}}$ – продольное волновое число, $v_{\text{в}}$ – фазовая скорость волны, e – заряд электрона, $E_{\max}$ – амплитуда ВЧ поля, W – энергия частицы. Введем приведенную величину полной энергии γ :

$$\gamma = \frac{W}{W_0}, \quad (2.2)$$

где W_0 – энергия покоя электрона. Тогда:

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{eE_{\max}}{W_0} \cdot \cos \varphi. \quad (2.3)$$

Изменение фазы частицы находится из уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \omega \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v} \right). \quad (2.4)$$

Далее удобно ввести в рассмотрение приведенную скорость частиц $\beta = v/c$ и приведенную фазовую скорость волны $\beta_n = v_n/c$, где c – скорость света. Приведенную скорость частицы выразим через приведенную энергию $\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$, а вместо координаты z введем

безразмерную продольную координату $\xi = \frac{2\pi z}{\lambda}$, где λ – длина волны ВЧ поля. Тогда уравнение для фазы примет вид:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right), \quad (2.4a)$$

а уравнение для энергии частиц

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = e_v \cdot \cos\varphi. \quad (2.3a)$$

Здесь $e_v = \frac{e \cdot E_{\max} \cdot \lambda}{2\pi W_0}$ – безразмерная амплитуда поля. Из уравнений (2.3a) и (2.4a) можно получить первый интеграл системы (гамильтониан):

$$\left(\frac{\gamma}{\beta_n} - \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) - e_v \sin\varphi = H. \quad (2.5)$$

Величина H определяется начальными условиями: энергией инжекции γ_0 и фазой инжекции φ_0 . Каждому значению H соответствует своя траектория на фазовой плоскости (φ, γ) .

Физический смысл первого интеграла состоит в том, что для каждой фазовой траектории сумма кинетической энергии T частицы и потенциальной энергии взаимодействия с ВЧ полем U остается постоянной (см. работу 1, формула (1.10)). Таким образом, выражение для гамильтониана позволяет найти зависимость энергии частицы от фазы (фазовую траекторию) во всей области взаимодействия, где задана потенциальная функция:

$$U = -e_v \sin\varphi. \quad (2.6)$$

Если фазовая траектория замкнута, то движение частицы является устойчивым. Граница области устойчивых фазовых колебаний определяется сепаратрисой. Эту границу можно найти, зная, что $\gamma = \gamma_s = 1/\sqrt{1-\beta_s^2}$ при $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$:

$$H_c = \left(\frac{\gamma_s}{\beta_s} - \sqrt{\gamma_s^2 - 1} \right) + e_v. \quad (2.7)$$

На рис. 2.1 показаны семейства замкнутых и незамкнутых фазовых траекторий при следующих параметрах: $E_{\max}=150$ кВ/см, $\lambda=10$ см, $\beta_s = 0.9$. Из формулы для потенциальной функции U видно, что сепаратриса имеет две седловые точки (две точки неустойчивого равновесия). С приближением фазовой скорости волны β_s к 1 вертикальный размер сепаратрисы стремится к бесконечности.

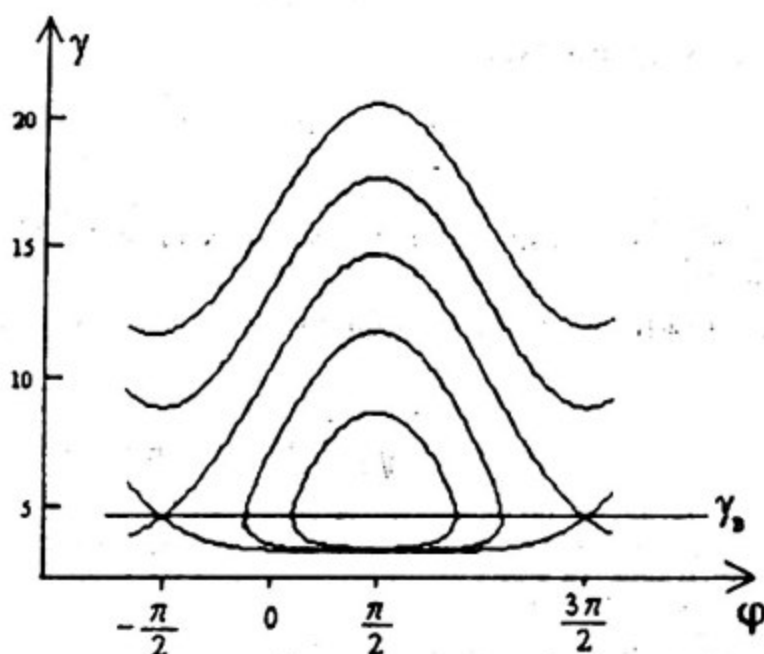


Рис. 2.1. Семейства фазовых траекторий при $E_{\max}=150$ кВ/см, $\lambda=10$ см, $\beta_s = 0.9$

Из рисунка видно, что фазовые траектории в релятивистском случае несимметричны относительно γ_s . С увеличением фазовой скорости волны вертикальный размер сепаратрисы быстро увеличивается. Однако из-за роста γ_s минимальная энергия, при которой возможен захват электронов в режим ускорения, также повышает-

ся.

Рассмотрим теперь предельный случай, когда электроны ускоряются в волноводной секции с $\beta_s = 1$. Гамильтониан системы в этом случае может быть записан следующим образом:

$$\gamma(1 - \beta) - e_v \sin \varphi = H. \quad (2.8)$$

Первое слагаемое удобно переписать так:

$$\gamma(1 - \beta) = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \gamma = \frac{1}{\gamma(1 + \beta)}.$$

С увеличением энергии частиц $\gamma \rightarrow \infty$, а фаза частицы стремится к $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$, где $\sin(\varphi_\infty) = -H / e_v$ (рис. 2.2). Так как $|\sin(\varphi_\infty)| \leq 1$, то при $H \leq e_v$ ускорение имеет место на всей длине взаимодействия с полем волны, хотя в отличие от случая с $\beta_s < 1$ фазовые траектории не являются замкнутыми. В случае, когда $H > e_v$, будет происходить скольжение частиц относительно волны. В этом смысле траектория с $H = e_v$ является сепаратрисой, т.е. она разделяет область захваченных и незахваченных частиц. Как видно из рис. 2.2, с

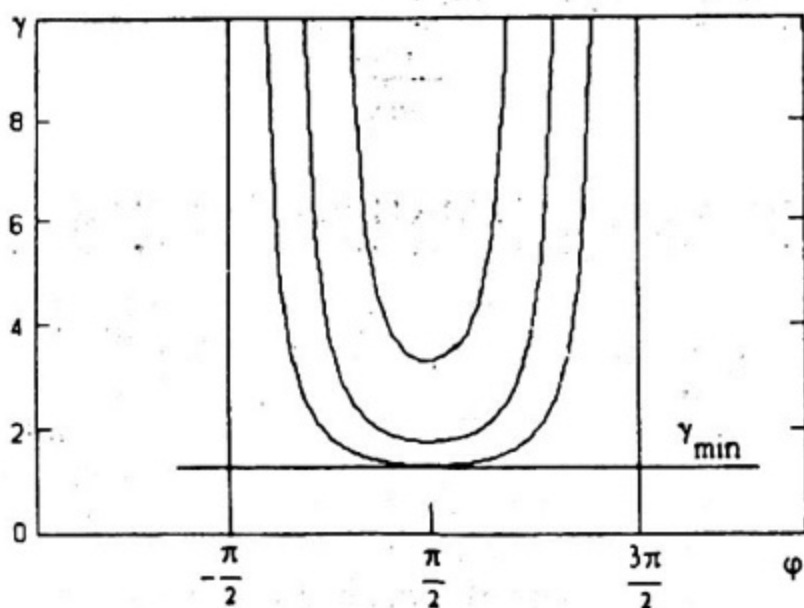


Рис. 2.2. Семейство фазовых траекторий при $E_{\text{max}} = 150$ кВ/см, $\lambda = 10$ см, $\beta_s = 1$

ростом энергии γ фазовые траектории при $H = -e_v \sin \varphi_\infty$ будут

асимптотически стремиться к φ_∞ . При больших энергиях в секции с $\beta_z = 1$ электроны будут ускоряться вблизи фазы $\varphi = \varphi_\infty$. Максимальный темп ускорения реализуется при $\varphi_\infty = 0$, когда $H = 0$. В случае $\varphi_\infty \approx -\pi/2$ ускорение уже не будет эффективным. Поэтому параметры инжекции γ_0 и φ_0 должны выбираться из условия, что $H \approx 0$. Для каждого значения H энергия инжекции γ_0 минимальна при $\varphi_0 = \pi/2$ и будет возрастать с уменьшением φ_0 . Если энергия инжекции мала и на фазовой плоскости она лежит ниже минимума сепаратрисы, находящегося в точке $\varphi = \pi/2$, то ни одна частица не будет захвачена в режим ускорения. Для частицы, двигающейся по фазовой траектории $H = 0$, минимально необходимая энергия инжекции равна

$$\gamma_{\min} = \frac{1 + e_v^2}{2e_v}. \quad (2.9)$$

Как видно из рис. 2.2, эта энергия всегда будет больше, чем минимальная энергия, необходимая для захвата частиц в режим ускорения (которая соответствует сепаратрисе):

$$\gamma_{\text{сеп}} = \frac{1 + 4e_v^2}{4e_v}. \quad (2.10)$$

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель выполнена с использованием математического пакета Mathsoft © Mathcad и состоит из трех основных частей. В первой – блоке начальных данных – заданы основные константы (скорость света, заряд электрона, масса электрона, энергия покоя и т.д.), используемые при расчетах. Также в первой части должны задаваться параметры моделирования: амплитуда E_{max} и частота f ускоряющего ВЧ поля, фазовая скорость волны β_z . На рис. 2.3 показан блок начальных данных.

Во второй части заданы выражения для расчета фазовых траекторий, определяется несколько значений полной энергии частиц (значений гамильтониана), т.е. определяется семейство фазовых траекторий, а также производятся расчеты.

Третья часть представляет собой графики фазовых траекторий. Используя встроенные средства Mathcad, позволяющие выполнять масштабирование и трассировку графиков, можно определять различные характеристики системы.

Заряд электрона, Кл	$e := 1.602 \cdot 10^{-19}$
Масса электрона, кг	$m := 9.1 \cdot 10^{-31}$
Скорость света, м/с	$c := 3 \cdot 10^8$
Энергия покоя, эВ	$W0 := 511 \cdot 10^3$
Частота, Гц	$f :=$
Напряженность поля, В/м	$E :=$
	$ev := \frac{e E \cdot c}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot W0}$
	$ev =$
Фазовая скорость волны	$\beta v :=$
	$\gamma v := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta v^2}}$
	$\gamma v =$

Рис. 2.3. Блок начальных данных для исследования фазового движения

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения особенностей фазового движения пучка заряженных частиц в релятивистском случае.
2. Изменяя величину фазовой скорости волны, определить вер-

тикальный размах сепаратрисы. При исследовании необходимо помнить, что с ростом фазовой скорости волны не только растет вертикальный размах сепаратрисы, но и меняется значение минимума энергии. Фазовую скорость волны варьировать в диапазоне $\beta_s = 0.4 - 0.99$.

3. Сравнить вид фазовых траекторий для релятивистского и нерелятивистского случаев.

4. Увеличивая значение амплитуды напряженности ВЧ поля, определить изменение вертикального размаха сепаратрисы.

5. При фиксированном значении $\beta_s < 1$, изменяя значения амплитуды напряженности ускоряющего поля, найти минимальную энергию инжекции электронов в ускоряющую секцию с заданной фазовой скоростью волны. Определить, при какой напряженности поля возможна остановка частицы (скорость частицы становится равна нулю).

6. Для секции с $\beta_s = 1$ при фиксированных величинах амплитуды напряженности ВЧ поля определить связь между энергией и фазой частиц.

7. Определить зависимость минимальной энергии инжекции в волноводную секцию с $\beta_s = 1$ от амплитуды напряженности ВЧ поля, при условии: а.) $\varphi_\infty = 0$, б.) $\varphi_\infty = -\pi/2$.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Работа выполняется в виде стандартного отчета. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, требуемые результаты теоретических расчетов.

2. Результаты всех измерений следует заносить в таблицы с соответствующими названиями колонок и отображать на графиках.

3. Результаты измерений зависимости вертикального размаха сепаратрисы от фазовой скорости волны рекомендуется занести в таблицу следующего вида:

№ пп	β_s	γ_s	$\gamma_{\max}$	$\gamma_{\min}$	$\gamma_{\max} - \gamma_{\min}$
1					
2					

4. График зависимости вертикального размаха сепаратрисы от фазовой скорости волны рекомендуется строить в логарифмическом масштабе. Рекомендуется на одном графике совместить три кривые: зависимости максимального и минимального значений безразмерной энергии для сепаратрисы, а также значения γ_* от фазовой скорости волны.

5. Вывести формулу для определения минимальной энергии инжекции в зависимости от фазовой скорости волны и амплитуды ускоряющего поля.

6. Рассчитать по полученной формуле минимальную энергию инжекции для заданного значения фазовой скорости. Сравнить это значение с полученным в ходе выполнения лабораторной работы.

7. Рассчитать энергию инжекции для секции с $\beta_* = 1$, когда $\varphi_\infty = 0$. Сравнить это значение с полученным в ходе выполнения лабораторной работы.

8. Сравнить величины энергий инжекции, полученных для секции с $\beta_* < 1$ и секции с $\beta_* = 1$ при одинаковых амплитудах напряженности ВЧ поля. Объяснить полученный результат.

9. Вывести условие остановки электрона при взаимодействии частицы с полем бегущей волны. Найти значение амплитуды напряженности ускоряющего поля при заданной величине фазовой скорости волны в этом случае.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. При каких энергиях можно считать движение электронов нерелятивистским?

2. В чем состоит принцип резонансного ускорения?

3. Определить скорость электрона при энергиях 100 кэВ, 1 МэВ и 10 МэВ.

4. Пояснить качественно принцип автофазировки в релятивистском случае.

5. Получить выражение для гамильтониана системы в релятивистском случае.

6. Можно ли ускорять протоны в секции с постоянной фазовой скоростью волны?

7. Как выглядят фазовые траектории частиц при $\beta_* = 1$?

8. Какой смысл при $\beta_s = 1$ имеет понятие сепаратрисы? Чему в этом случае равна φ_s ?

9. Почему в волноводной секции с постоянной фазовой скоростью волны, отличной от единицы, значение синхронной фазы также должно быть постоянным и равным $\pi/2$?

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВОЛНОВОДНОМ ГРУППИРОВАТЕЛЕ

Цель работы – закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; ознакомление с принципами работы волноводного группирователя электронного пучка; изучение методов численного моделирования динамики пучков; моделирование динамики пучка в волноводном группирователе.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Численное моделирование динамики электронных пучков

Задача расчета динамики пучка заряженных частиц в линейном ускорителе состоит в нахождении значений скоростей и координат всех частиц пучка в конце ускорителя при заданных величинах скоростей и координат в начале, т.е. при инжекции пучка в ускоритель [6]. Если в начале ускорителя инжектированные частицы равномерно распределены по фазам и имеют одинаковые скорости, то при дальнейшем движении лишь часть электронов будет захвачена в режим ускорения.

Для точного решения поставленной задачи необходимо рассмотреть трехмерное уравнение движения для всех частиц пучка. В случае ускорения электронов в поле электромагнитной волны уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \cdot \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \}, \quad (3.1)$$

где e – заряд электрона, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – электрическая и магнитная компоненты поля волны, $\mathbf{p}$ – импульс частицы. В релятивистском случае импульс равен $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$, где $\gamma = W / W_0$, $W_0 = mc^2$ – энергия покоя, c – скорость света.

Захваченные в режим ускорения электроны занимают широкую область фаз, поэтому они находятся под действием разных по величине электрических и магнитных полей. В результате, пройдя

одно и то же расстояние, разные частицы получают различный прирост энергии. Все это приводит к ухудшению энергетических характеристик пучка. Поэтому перед ускорением необходимо сгруппировать частицы в сгустки с малой фазовой протяженностью. С этой целью в линейных ускорителях используются специальные системы предварительной группировки пучка, так называемые группирователи.

Расчет параметров группирователей является непростой задачей и сводится к анализу решений системы уравнений (3.1) для координат и импульсов в шестимерном фазовом пространстве. Однако на практике можно считать, что продольное движение частиц слабо зависит от поперечного. Поэтому задачу о расчете динамики электронного пучка в группирователе можно упростить и рассматривать только уравнения продольного движения для частиц, инжектированных по оси ускорителя.

Система уравнений продольного движения электронного пучка может быть записана в виде (см. работу 2):

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{d\xi} &= e_{\max} \cos\varphi, \\ \frac{d\varphi_i}{d\xi} &= 2\pi \left(\frac{1}{\beta_s} - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\xi = \frac{z}{\lambda}$, $\beta_{x,y,z} = \frac{v_{x,y,z}}{c}$, $\tau = \omega t$ – безразмерные величины координат и скоростей и безразмерное время, $e_{\max} = \frac{e\lambda E_{\max}}{mc^2}$ – безразмер-

ная амплитуда поля, $\beta_s = v_s/c$, $\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$, φ_i и γ_i – фаза и приведенная энергия i -й частицы.

Систему уравнений (3.2) необходимо решить при заданных начальных условиях

$$\gamma_{0,i}(z=0), \varphi_{0,i}(z=0) \quad (3.3)$$

для всех частиц, лежащих в интервале начальных фаз $-\pi/2 < \varphi_0 < 3\pi/2$. Решение системы уравнений (3.2) при известных начальных условиях (3.3) в общем случае может быть произ-

ведено только с использованием численных методов. Наиболее распространёнными из численных методов решения дифференциальных уравнений являются методы прогноза и коррекции (метод Милна, метод Адамса) и методы Рунге – Кутты [7].

2. Принцип работы волноводного группирователя

Группировка электронного пучка может быть осуществлена с использованием волноводного или клистронного группирователя. Основной целью использования волноводного группирователя является получение минимального фазового размера сгустка при высоком коэффициенте захвата частиц в режим ускорения. Группировка возможна в волноводной секции как с постоянной, так и с переменной фазовой скоростью волны v_ϕ . Если используется секция с постоянной фазовой скоростью, то v_ϕ выбирают равной или несколько большей, чем скорость частиц.

В волноводной секции с бегущей волной частицы в процессе фазового движения, в соответствии с принципом автофазировки, будут группироваться (см. например [5, 8]). Изучим процесс группировки более подробно. Рассмотрим фазовую плоскость, соответствующую движению пучка электронов в волноводной секции с постоянной β_ϕ (рис. 3.1). Фазовая скорость волны в этой секции выбирается относительно невысокой: $\beta_\phi = 0.3 - 0.5$. Пусть в секцию инжектирован пучок электронов, имеющих постоянную скорость, равную фазовой (частицы в момент инжекции на рисунке 3.1 условно показаны точками). В среднем за период фазовых колебаний пучок электронов ускоряться не будет. Однако все частицы будут совершать колебания около равновесной частицы, находящейся в фазе $\phi_c = \pi/2$. Частота обращения частицы вокруг равновесной в фазовой плоскости определяется частотой фазовых колебаний. Частицы с фазой, меньшей ϕ_c , будут ускоряться, частицы с фазой, большей ϕ_c – замедляться. Следует напомнить, что фазовые траектории несимметричны относительно линии $\gamma_\phi = 1/\sqrt{1-\beta_\phi^2} = \text{const}$ (см. [5] и работу 2). Очевидно, что частицы с разной частотой фазовых колебаний будут иметь различную энергию при одинако-

вых фазах. Теперь необходимо только определить условия, при которых фазовый размер пучка будет минимален. На рис. 3.1 кружками показано положение частиц пучка примерно через четверть периода фазовых колебаний. Видно, что фазовая протяженность сгустка значительно уменьшилась, а разброс частиц по энергиям возрос.

Для характеристики эффективности группировки пучка вводят так называемый коэффициент группировки:

$$k_r = \frac{\Psi_{\text{вх}}}{\Psi_{\text{вых}}}, \quad (3.4)$$

где $\Psi_{\text{вх}}$ и $\Psi_{\text{вых}}$ – фазовый размер сгустка на входе и выходе группирователя.

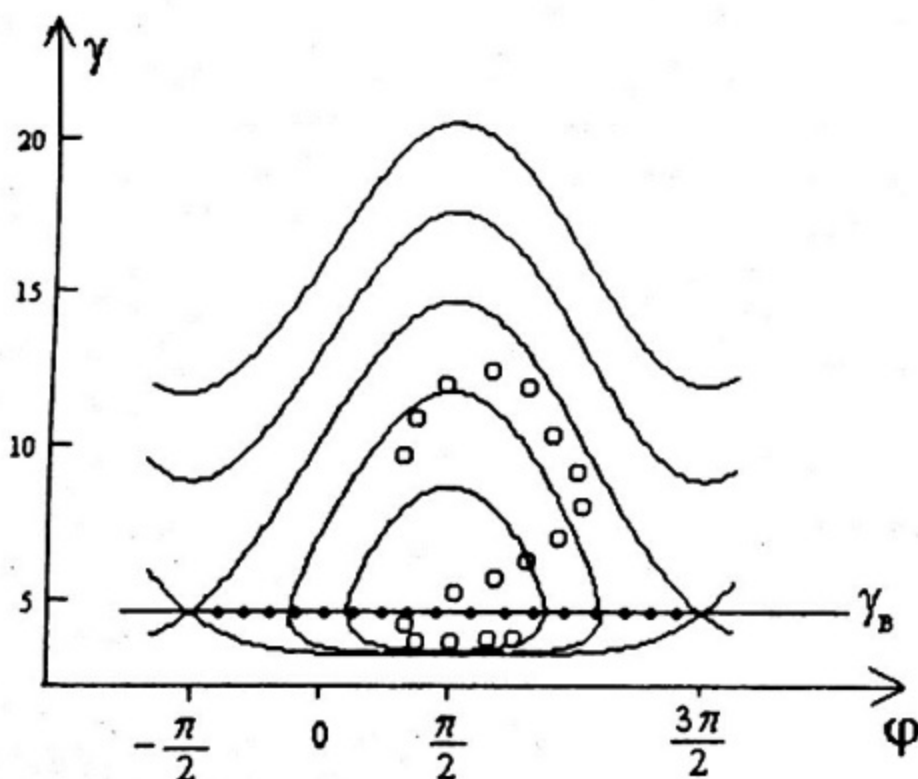


Рис. 3.1. Фазовое движение электронов в волноводной группировочной секции

Другой важной характеристикой волноводного группирователя является коэффициент захвата частиц в режим ускорения

$$k_3 = \frac{N_3}{N_{\text{вх}}} \cdot 100 \%, \quad (3.5)$$

который определяет долю захваченных волной частиц N_3 к общему числу инжектированных в группирователь частиц $N_{\text{вх}}$.

Существуют различные типы и конструкции волноводных группирователей, параметры которых позволяют обеспечить эффективную группировку электронного пучка. В частности, могут быть использованы волноводные секции с фазовой скоростью волны, превышающей скорость частиц пучка и даже скорость света. Однако рассмотренный выше механизм фазовой группировки будет действовать и в этом случае.

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Программа для численного моделирования группировки электронного пучка в волноводном группирователе написана на Borland Delphi©. Интегрирование уравнений проводится методом Рунге – Кутты 4-го порядка. В блоке начальных данных программы численного моделирования, показанном на рис. 3.2, задаются основные параметры моделирования: фазовая протяженность сгустка при инжекции, фазовая скорость волны, коэффициент затухания, безразмерная длина группирователя, энергия инжекции, безразмерная амплитуда поля и фаза, соответствующая центру инжектируемого пучка.

Программа численного моделирования позволяет проводить исследование движения как отдельной частицы («точечный сгусток»), так и протяженного сгустка. На рис. 3.3 показаны результаты моделирования динамики точечного сгустка в волноводной секции (изменение энергии и фазы частицы по длине группирователя). Также может быть отображена зависимость амплитуды ВЧ поля от продольной координаты.

Для протяженного сгустка программа отображает поведение фазовых траекторий частиц пучка в продольном фазовом объеме в процессе группировки (рис. 3.4).

Выбор параметров для сильноточного ЛУЗ

Динамика

Параметры

Нелинейные зависимости

Расчетные данные

Анализ решений

3D анализ

Начальные параметры пучка

Фазовая длина

6.28

Бэтта волны

0.9

Затухание

0

Нач. знач. продольной коорд.

0

Кон. знач. продольной коорд.

10

Поле В

0

Гамма начальная

21

Начальная амплитуда

1

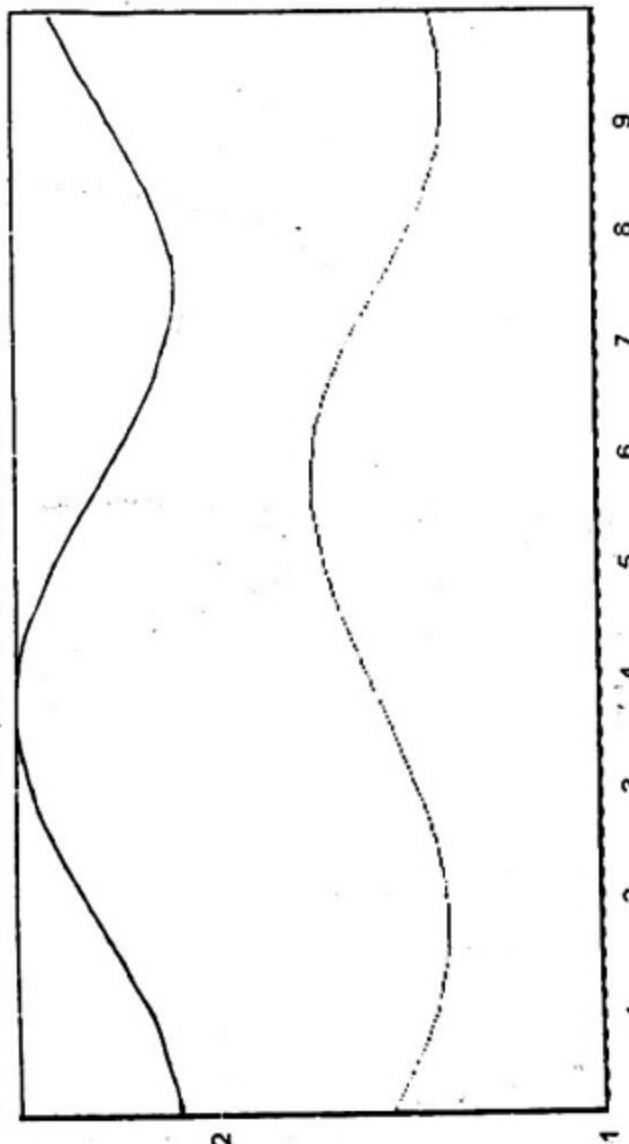
Начальная фаза

157

Рис. 3.2. Модуль начальных данных

Точ. сгусток

Все расчетные зависимости



Гамма

Амплитуда

Фаза

Траектория

Прот. сгусток

0

Рис. 3.3. Динамика точечного сгустка в секции волнового гудроулятора

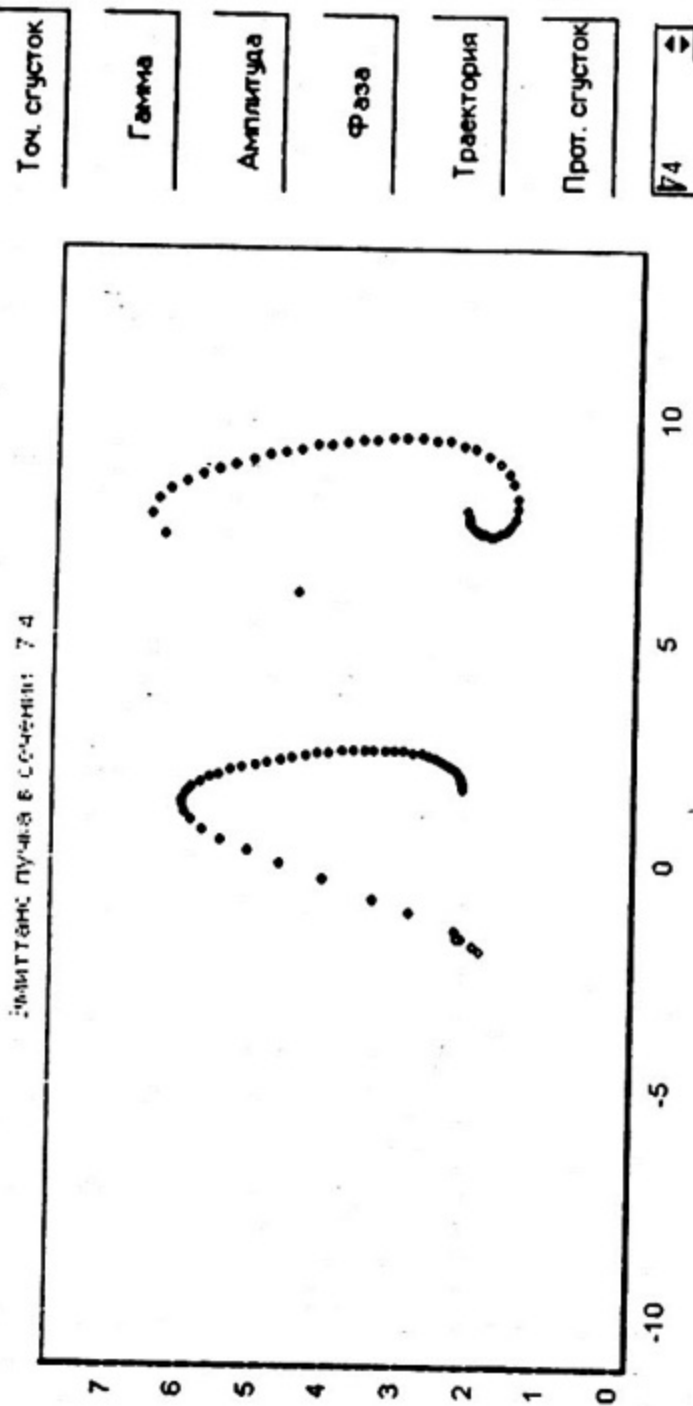


Рис. 3.4. Поведение фазового объема пучка в процессе группировки

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения особенностей движения электронов в поле бегущей волны.

2. Выбрать параметры волноводного группирователя и пучка: длину волны и амплитуду ВЧ поля, фазовую скорость волны, длину группирователя, энергию инжекции, фазовый размер сгустка. Получить безразмерные значения длины группирователя и амплитуды поля.

3. Провести моделирование динамики точечного сгустка при выбранных параметрах:

- а) найти амплитуду фазовых колебаний частицы (по фазе и энергии);
- б) определить частоту фазовых колебаний;
- в) с помощью известного выражения для частоты малых фазовых колебаний рассчитать необходимую длину группирователя.

4. Провести моделирование динамики точечного сгустка с учетом затухания ВЧ поля в группирователе (аналогично п. 3). Исследовать зависимость частоты фазовых колебаний от амплитуды поля.

5. При выбранных параметрах провести моделирование динамики протяженного сгустка:

- а) определить фазовый размер сгустка на выходе из группирователя. Рассчитать коэффициент группировки по формуле (3.4);
- б) определить максимальный разброс пучка по энергии на выходе из волноводной секции;
- в) найти коэффициент захвата пучка в группирователе.

6. Провести моделирование динамики протяженного сгустка с учетом затухания ВЧ поля в группирователе (аналогично п. 5).

7. Для точечного сгустка определить зависимости частоты фазовых колебаний и длины группирователя от амплитуды ВЧ поля, фазовой скорости волны (с учетом и без учета затухания ВЧ поля в волноводе).

8. Для протяженного сгустка определить зависимости коэффициентов захвата и группировки, а также максимального разброса электронов по энергии на выходе из волноводной секции от ампли-

туды ВЧ поля, фазовой скорости волны (с учетом и без учета затухания ВЧ поля в волноводе).

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Работа выполняется в виде стандартного отчета. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, требуемые результаты теоретических расчетов.

2. Результаты всех измерений следует заносить в таблицы с соответствующими названиями колонок и отображать на графиках.

3. Провести расчет безразмерных значений длины группирователя и амплитуды поля.

4. Рассчитать аналитически значения частоты фазовых колебаний, длины волноводного группирователя и коэффициента группировки. Сравнить найденные величины с полученными в результате численного моделирования.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какие методы исследования динамики пучков вы знаете?

2. Поясните принципы построения численной модели для изучения динамики электронных пучков. Какова роль граничных и начальных условий?

3. Поясните принцип работы волноводного группирователя.

4. Можно ли использовать волноводный группирователь для группировки протонного пучка?

5. В чем различия между волноводной и клистронной группировкой электронного пучка?

6. Почему при волноводной группировке фазовая скорость волны должна быть близка к скорости пучка?

7. Что такое коэффициент группировки?

8. Можно ли в качестве волноводного группирователя использовать секцию с $\beta_p = 1$?

9. Как рассчитать необходимую длину волноводного группирователя?

ФОКУСИРОВКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. ДВИЖЕНИЕ ПУЧКА В СИСТЕМЕ ТОНКИХ ЛИНЗ

Цель работы – закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; изучение методов поперечной фокусировки пучков, матричных методов анализа движения пучка, исследование движения пучка заряженных частиц в системе тонких линз.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пучком заряженных частиц будем называть поток частиц, у которого продольная компонента импульса p_z много больше, чем две другие компоненты (поперечные) p_x и p_y . Как известно, при ускорении пучка заряженных частиц в резонансном ускорителе с увеличением продольной скорости частиц может расти поперечный размер пучка и поперечный импульс, что приводит к потерям частиц. Движение частицы в пучке может быть полностью описано в системе координат импульс – координата (p, r) , поэтому динамику пучка удобно исследовать, вводя шестимерное фазовое пространство. По теореме Лиувилля в замкнутой системе плотность частиц в шестимерном фазовом пространстве постоянна во времени. Используя эту теорему можно показать, что при движении частиц в медленно меняющихся внешних электрических и магнитных полях шестимерный фазовый объем пучка сохраняется. В частности, если движение пучка по каждому из направлений трехмерного пространства происходит независимо, то сохраняется проекция шестимерного фазового объема на плоскости (p_x, x) , (p_y, y) , (p_z, z) . Сохранение фазового объема – это свойство так называемых гамильтоновых систем, для которых уравнения движения могут быть описаны с помощью одной функции Гамильтона. Если силы, действующие на частицу, не зависят от времени, то функция Гамильтона совпадает с полной энергией.

Для описания поведения пучка в целом задается его фазовый объем, который называется эмиттансом. Анализ граничной траек-

тории эмиттанта позволяет определить поведение всего коллектива частиц на участке транспортировки. При исследовании транспортировки пучка во внешних полях поперечные координаты x и y и скорости v_x и v_y (либо углы наклона траектории к оси $\alpha_x = x' = v_x/v_z$ и $\alpha_y = y' = v_y/v_z$) могут меняться, но эмиттансы пучка и четырехмерный фазовый объем сохраняются. В линейных системах эмиттанс пучка имеет форму эллипса, площадь которого можно найти, зная размер полуосей:

$$\mathcal{E}_x = \pi x_{\max} x'_{\max}. \quad (4.1)$$

Для удержания поперечного размера пучка в заданных пределах целесообразно использовать специальные электронно-оптические устройства (линзы). Действие этих фокусирующих элементов на все частицы пучка можно описать с помощью одной матрицы M , которая задает преобразование двумерного эмиттанта пучка со входа на выход линзы:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{вых}} = M_x \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{вх}}, \quad \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{вых}} = M_y \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{вх}}. \quad (4.2)$$

В простейшем случае, когда продольный размер фокусирующего устройства мал, матрицу M можно записать в так называемом приближении тонких линз:

$$M_{x,y}^{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F_{\Phi} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{x,y}^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/F_{\Delta} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где F_{Φ} и F_{Δ} – фокусные расстояния фокусирующей и дефокусирующей линз.

Если частица движется в свободном промежутке длиной l , где отсутствуют внешние силы и расходимость пучка не меняется, то матрицу этого участка можно записать в виде:

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

С помощью матрицы $M_{x,y}$ можно описать квадрупольную фокусировку пучка. Как известно, поле квадрупольной линзы фокусирует частицы в одном поперечном направлении и дефокусирует в другом. Если использовать для фокусировки пучка в целом систему из двух квадрупольных линз, причем вторую повернуть на 90°

относительно первой, то в системе из двух линз (в дуплете) пучок будет фокусироваться в обоих поперечных направлениях. Матрица участка фокусировки, состоящего из фокусирующей линзы, пролетного промежутка и дефокусирующей линзы, может быть легко найдена. Для этого достаточно перемножить матрицы линз и пролетного промежутка:

$$M = M_D \cdot M_L \cdot M_F. \quad (4.5)$$

Иногда используют более сложные системы фокусировки, состоящие из трех, четырех и более линз.

Важнейшим частным случаем устройств для транспортировки пучка является канал, состоящий из периодической последовательности линз и пролетных промежутков, имеющих длину d (период фокусировки). Для анализа условий фокусировки в такой периодической системе достаточно рассмотреть только одну матрицу периода. Используя условие сохранения эмиттанса пучка можно показать, что детерминант этой матрицы равен 1. Из теоремы Флоке для периодических систем следует, что движение пучка будет устойчивым, если выполняется следующее условие:

$$|\text{Sp}(M)| < 2, \quad (4.6)$$

где величина $\text{Sp}(M) = M_{1,1} + M_{2,2}$ – сумма диагональных элементов матрицы периода. Она называется шпуром (или следом) матрицы периода фокусировки. Выполнение условия (4.6) означает, что поперечные отклонения пучка в периодической фокусирующей системе не будут нарастать с продольной координатой (движение устойчиво). Сами отклонения частиц от оси можно найти по формуле:

$$x = x_{\max} \cos(\mu n + \phi_0), \quad (4.7)$$

где $x_{\max}$ – амплитуда колебаний пучка, μ – параметр Флоке, характеризующий набег фазы колебаний на одном периоде, n – номер периода фокусировки, ϕ_0 зависит от начальных условий и пролетного расстояния от начала периода фокусировки до плоскости первой линзы. Величину параметра Флоке на периоде можно найти, зная матрицу периода M . При этом используется следующее соотношение:

$$\cos(\mu) = \text{Sp}(M)/2. \quad (4.8)$$

При заданном начальном поперечном эмиттансе пучка $\mathcal{E}_{x,y}$ максимальное отклонение частиц пучка от оси можно найти по формуле

$$x, y_{\max} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{x,y}}{\pi}} \beta_{x,y}. \quad (4.9)$$

Здесь введена в рассмотрение так называемая β -функция, которая определяется по формуле:

$$\beta(s) = \frac{M_{1,2}(s)}{\sin(\mu)} = \frac{M_{1,2}(s)}{\sqrt{1 - \left(\frac{M_{1,1} + M_{2,2}}{2} \right)^2}}, \quad (4.10)$$

где $M_{1,2}$ – недиагональный элемент матрицы периода.

В качестве первого примера рассмотрим фокусирующую систему, состоящую из периодической последовательности одинаковых фокусирующих линз, разделенных свободным промежутком длиной d (рис. 4.1). Матрицу периода можно найти из выражения

$$M(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Здесь s – пролетное расстояние, которое отсчитывается вправо от плоскости первой линзы ($s < d$, см. рис. 4.1). В рассматриваемом случае

$$\cos(\mu) = 1 - \frac{d}{2F} \quad (4.12)$$

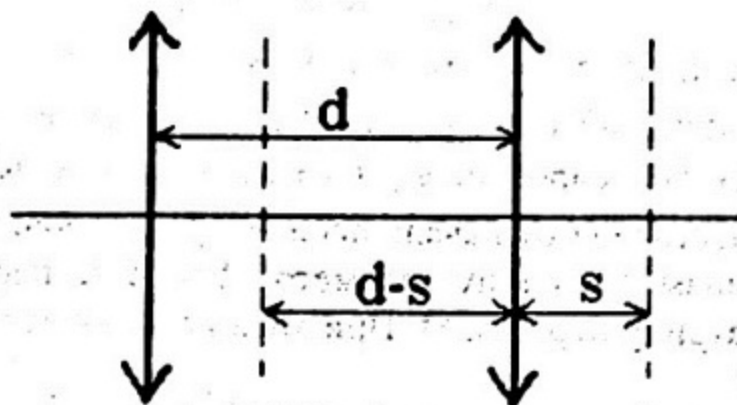


Рис. 4.1. Система фокусировки ФОФО

и не зависит от s . Тогда условие фокусировки принимает вид:

$$0 < \frac{d}{F} < 4. \quad (4.13)$$

В качестве второго примера рассмотрим периодическую систему с квадрупольной фокусировкой ФОДО (рис. 4.2) – так называемую знакопеременную фокусировку.

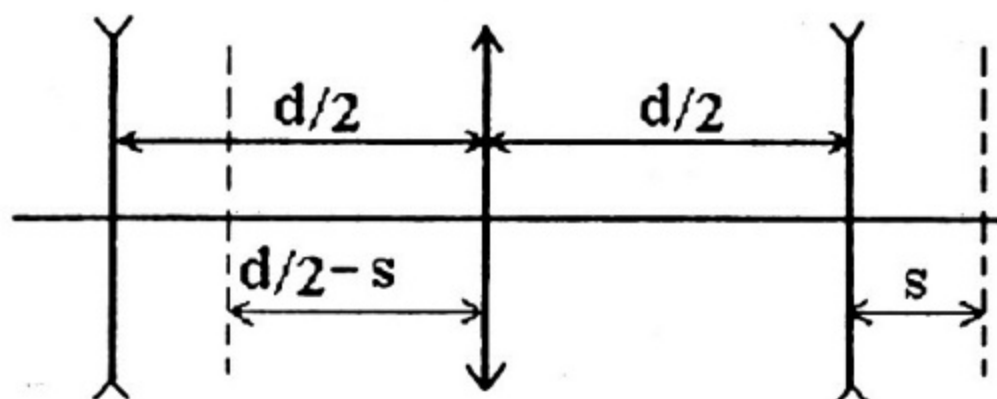


Рис. 4.2. Система фокусировки ФОДО

Здесь период состоит из фокусирующей и дефокусирующей линз и двух пролетных промежутков между ними. Матрицу периода фокусировки можно найти, если перемножить матрицы тонких линз и пролетных промежутков:

$$M(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} - s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Здесь, как и в первом примере, s – пролетное расстояние ($s < d/2$). Вычисляя шпур матрицы M , находим параметр Флоке из условия

$$\cos(\mu) = 1 - \frac{d^2}{8F^2}. \quad (4.15)$$

Как следует из формул (4.12) и (4.15), условия для систем ФОФО и ФОДО выглядят одинаково (см. выражение (4.13)).

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель выполнена с использованием математического пакета Mathsoft © Mathcad и состоит из двух основных частей. В первой части задаются матрицы фокусирующей и дефокусирующей линз и пролетного промежутка, фокусные расстояния линз, задаются матрицы элементов периода.

Во второй части анализируется поведение пучка в фокусирующей системе (или на периоде фокусировки для периодических систем). Проводится расчет матрицы периода фокусировки, матрицы периода, параметра Флоке (для периодических систем) и β -функции. Начальный эмиттанс пучка задается в виде эллипса с полуосями, равными максимальному размеру огибающей и максимальной расходимости пучка. По умолчанию считается, что в положение кроссовера пучок попадает в плоскости первой из линз исследуемой системы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения движения пучка заряженных частиц в системе тонких линз.

2. Рассмотреть движение пучка в простейших системах ОФО₁ и ОДО₁. Проследить эволюцию фазового объема при движении в таких системах. Исследовать зависимость выходных параметров пучка (размера и расходимости) от фокусного расстояния линзы и длин пролетных промежутков.

3. Рассмотреть движение пучка в дуплете из квадрупольных линз. Для этого провести исследования систем ФОДО и ДОФО аналогично п.2. Показать, что при одинаковых параметрах системы ФОДО и ДОФО действуют на пучок одинаково.

4. Исследовать движения пучка в триплете ФОДОФО аналогично п. 2.

5. Исследовать движение пучка в периодической системе типа ФОФО:

- а) задать параметры матрицы периода для системы ФОФО, найти выражения для шпура матрицы периода и β -функции. Показать,

что шпур матрицы периода не зависит от выбора начала отсчета периода. Получить условие фокусировки;

б) построить график β -функции для нескольких периодов фокусировки при заданных значениях параметра Флоке и фокусных расстояний линз (значения получить у преподавателя индивидуально). Варианты:

1) $\mu = \frac{\pi}{2}, F=1 \text{ м}$	2) $\mu = \frac{\pi}{2}, F=2 \text{ м}$	3) $\mu = \frac{\pi}{2}, F=0.5 \text{ м}$
4) $\mu = \frac{\pi}{3}, F=1 \text{ м}$	5) $\mu = \frac{\pi}{3}, F=2 \text{ м}$	6) $\mu = \frac{\pi}{3}, F=0.5 \text{ м}$
7) $\mu = \frac{\pi}{4}, F=1 \text{ м}$	8) $\mu = \frac{\pi}{4}, F=2 \text{ м}$	9) $\mu = \frac{\pi}{4}, F=0.5 \text{ м}$
10) $\mu = \frac{\pi}{6}, F=1 \text{ м}$	11) $\mu = \frac{\pi}{6}, F=2 \text{ м}$	12) $\mu = \frac{\pi}{6}, F=0.5 \text{ м}$
13) $\mu = \pi, F=1 \text{ м}$	14) $\mu = \pi, F=2 \text{ м}$	15) $\mu = \pi, F=0.5 \text{ м}$

в) исследовать зависимость выходных параметров пучка (размера и расходимости) от фокусного расстояния линзы и длин пролетных промежутков.

6. Исследовать движение пучка в периодической системе типа ФОДО:

а) задать параметры матрицы периода для системы ФОДО, найти выражения для шпура матрицы периода и β -функции. Показать, что шпур матрицы периода не зависит от выбора начала отсчета периода. Получить условие фокусировки;

б) найти соотношение между длиной периода фокусировки и фокусным расстоянием линзы, обеспечивающее фокусировку пучка;

в) исследовать зависимость выходных параметров пучка (размера и расходимости) от фокусного расстояния линзы и длин пролетных промежутков;

г) построить график β -функции для нескольких периодов фокусировки при заданных значениях параметра Флоке и фокусных расстояний линз (значения получить у преподавателя индивидуально).

ально, варианты см. выше);

д) исследовать зависимость выходных параметров пучка (размера и расходимости) от фокусного расстояния линзы и длин пролетных промежутков.

7. Исследовать движение пучка в сложной периодической системе Вид системы получить индивидуально у преподавателя. Варианты:

1) ДОФОДО	2) ФОДОФО
3) $\Phi_1 O D_2 O$ ($F_{\Phi_1} = 2F_{D_2}$)	4) $D_1 O \Phi_2 O$ ($F_{D_1} = 2F_{\Phi_2}$)
5) $\Phi_1 O D_2 O$ ($2F_{\Phi_1} = F_{D_2}$)	6) $D_1 O \Phi_2 O$ ($2F_{D_1} = F_{\Phi_2}$)
7) ДОДОФОФО	8) ФОФОДОДО
9) ДОФОФОДО	10) ФОДОДОФО
11) $\Phi O_1 D O_2$ ($L_{O_1} = 2L_{O_2}$)	12) $D O_1 \Phi O_2$ ($L_{O_1} = 2L_{O_2}$)
13) $\Phi O_1 D O_2$ ($2L_{O_1} = L_{O_2}$)	14) $D O_1 \Phi O_2$ ($2L_{O_1} = L_{O_2}$)

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Работа выполняется в виде стандартного отчета. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, требуемые результаты теоретических расчетов.

2. Для простейших систем ОДО и ОФО записать матрицы системы, привести результаты исследования выходных параметров пучка от фокусного расстояния линзы и длин пролетных промежутков.

3. Для квадрупольного дублета записать матрицу системы, привести результаты исследования выходных параметров пучка от фокусного расстояния линзы и длин пролетных промежутков.

4. Для квадрупольного триплета записать матрицу системы, привести результаты исследования выходных параметров пучка от фокусного расстояния линзы и длин пролетных промежутков.

5. Для периодической системы ОФОФ привести матрицу периода, выражения для шпура матрицы и β -функции. Построить график β -функции. Привести результаты исследования выходных параметров пучка от фокусного расстояния линзы и длин пролетных промежутков.

6. Для периодической системы ОФОДО выполнить работу аналогично п. 5.

7. Для заданной индивидуально периодической системы фокусировки привести результаты аналогично п. 5.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Запишите матрицы для фокусирующей и дефокусирующей тонких линз, пролетного промежутка.

2. Постройте траекторию сходящегося (расходящегося) пучка в системах ОФО и ОДО.

3. Покажите геометрически, что в системе ОФОДО расходящийся пучок фокусируется, а сходящийся не подвергается дефокусировке.

4. Можно ли фокусировать пучок в системе ОФОФО?

5. Какой физический смысл имеет параметр Флоке?

6. Получите в общем виде выражение для шпура матрицы периода и покажите его связь с параметром Флоке.

7. Объясните физический смысл β -функции.

8. При каких отношениях длины периода и фокусного расстояния линзы возможна фокусировка в системе ОФОФО?

9. Покажите, что для систем ОФОДО и ОДОФО шпур матрицы одинаков.

10. Докажите, что шпур матрицы периода фокусировки не зависит от выбора начала отсчета периода фокусировки.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
ПУЧКОВ В ИОННЫХ УСКОРИТЕЛЯХ.
УСКОРЕНИЕ ИОНОВ В УСКОРИТЕЛЯХ С
ПРОСТРАНСТВЕННО - ОДНОРОДНОЙ
КВАДРУПОЛЬНОЙ ФОКУСИРОВКОЙ**

Цель работы – закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; ознакомление с принципами работы ускорителей с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой; изучение методов численного моделирования динамики пучков; изучение динамики ионного пучка в ускорителе с ПОКФ.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Принцип работы ускорителя с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой

Ускоритель с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой (ПОКФ, международное название Radio Frequency Quadrupole, RFQ) был предложен И.М. Капчинским в 1960-х годах [2]. В фокусирующих системах, где используются обычные электростатические квадрупольные линзы, для фокусировки пучка в двух поперечных направлениях необходимо менять полярность полюсов. При использовании переменного ВЧ поля можно применить квадрупольную систему фокусирующих электродов, однородную вдоль оси ускорителя. Кроме поперечной фокусировки такая система может обеспечить и ускорение, если расстояние между противоположными электродами одной полярности периодически меняется вдоль оси ускорителя. Действительно, в этом случае в четырехпроводной линии возникает продольная ускоряющая компонента электрического поля. В этом и состоит принцип работы ускорителя с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой, в котором пучок одновременно и ускоряется, и фокусируется.

В общем виде распределение потенциала внутри квадрупольного канала ускорителя (в цилиндрической системе координат) может

быть записано в виде [2]:

$$U(r, \theta, z) = \frac{U}{2} \left\{ \sum_l A_{0l} r^{2l} \cos(2l\theta) + \sum_l \sum_n A_{ln} I_{2n}(lkr) \sin(lkz) \right\} \cos(\omega t), \quad (5.1)$$

$$l+n=p, \quad p=0, 1, 2, \dots,$$

где U – амплитуда разности потенциалов ВЧ поля между соседними электродами. С учетом только низших гармоник ($p=0, l=1$) выражение упрощается:

$$U(r, \theta, z) = \frac{U}{2} \{ A_{01} r^2 \cos(2\theta) + A_{10} I_0(kr) \sin(kz) \} \cos(\omega t). \quad (5.2)$$

Здесь величины

$$A_{01} = \frac{1}{a^2} \frac{I_0(ka) + I_0(Mka)}{M^2 I_0(ka) + I_0(Mka)}, \quad A_{10} = \frac{M^2 - 1}{M^2 I_0(ka) + I_0(Mka)} \quad (5.3)$$

называются параметрами фокусировки и ускорения соответственно, a – апертура канала, M – параметр модуляции канала ускорителя (отношение максимальной амплитуды канала к минимальной, (рис. 5.1)). В декартовой системе координат выражение для потенциала имеет вид:

$$U(x, y, z, t) = \frac{U}{2} \left\{ A_{01} (x^2 - y^2) + A_{10} I_0(k\sqrt{x^2 + y^2}) \cos(kz) \right\} \cos(\omega t). \quad (5.2a)$$

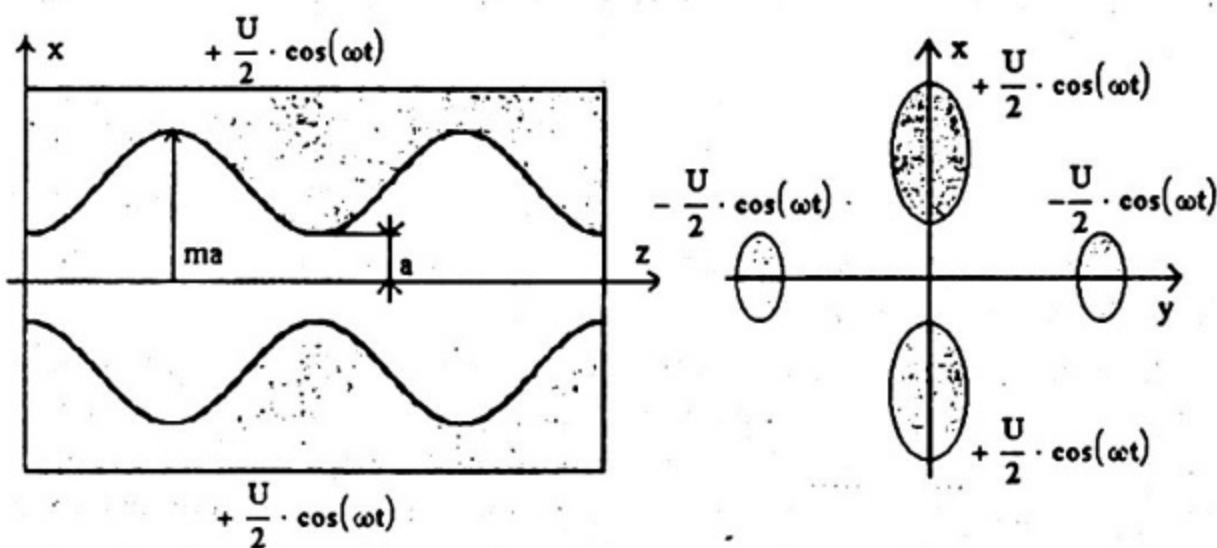


Рис. 5.1. Сечения канала ускорителя с ПОКФ

Теперь легко можно найти компоненты напряженности электриче-

ского поля внутри канала ускорителя:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{U}{2} \left\{ 2A_{01}x + A_{10}I_1 \left(k\sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin(kz) \right\} \cos(\omega t), \\ E_y &= \frac{U}{2} \left\{ 2A_{01}y - A_{10}I_1 \left(k\sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin(kz) \right\} \cos(\omega t), \\ E_z &= -\frac{U}{2} A_{10}I_0 \left(k\sqrt{x^2 + y^2} \right) \cos(kz) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

2. Численное моделирование динамики ионных пучков

Ускорители с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой обычно используются в начальной части сильноточных протонных ускорителей, так как обеспечивают эффективную группировку пучка при большом коэффициенте токопрохождения. С ростом скорости частиц эффективность системы с ПОКФ уменьшается. Поэтому при ускорении протонов или легких ионов системы с ПОКФ используют при энергии не выше 1 – 3 МэВ, т.е. пучок можно считать нерелятивистским. В этом случае в уравнении движения достаточно учитывать только электрическую компоненту ВЧ поля:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{m} \cdot E(r, t), \quad (5.5)$$

где e и m – заряд и масса электрона, функция $E(r, t)$ описывает зависимость напряженности ВЧ поля от координат r и времени t , p – импульс частицы.

В общем случае исследование динамики пучка заряженных частиц в ускорителях состоит в нахождении значений скоростей и координат всех частиц пучка на любом участке траектории [6]. Как видно из выражения (5.4), все три компоненты электрического поля являются сложными функциями координат и времени. Рассмотрим, например, как меняется продольная компонента напряженности поля E_z . Произведение $\cos(kz) \cos(\omega t)$ можно представить как сумму двух бегущих волн – прямой и обратной. Для этого необходимо найти решение уравнения движения для всех частиц. Фаза

прямой и обратной волн может быть записана как

$$\varphi = \int k_z dz - \omega t, \quad (5.6)$$

$$\bar{\varphi} = \int k_z dz + \omega t. \quad (5.7)$$

Частицы пучка будут эффективно взаимодействовать с прямой волной, если в пучке присутствует ион, скорость которого в любой момент времени совпадает с фазовой скоростью волны. Такая частица называется синхронной. Для того, чтобы реализовать это условие, период модуляции структуры ПОКФ необходимо выбрать равным $D = \beta_s \lambda$, где $\beta_s = v_s / c$ – приведенная скорость синхронной частицы. Для всех остальных частиц пучка фаза φ будет медленно меняющейся функцией. В то же время взаимодействием частиц с полем встречной волны можно пренебречь, так как в системе координат, связанной с пучком, ее воздействие можно рассматривать как быстро осциллирующую силу, которая не оказывает существенного влияния на ускорение.

С учетом вышеизложенного зависимость скорости синхронной частицы от времени можно рассчитать из уравнения:

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{e}{m} \cdot \frac{E_s}{2} \cos \varphi_s. \quad (5.8)$$

Уравнение для изменения продольной скорости произвольной частицы пучка переписывается в виде:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m} \cdot \frac{E_z}{2} \cos \varphi. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9) в общем случае является уравнением второго порядка и описывает только движение частицы в продольном направлении. При рассмотрении поперечного движения в правой части уравнения (5.5) также можно выделить составляющие, связанные с полем прямой и обратной волн. В уравнении для поперечного движения можно аналогично пренебречь быстро осциллирующей компонентой, связанной с обратной волной. Таким образом, для продольного и поперечного движений система уравнений (5.5) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{E_x}{2} \sin \varphi, & \frac{dx}{dt} &= v_x, \\
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{E_y}{2} \sin \varphi, & \frac{dy}{dt} &= v_y, \\
\frac{dv_z}{dt} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{E_z}{2} \cos \varphi, & \frac{dz}{dt} &= v_z.
\end{aligned}
\tag{5.10}$$

К этой системе необходимо также добавить уравнение, описывающее изменение фазы произвольной частицы в процессе ускорения. Его легко найти, продифференцировав уравнение (5.6):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \left(\frac{v_z}{v_s} - 1 \right). \tag{5.11}$$

Система уравнений (5.8) – (5.11) полностью описывает движение частицы в ВЧ поле. В линейных ускорителях при моделировании динамики ионного пучка в качестве независимой переменной удобно использовать продольную координату z :

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dz} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{E_x}{2v_z} \sin \varphi, \\
\frac{dx}{dz} &= \frac{v_x}{v_z}, \\
\frac{dv_y}{dz} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{E_y}{2v_z} \sin \varphi, \\
\frac{dy}{dz} &= \frac{v_y}{v_z}, \\
\frac{dv_z}{dz} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{E_z}{2v_z} \cos \varphi, \\
\frac{dt}{dz} &= \frac{1}{v_z}, \\
\frac{dv_s}{dz} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{E_s}{2v_s} \cos \varphi_s, \\
\frac{d\varphi}{dz} &= \omega \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_z} \right).
\end{aligned}
\tag{5.12}$$

В дальнейшем при численном моделировании динамики пучков заряженных частиц удобно ввести безразмерные величины продольных и поперечных координат и скоростей и безразмерное время:

$$\rho = \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad \eta = \frac{2\pi}{\lambda} y, \quad \xi = \frac{2\pi}{\lambda} z, \quad \beta_{x,y,z} = \frac{v_{x,y,z}}{c}, \quad \tau = \omega t, \quad (5.13)$$

В безразмерных переменных (5.13) система уравнений (5.12) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_x}{d\xi} &= \frac{e_x}{\beta_z} \sin\varphi, \\ \frac{d\rho}{d\xi} &= \frac{\beta_x}{\beta_z}, \\ \frac{d\beta_y}{d\xi} &= \frac{e_y}{\beta_z} \sin\varphi, \\ \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{\beta_y}{\beta_z}, \\ \frac{d\beta_z}{d\xi} &= \frac{e_z}{\beta_z} \cos\varphi, \\ \frac{d\tau}{d\xi} &= \frac{1}{\beta_z}, \\ \frac{d\beta_s}{d\xi} &= \frac{e_s}{\beta_s} \cos\varphi_s, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{1}{\beta_s} - \frac{1}{\beta_z}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где $e_{x,y,z,s} = \frac{e\lambda E_{x,y,z,s}}{4\pi mc^2}$ – безразмерные амплитуды поля. Система уравнений (5.14) может быть решена, если известны начальные условия:

$$\begin{aligned} \beta_{x,i}(z=0), \beta_{y,i}(z=0), \beta_{z,i}(z=0), \beta_s(z=0), \\ x(z=0), y(z=0), \varphi_i(z=0). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Решение системы уравнений может быть произведено только с использованием численных методов. Наиболее распространёнными

численными методами решения систем дифференциальных уравнений являются методы прогноза и коррекции (метод Милна, метод Адамса) и методы Рунге – Кутты [7].

3. Особенности динамики ионного пучка в ускорителе с ПОКФ

Как уже говорилось, при исследовании динамики пучков удобно пользоваться безразмерными переменными. Для пучка, ускоряемого в ПОКФ, система уравнений в безразмерном виде будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_x}{d\xi} &= -\frac{\bar{U}}{2\beta_z} \left\{ 2\bar{A}_{01}\rho + \frac{A_{10}}{\beta_s} I_1 \left(\frac{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}{\beta_s} \right) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} \sin(\varphi + \tau) \right\} \cdot \cos(\tau), \\ \frac{d\beta_y}{d\xi} &= -\frac{\bar{U}}{2\beta_z} \left\{ -2\bar{A}_{01}\eta + \frac{A_{10}}{\beta_s} I_1 \left(\frac{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}{\beta_s} \right) \frac{\eta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} \sin(\varphi + \tau) \right\} \cdot \cos(\tau), \\ \frac{d\beta_z}{d\xi} &= \frac{\bar{U} \cdot A_{10}}{2\beta_z \beta_s} I_0 \left(\frac{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}{\beta_s} \right) \cos(\varphi + \tau) \cos(\tau),\end{aligned}\tag{5.16}$$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\beta_x}{\beta_z},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\beta_y}{\beta_z},$$

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{1}{\beta_z},$$

$$\frac{d\beta_s}{d\xi} = \frac{\bar{U} \cdot A_{10}}{4\beta_s^2} \cos\varphi_s,$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{\beta_s} - \frac{1}{\beta_z},$$

где $\bar{U} = eU/W_0$, $\bar{A}_{01} = A_{01} \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$.

Рассмотрим теперь особенности группировки ионного пучка в

ускорителях с ПОКФ. Обычно для группировки пучка используются секции, в которых синхронная фаза спадает по определенному (например линейному) закону, а амплитуда ускоряющего поля нарастает. При этом функции изменения синхронной фазы и амплитуды поля стараются выбрать таким образом, чтобы продольный размер сгустка оставался неизменным. В ускорителях с ПОКФ роль эффективной амплитуды играет произведение $\bar{U} \cdot A_{10}$. При группировке пучка удобно менять величину параметра ускорения A_{10} . Этого можно добиться, меняя величину параметра модуляции

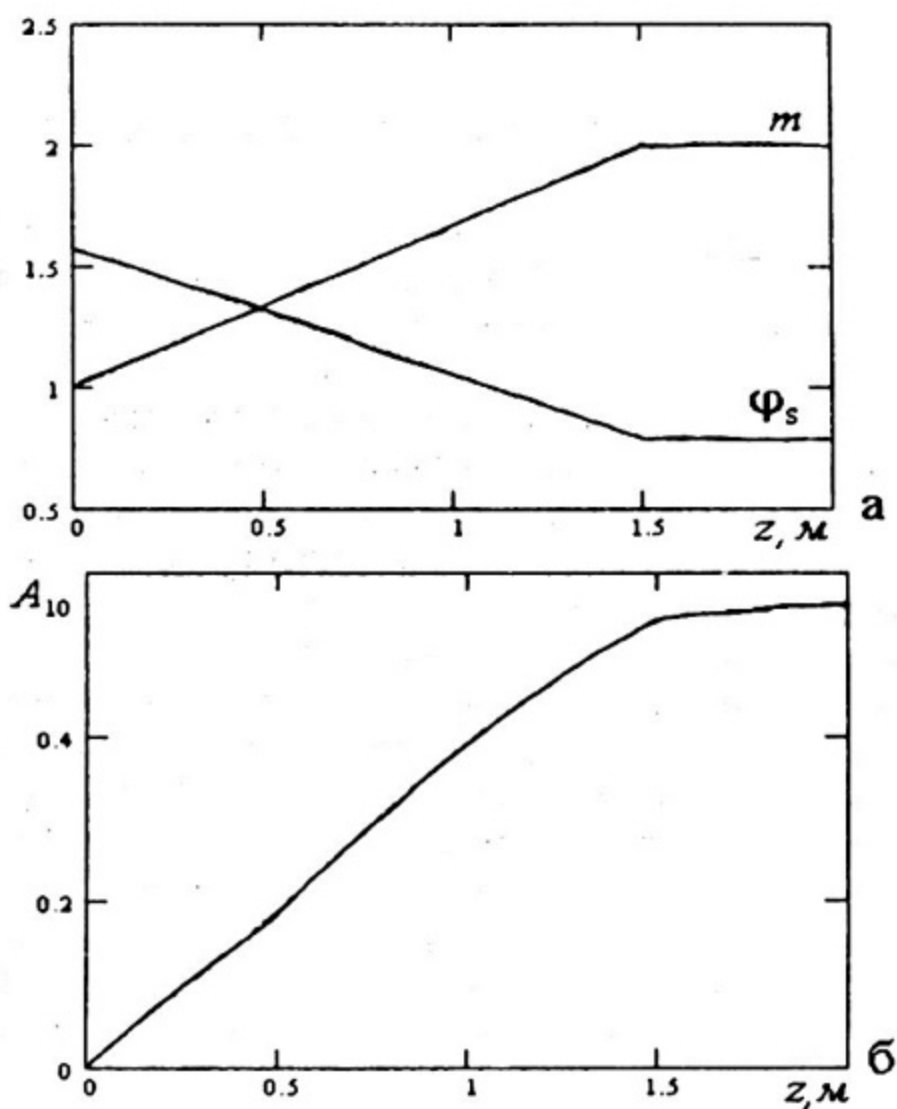


Рис. 5.2. Изменение параметра модуляции M , синхронной фазы φ_s и параметра ускорения A_{10} в процессе группировки и ускорения ионного пучка в ПОКФ

M (обычно в пределах от 1 до 2). Следует сразу отметить, что величина A_{10} на практике всегда меньше единицы (обычно 0.6 – 0.7). При этом максимальный темп ускорения в системе с ПОКФ всегда будет меньше, чем в ускорителях с трубками дрейфа. Для простоты в данной лабораторной работе синхронная фаза φ_s была выбрана линейно спадающей от $\pi/2$ до $\pi/4$, а параметр модуляции – линейно нарастающим (рис. 5.2,а). На рис. 5.2,б показана соответствующая линейному росту параметра модуляции зависимость A_{10} . Отметим, что выбранные линейные зависимости не являются оптимальными для обеспечения максимального коэффициента захвата.

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель выполнена с использованием математического пакета Mathsoft © Mathcad и состоит из трех основных частей. В первой – блоке начальных данных – заданы основные константы (скорость света, заряд электрона, масса протона и т.д.). В первой части должны задаваться также параметры моделирования: амплитуда U и частота f ускоряющего ВЧ поля, длины ускорителя и группирователя, энергия инжекции и т.д. Здесь же заданы законы изменения синхронной фазы и параметра модуляции, приведены формулы для расчета параметров ускорения и модуляции. Вид блока начальных данных показан на рис. 5.3.

Во второй части программы численного моделирования задаются начальные условия для интегрирования. Здесь также приведена система дифференциальных уравнений, в нерелятивистском приближении описывающая динамику ионного пучка в ускорителе - группирователе с ПОКФ, проводится интегрирование системы уравнений. Интегрирование уравнения движения проводится методом Рунге – Кутты четвертого порядка с помощью интегрированной в пакет Mathcad функции. Интегрирование проводится по продольной координате в одночастичном приближении. Для интегрирования необходимо задать начальные параметры частицы: начальную энергию, фазу, значения поперечных начальных отклонений от оси системы и поперечные скорости.

В третьей части программы в виде графиков приведены числен-

Заряд электрона, Кл	$e = 1.62 \cdot 10^{-19}$	
Масса протона, кг	$m_0 = 1.674 \cdot 10^{-27}$	
Скорость света, м/с	$c = 3 \cdot 10^8$	
Энергия поода, эВ	$W = 9.38 \cdot 10^8$	
Частота, Гц	$f = 200 \cdot 10^6$	
Апертура, м	$A = 0.005$	
Разность потенциалов ВЧ поля, В	$U_0 = 100 \cdot 10^3$	
Безразмерная амплитуда	$u_0 = \frac{e \cdot U_0}{W_0}$	
	$u_0 = 1.066 \times 10^{-4}$	
Начальная энергия синхронной частицы, эВ	$W_s = 100 \cdot 10^3$	
Скорость синхронной частицы	$\beta_0 = \left[1 - \left(\frac{W}{W_s + W} \right)^2 \right]^{0.5}$	
	$\beta_0 = 0.015$	
Длина ускорителя L, м	$L = 2$	
Длина участка группировки Lgroup, м	$L_{group} = 1.5$	
Начальное значение синхронной фазы ψ	$\psi = \frac{\pi}{2}$	
Конечное значение синхронной фазы ψ_{end}	$\psi_{end} = \frac{\pi}{4}$	
Длина участка нарастания поля	$L_{field} = 1.5$	
Начальное и максимальное значения параметра модуляции	$Min = 1$	$M_{max} = 2$
Число точек по z	$N = 500$	

Рис. 5.3. Блок начальных данных для расчета динамики пучка

но рассчитанные зависимости продольных и поперечных скоростей частицы, ее фазы и поперечных координат в зависимости от продольной координаты z , показаны фазовые траектории частицы в процессе ускорения. Также приведены зависимости параметра модуляции канала ускорителя, синхронной фазы и параметра ускорения.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения особенностей движения ионов в ускорителе с ПОКФ.

2. Получить безразмерные уравнения движения ионного пучка в ускорителе с ПОКФ.

3. Провести моделирование динамики частицы, инжектированной вблизи синхронной частицы. Определить максимальную энергию.

4. Провести моделирование динамики частиц, инжектированных вблизи седловых точек сепаратрисы. Найти не захваченную частицу и исследовать ее поведение.

5. Исследовать зависимость максимальной энергии пучка от длины ускорителя.

6. Исследовать зависимость максимальной энергии пучка от длины группирователя.

7. Определить коэффициент токопрохождения для частиц, инжектированных по оси.

8. Исследовать зависимость коэффициента токопрохождения пучка от длины группирователя.

9. Определить коэффициент токопрохождения для пучка конечного диаметра.

10. Убедиться, что поперечные колебания для частиц с начальными условиями $(x = 0, y \neq 0)$ и $(x \neq 0, y = 0)$ совершаются в противофазе.

11. Определить предельный размер пучка, который может быть ускорен в канале с заданной величиной апертуры.

12. Исследовать влияние начальной поперечной скорости частиц на динамику. Найти предельную величину поперечной скорости. Определить предельный начальный эмиттанс пучка.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Работа выполняется в виде стандартного отчета. В отчет за-
носятся: название работы, цель работы, полученные задания, ре-
зультаты моделирования, использованные формулы, требуемые
результаты теоретических расчетов.

2. Результаты всех измерений следует заносить в таблицы с со-
ответствующими названиями колонок и отображать на графиках.

3. Провести вывод безразмерных уравнений движения в уско-
рителе с ПОКФ.

4. Построить график зависимости максимальной энергии пучка
от длин ускорителя и группирователя.

5. Построить графики зависимостей коэффициента токопрохо-
ждения, найденные при выполнении пп. 8 – 9.

6. Объяснить, почему поперечные колебания для частиц с на-
чальными условиями ($x = 0, y \neq 0$) и ($x \neq 0, y = 0$) совершаются в
противофазе.

7. Привести результаты расчета максимального начального по-
перечного эмиттанта пучка.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какие методы исследования динамики пучков вы знаете?

2. Поясните принципы построения численной модели для изу-
чения динамики ионных пучков. Какова роль граничных и началь-
ных условий?

3. Почему интегрирование уравнений движения ионов в уско-
рителе с ПОКФ удобно проводить не по времени, а по продольной
координате?

4. Поясните принцип работы ускорителя с пространственно-
однородной квадрупольной фокусировкой.

5. Выведите выражения для параметров ускорения и модуляции
в системе с ПОКФ.

6. Объясните особенности группировки пучка в ПОКФ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПОЛЬЗОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПАКЕТОМ MATHCAD

Математический пакет Mathsoft © Mathcad является удобной математической оболочкой, предназначенной для решения физических или иных задач. От подобных пакетов, таких как Mathlab, Wolfram Research Mathematica, Mathcad отличается максимально простым и удобным для пользователя интерфейсом. Вместе с тем пакет позволяет решать достаточно сложные задачи, например численное интегрирование, решение систем нелинейных уравнений, решение краевых задач и т.д. Кроме того, программа имеет качественные и удобные для использования встроенные графические модули. Недостатком математического пакета является большое по сравнению с другими пакетами время счета.

Внешний вид оболочки Mathad показан на рис. П.1. Кроме традиционных панелей инструментов Windows, позволяющих осуществлять стандартный набор операций (создание, открытие или сохранения файлов, печать документа, форматирование, операции с текстом и т.д.), программа имеет еще и панель математических операций. Данная панель содержит восемь подразделов, позволяющих совершать математические операции и программировать: «калькулятор», «графика», «вычисления», «сложные расчеты» (суммы, интегралы и пределы), «логические операции», «матричные операции», «греческие буквы», «символьные операции».

Кратко рассмотрим основные особенности использования Mathcad.

Структура документа. Алфавит и лексика. В Mathcad отдельные части программы (операторы, переменные, константы, подпрограммы, комментарии) могут быть расположены на листе в произвольном порядке. При этом необходимо помнить, что вычисления производятся сверху вниз и слева направо. Mathcad позволяет использовать для обозначения констант и переменных латинские, русские и греческие буквы. Величины, обозначенные прописными и строчными буквами, программа понимает как разные, т.е. две переменные могут быть обозначены, например, буквами R и r . Переменные и константы могут иметь название, состоящее из

нескольких букв, причем в одном названии можно использовать вместе латинские, русские и греческие буквы.

Отметим, что значения чисел e и π уже известны Mathcad. Для обозначения десятичной точки может использоваться как «.», так и «,».

Основные математические операции. Для операции присваивания Mathcad использует символ «:=» (быстрая клавиша «:»). Символ «=» используется для отображения результата (пример см. на рис. П.2). Кроме того, для оператора присваивания имеются специальные кнопки на панелях «калькулятор» и «вычисления». Для проведения основных математических операций – сложения, вычитания, умножения и деления – используются стандартные символы и соответствующие им кнопки на клавиатуре. Все эти операции имеются также и на панели «калькулятор». Для расчета простейших математических функций (корней, логарифмов, степенных функций, тригонометрических функций) также имеются кнопки на панели «калькулятор». Эти же операции могут быть выполнены с использованием быстрых клавиш (см. табл. П.1).

Организация цикла в Mathcad. Программа позволяет просто организовывать безусловные циклы. Для этого достаточно назначить цикловую переменную и присвоить ей диапазон изменения и, если это необходимо, шаг. Начальное и конечное значение диапазона разделяются многоточием (быстрая клавиша «:»). По умолчанию нумерация элементов массивов в Mathcad начинается с нуля, но при желании начальное значение индекса может быть изменено пользователем. Примеры задания индекса циклов в Mathcad приведены на рис. П.3. Для отображения значения одного из элементов вектора или матрицы необходимо набрать имя вектора или матрицы с индексами, обозначающими номер элемента (пример см. на рис. П.4).

Использование функций. Пользовательские функции. Встроенные процедуры и функции Mathcad. Синтаксическое описание пользовательских функций в Mathcad и обращение к ним выполняются достаточно просто. Для вызова функции необходимо указать имя функции и в круглых скобках соответствующие параметры. Примеры использования функций показаны на рис. П.2, П.4 – П.8. Для задания пользовательской функции в Mathcad необходимо указать имя функции и в скобках перечислить переменные

$$A := \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = 0.707$$

Рис. 11.2: Операция присваивания

$$i := 0..10$$

$$x_i := \frac{\pi}{2} \cdot \frac{i}{10}$$

$$f_i := \sin(x_i)$$

Рис. 11.4: Операции с векторами

$$i := 0..10 \quad j := 0, 2..10 \quad k := 10, 9..0 \quad n := 5, -1..-20$$

$$i =$$

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

$$j =$$

0
2
4
6
8
10

$$k =$$

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

$$n =$$

5
-1
-7
-13
-19

Рис. 11.3: Примеры задания циклов в Mathcad

(см. рис. П.6). В правой части описания функции, после знака присваивания, должна содержаться зависимость объявленной пользовательской функции от указанных переменных. Здесь необходимо сделать два замечания. Зависимость в правой части может включать в себя переменные, отсутствующие в левой части, но при этом они должны быть определены в документе выше, чем задана функция. Кроме того, описание функции в левой части может содержать большее число переменных, чем зависимость в правой части. Эти два случая проиллюстрированы на рис. П.7. Пользовательские функции могут также содержать обращения к другим функциям, при этом в качестве переменных в левой части указываются все переменные, описывающие как функцию верхнего уровня, так и вложенную функцию (см. рис. П.7).

Mathcad содержит огромное количество встроенных функций: математических, логических, символьных и т.д. В число математических функций входят как простейшие функции (тригонометрические, алгебраические, гиперболические, логарифмические, матричные и т.д.), так и функции, позволяющие с применением численных методов решать сложные физические задачи: поиск корней систем уравнений, численное интегрирование, решение краевых задач, преобразования Фурье и др. Примеры использования встроенных функций приведены на рис. П.2, П.4, П.5, П.8. Для добавления в программу встроенной функции Mathcad могут быть использованы два способа. Можно ввести «вручную» имя функции и ее параметры, а можно воспользоваться кнопкой «вставить функцию»



на панели инструментов. При этом появится окно (рис. П.9), содержащее перечень встроенных функций Mathcad, разделенных на несколько групп. Кроме того, в нижней части окна для каждой функции приведено краткое ее описание. Некоторые встроенные функции Mathcad, которые будут использоваться в лабораторных работах, описаны в табл. П.2.

Графики в Mathcad. Как уже говорилось выше, Mathcad включает встроенный математический пакет, имеющий достаточно широкие возможности. Для добавления двумерного графика в декартовой системе координат можно использовать соответствующие быстрые клавиши (см. табл. П.1), панель «Графика» или

$$\cos(0.5) = 0.878$$

$$\operatorname{asin}(1) = 1.571$$

Рис. П.5. Использование функций в Mathcad

$$f(x, y, z) := 5 \cdot x^2 + 3 \cdot y^3 \cdot z$$

$$a := f(1, 2, 4)$$

$$a = 101$$

$$f(2, 4, 1) = 212$$

Рис. П.6. Задание пользовательских функций в Mathcad и их использование

$$A := 3$$

$$f(x, t) := A \cdot \sin(x)$$

$$f(1, 0) = 2.524$$

$$f(1, 100) = 2.524$$

Рис. П.7. Особенности использования функций

Функции Бесселя

$$Y_0(0) = 1$$

Действительная часть
комплексного числа

$$\operatorname{Re}(1 + 2i) = 1$$

Чтение в массив из файла

$$\text{file} := \operatorname{READPRN}(\text{"data.txt"})$$

Гиперболический косинус

$$\cosh(1) = 1.543$$

Логарифм

$$\log(64, 2) = 6$$

Число столбцов матрицы

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cols}(M) = 3$$

Рис. П.8. Примеры использования встроенных функций Mathcad

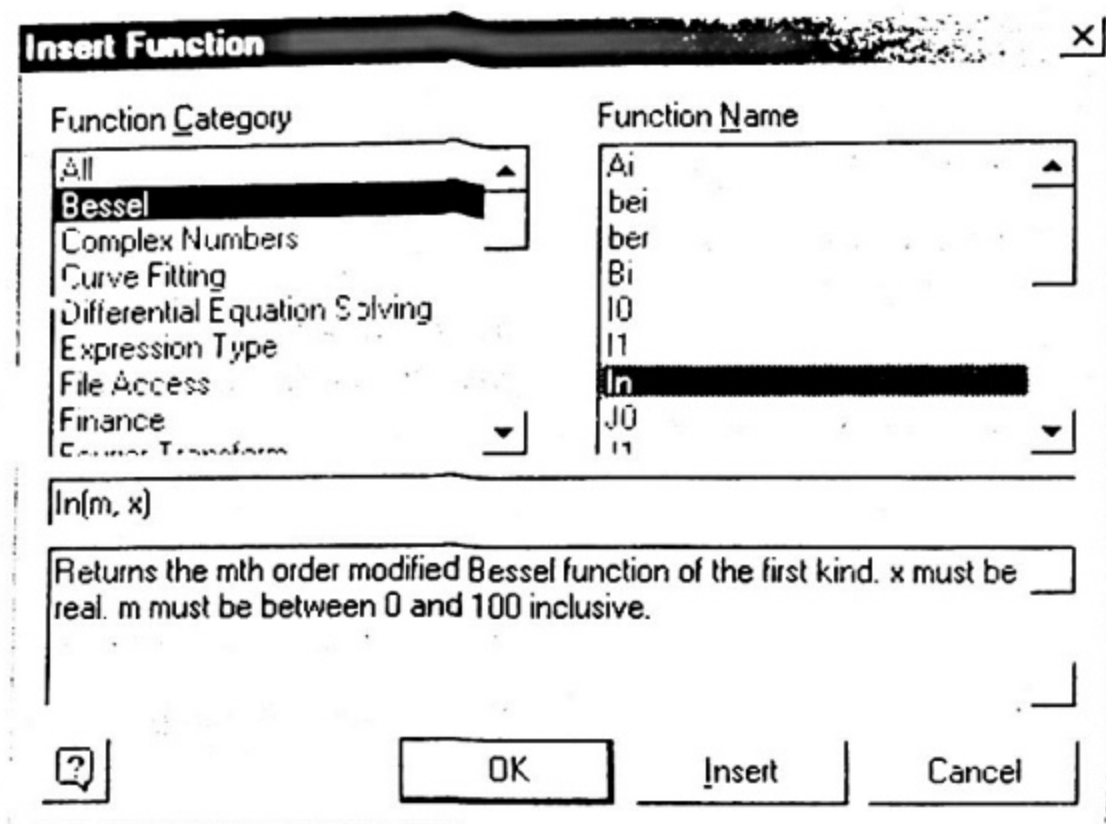


Рис. 11.9. Добавление встроенных функций Mathematica

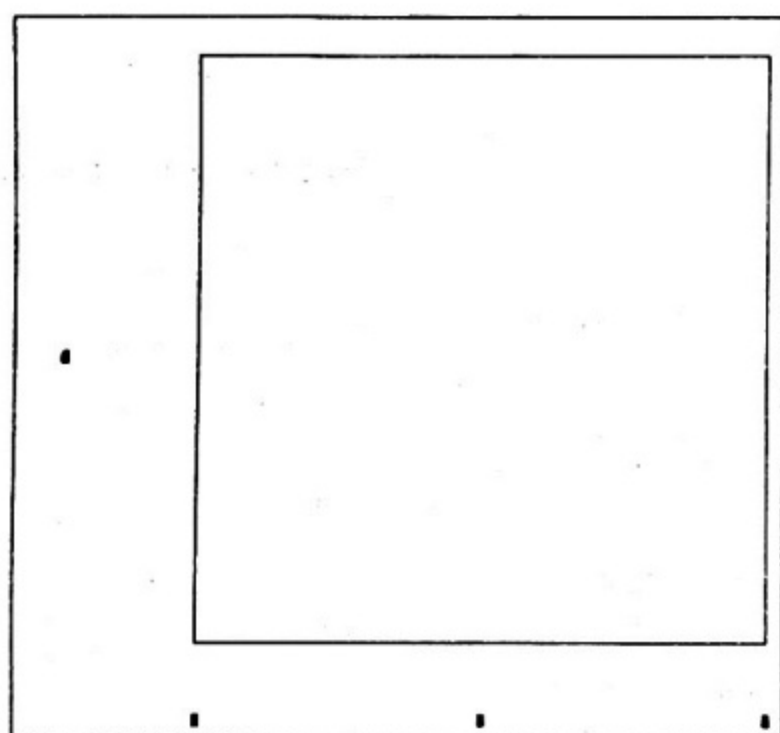


Рис. 11.10. Окно двумерного графика

использовать меню «Графика» из закладки «Вставить». При этом на экране появится окно, изображенное на рис. П.10. Окно имеет четыре поля. Под графиком в середине имеется поле, в котором указывается аргумент функции, в полях по краям – диапазон построения графика. В поле слева от графика указывается функция, которая будет построена (пример см. на рис. П.11). Вместо аргумента и функции могут быть указаны имена двух массивов. Этот случай показан на рисунке П.12. Если число элементов обоих векторов одинаково, то индекс у имен массивов может быть опущен. Диапазон изменения функции также при необходимости может быть указан слева от графика. Аналогичным образом может быть построен и график в полярных координатах.

Mathcad имеет ряд удобных встроенных функций для обработки графиков. Так функция «zoom» позволяет увеличить часть графика для лучшего рассмотрения. Функция «trace» позволяет считывать аргумент и значение функции прямо с графика. Использование этих функций проиллюстрировано на рис. П.13.

Mathcad также позволяет строить трехмерные графики. При добавлении трехмерного графика на экране появится окно, изображенное на рис. П.14. Окно имеет поле, в которое записывается имя двумерной матрицы, которая будет построена. Пример построения трехмерного графика показан на рис. П.14. Mathcad также позволяет строить графики линии уровня, векторные поля, столбчатые диаграммы. Построение этих графиков производится аналогично.

Использование подпрограмм. Mathcad позволяет создавать сложные пользовательские функции, которые удобно оформлять в виде подпрограмм. В левой части подпрограмма содержит имя функции и параметры, от которых она будет рассчитываться. В правой части содержится описание подпрограммы. Описание слева ограничивается вертикальной чертой. При описании математических операторов в подпрограммах используется панель «Программирование». На рис. П.15 показан пример подпрограммы. Приведенная подпрограмма позволяет рассчитывать спектральное распределение функции. Здесь W – вектор, содержащий значения исследуемой функции в узлах сетки, $W_{\max}$ и $W_{\min}$ – максимальное и минимальное значения функции на участке исследования, N – узлов сетки, K – число элементов в векторе, отображающем спектральное распределение.

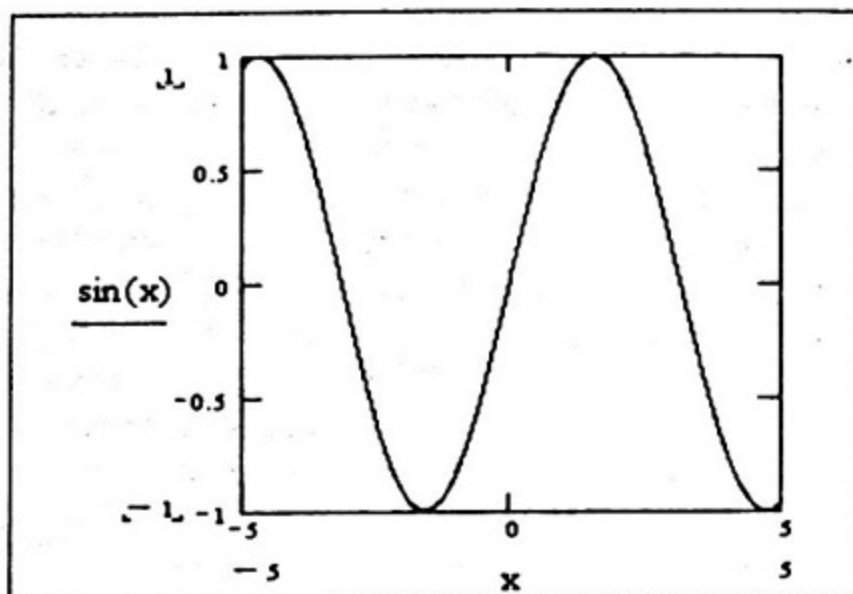


Рис. П.11. Двумерный график в Mathcad

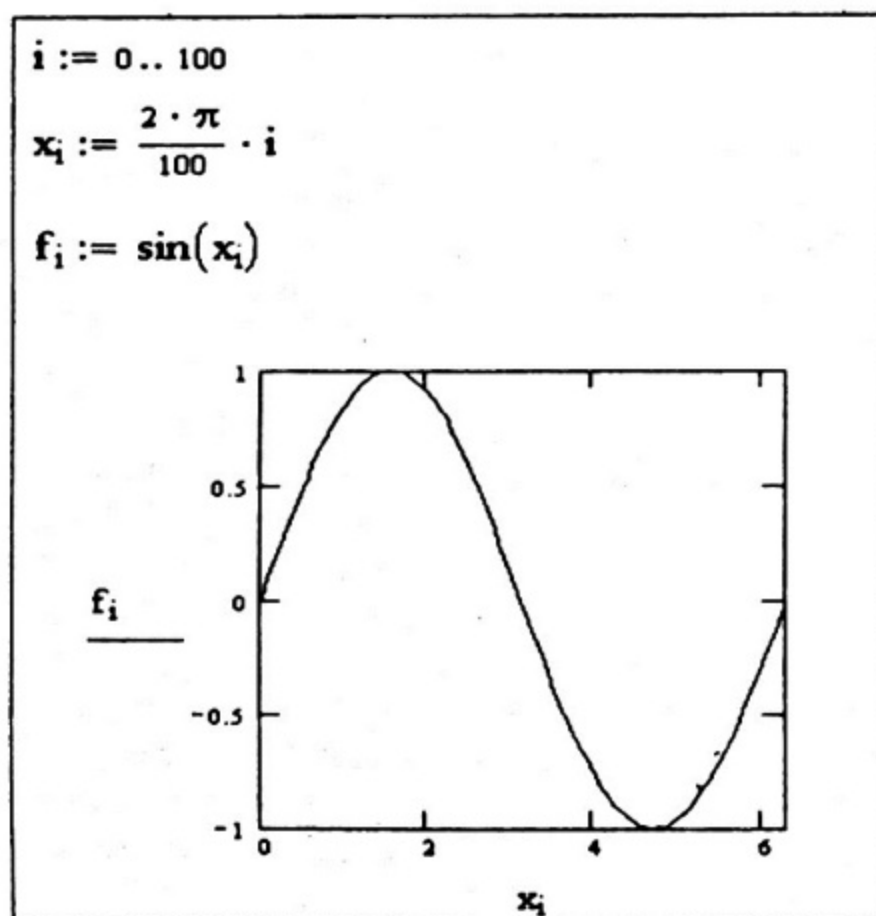


Рис. П.12. Построение графика ранее рассчитанной функции

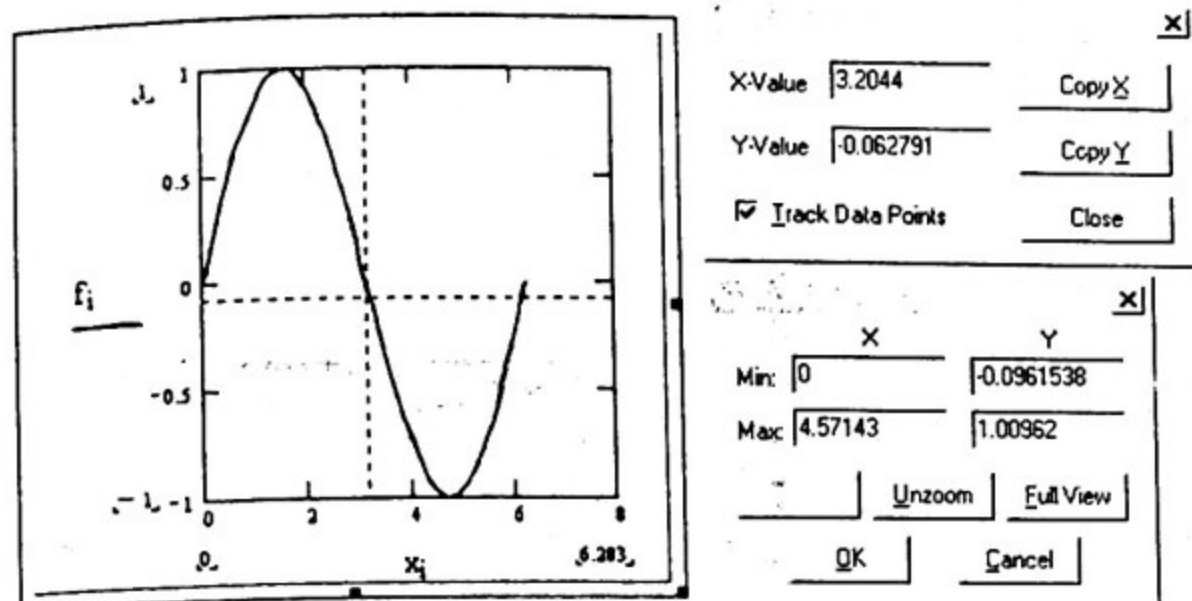


Рис. П.13. Функции «zoom» и «trace»

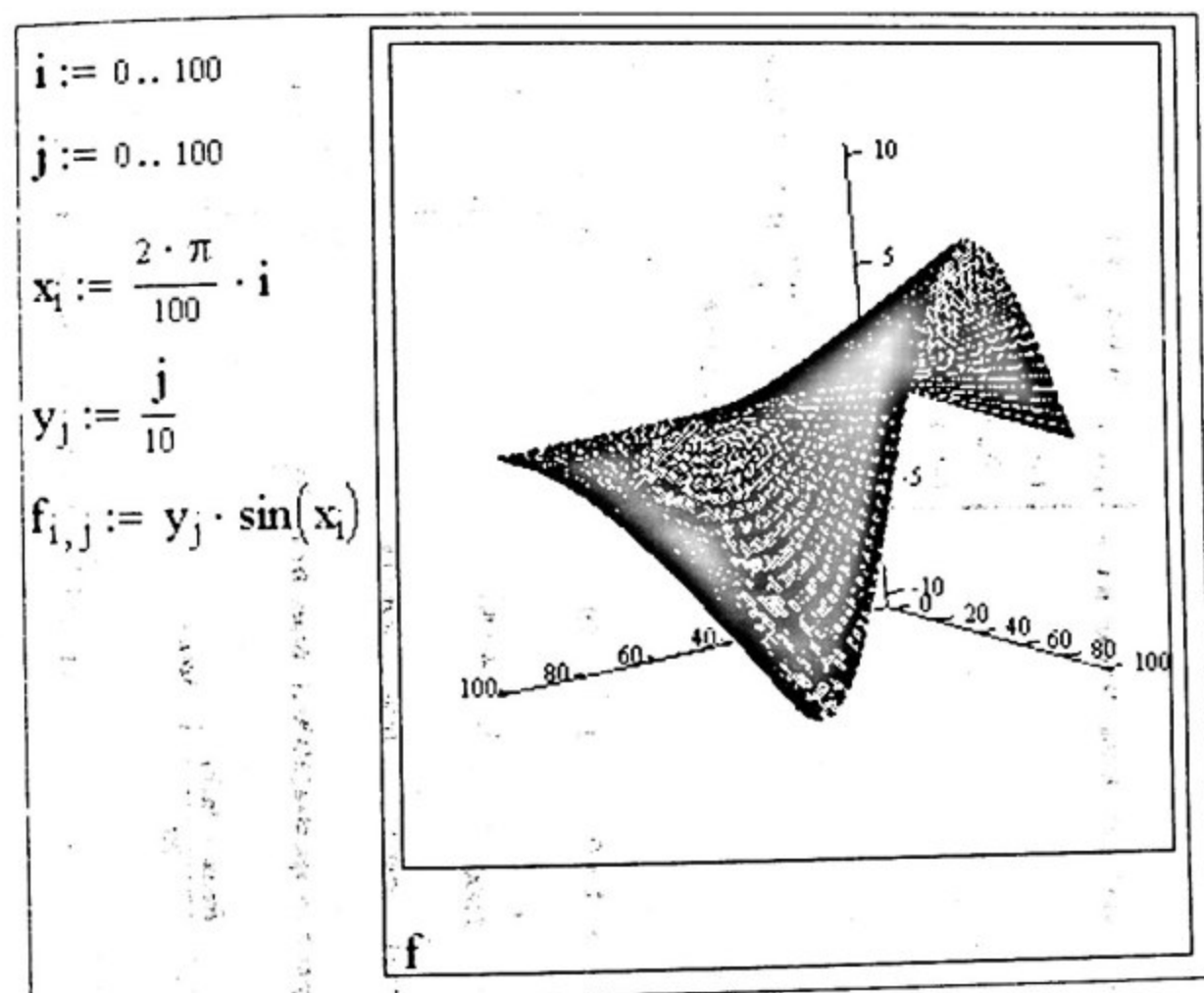


Рис. П.14. Трехмерный график в Mathcad

```

spectra(N, W, Wmin, Wmax, K) :=
  step ←  $\frac{W_{\max} - W_{\min}}{K}$ 
  for i ∈ 0..K
     $X_i \leftarrow 0$ 
  for j ∈ 0..N
    for i ∈ 1..K+1
       $a \leftarrow X_{i-1}$ 
       $a \leftarrow a + \frac{100}{N}$  if  $W_j < W_{\min} + i \cdot \text{step} \wedge W_j > W_{\min} + (i-1) \cdot \text{step}$ 
       $X_{i-1} \leftarrow a$ 
  X

```

```
i := 0..1000    j := 0..20
```

```
 $x_i := \frac{10 \cdot \pi}{1000} \cdot i$      $f_j := \sin(x_i)$ 
```

```
fmax := max(f)    fmin := min(f)
```

```
spectr := spectra(1000, f, fmin, fmax, 20)
```

```
 $f_{sj} := \frac{f_{\max} - f_{\min}}{20} \cdot j + f_{\min}$ 
```

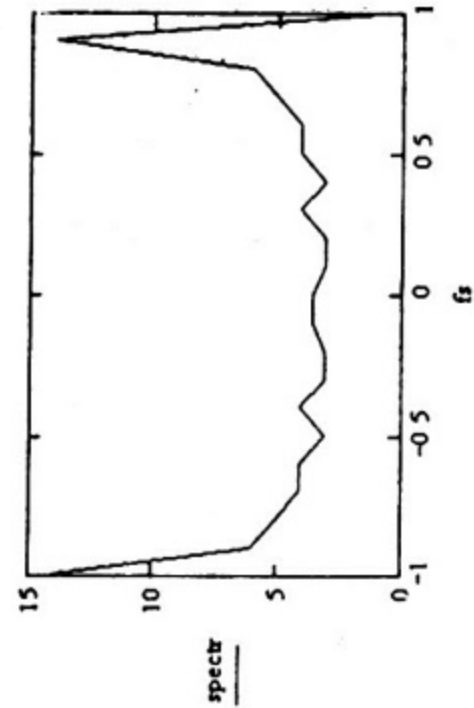


Рис. 11.15. Пример использования подпрограммы в Mathcad

Приведенная выше информация о программировании в среде Mathcad является достаточной для выполнения лабораторных работ. Более детальное описание содержится в [1].

Быстрые клавиши Mathcad

Таблица П.1

Операция	Клавиши	Пример
Присвоение	:	$a := 2.5$
Тождественно равно	~	$a \equiv b$
Не равно	Ctrl + 3	$a \neq b$
Меньше или равно	Ctrl + 9	$a \leq b$
Больше или равно	Ctrl + 10	$a \geq b$
Бесконечность	Ctrl + Shift + Z	∞
Корень	\	$\sqrt{a}$
Корень порядка n	Ctrl + \	$\sqrt[n]{a}$
Степенная функция	Shift + 6	$10^2, a^b$
Модуль, определитель матрицы		$ x $
Факториал	Shift + 1	$n!$
Сумма ряда	Shift + 4	$\sum_n a_n$
Определенный интеграл	Shift + 7	$\int_a^b x dx$
Дифференциал	Shift + /	$\frac{d}{dx}$
Дифференциал порядка n	Ctrl + Shift + /	$\frac{d^2}{d^2 x}$
Предел	Shift + L	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
Добавить матрицу	Ctrl + M	
Нижний индекс матрицы или вектора	[	$A_{1,2}$

Операция	Клавиши	Пример
Сумма элементов вектора	Ctrl + 4	
Транспонирование матрицы	Ctrl + 1	M^T
Диапазон изменения в цикле	;	$A := 0..100$
Добавить график в двумерных декартовых координатах	Shift + 2	
Добавить график в трехмерных декартовых координатах	Ctrl + 2	
Добавить график в двумерных круговых координатах	Ctrl + 7	
Добавить график линий уровня	Ctrl + 5	
Добавить линию для подпрограммы	]	см. рис. П.15
Определить переменную в подпрограмме	{	
Условный оператор if	}	
Цикл for	Ctrl + "	

Таблица П.2

Встроенные функции Mathcad

Функция	Обращение	Описание
Тригонометрические функции		
Синус	$\sin(x)$	x – аргумент (в радианах)
Косинус	$\cos(x)$	
Тангенс	$\tan(x)$	
Котангенс	$\cot(x)$	
Арксинус	$\text{asin}(x)$	x – аргумент ($-1 \leq x \leq 1$)
Арккосинус	$\text{acos}(x)$	
Арктангенс	$\text{atan}(x)$	x – аргумент

Функция	Обраще- ние	Описание
Гиперболические функции		
Синус гиперболический	$\sinh(x)$	x – аргумент (в радианах)
Косинус гиперболиче- ский	$\cosh(x)$	
Тангенс гиперболический	$\tanh(x)$	
Функции Бесселя		
Функция Бесселя: - нулевого порядка - первого порядка - произвольного порядка	$J_0(x)$ $J_1(x)$ $J_n(n, x)$	x – аргумент x – аргумент, n – порядок
Модифицированная функция Бесселя: - нулевого порядка - первого порядка - произвольного порядка	$I_0(x)$ $I_1(x)$ $I_n(n, x)$	x – аргумент x – аргумент, n – порядок
Логарифмические и потенциальные функции		
Натуральный логарифм	$\ln(x)$	x – аргумент
Логарифм	$\log(x, [a])$	x – аргумент, a – показате- ль, если $a=0$, то вычисля- ется десятичный логарифм
Экспонента	$\exp(x)$	x – аргумент
Функции округления		
Округление	$\text{round}(x, n)$	x – аргумент, n – порядок округления; если $n=0$, то округление до целой вели- чины; если $n<0$, то округ- ление проводится до десят- ков, сотен, тысяч и т.д.
Округление до целого	$\text{trunc}(x, n)$	x – аргумент

Функция	Обращение	Описание
Встроенные численные методы		
Решение систем дифференциальных уравнений		
Метод Рунге – Кутта 4-го порядка с постоянным шагом	$\text{rkfixed}(y, x1, x2, N, D)$	y – вектор начальных данных, $[x1, x2]$ – диапазон интегрирования, N – число точек сетки, D – система дифференциальных уравнений (или одно уравнение)
Метод Рунге – Кутта 4-го порядка с переменным шагом	$\text{Rkadapt}(y, x1, x2, N, D)$	y – вектор начальных данных, $[x1, x2]$ – диапазон интегрирования, N – число столбцов в матрице, отображающей результат интегрирования. D – система дифференциальных уравнений (или одно уравнение)
Метод Булirxa – Штоера	$\text{Bulstoer}(y, x1, x2, N, D)$	y – вектор начальных данных, $[x1, x2]$ – диапазон интегрирования, N – число столбцов в матрице, отображающей результат интегрирования, D – система дифференциальных уравнений (или одно уравнение)
Преобразования Фурье		
Прямое	$\text{fft}(v)$	v – вектор, содержащий 2^n элементов, n – целое
Обратное	$\text{cfft}(v)$	v – вектор, содержащий $2^{n-1} + 1$ элементов, n – целое
Решение уравнений (систем уравнений)		
Системы линейных уравнений	$\text{lsolve}(M, v)$	Возвращает решение x системы уравнений вида $M \cdot x = v$

Функция	Обращение	Описание
Поиск корней уравнений	$\text{root}(f(x), x, [a, b])$	$f(x)$ – функция, корни которой будут найдены, x – переменная, $[a, b]$ – диапазон, в котором будет производиться решение

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. MathSoft Mathcad 6.0 Plus: Руководство пользователя. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. М.: Филинь, 1997.
2. Капчинский И.М. Теория линейных резонансных ускорителей. М.: Энергоиздат, 1982.
3. Лебедев А.Н., Шальнов А.В. Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991.
4. Коломенский А.А. Физические основы ускорения заряженных частиц. М.: Изд-во МГУ, 1980.
5. Вальднер О.А., Власов А.Д., Шальнов А.В. Линейные ускорители. М.: Атомиздат, 1969.
6. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков, М.: Атомиздат, 1979.
7. Рашиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач. М.: Изд-во МИФИ, 1992.
8. Масунов Э.С. Эффекты нагрузки током в ускорителях заряженных частиц. М.: Изд-во МИФИ, 1999.
9. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Работа 1. Принцип автофазировки. Фазовое движение ионного пучка в линейном ускорителе на бегущей волне	4
Работа 2. Принцип автофазировки. Фазовое движение электронного пучка в линейном ускорителе на бегущей волне	14
Работа 3. Численное моделирование динамики электронного пучка в волноводном группирователе	23
Работа 4. Фокусировка пучков заряженных частиц. Движение пучка в системе тонких линз	33
Работа 5. Численное моделирование динамики пучков в ионных ускорителях. Ускорение ионов в ускорителях с пространственно - однородной квадрупольной фокусировкой	42
Приложение. Методические указания по пользованию математическим пакетом Mathcad	54
Список литературы.....	70