

**Расчёт балок с учётом физической нелинейности в полных функциях  
методом Ритца-Тимошенко**

Паницкова Галина Васильевна, кандидат технических наук,  
доцент кафедры «Промышленное и гражданское строительство»;

Зотов Лев Дмитриевич, студент специальности  
«Строительство уникальных зданий и сооружений»

Балаковский инженерно-технологический институт – филиал федерального  
государственного автономного образовательного учреждения высшего образования  
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Балаково

*В статье изложены основные принципы расчёта физически нелинейных балок в полных функциях методом Ритца-Тимошенко. Рассматривается аппроксимация экспериментальной диаграммы деформирования и её виды. Представлены полученные результаты аппроксимации диаграммы деформирования малоуглеродистой стали методом оцифровки.*

Необходимость в аппроксимации экспериментальных диаграмм деформирования конструкционных материалов возникла для более точных расчётов с учётом пластических деформаций. Такое требование сформулировано в строительных нормах и правилах (СНиП) [1, 2].

Оценка НДС-конструкций из линейно упругого или нелинейно деформируемого материала в условиях сложного напряжённого состояния является сложной задачей. Для упрощения её решения зависимость между интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  и интенсивностью деформаций  $\varepsilon_i$  в любой точке элемента конструкции можно принять аналогичной зависимости при простом одноосном растяжении (сжатии) этого же элемента. Полученные экспериментальные данные деформаций аппроксимируются различными математическими моделями, определяющими точность аппроксимации. Математические модели должны учитывать главные особенности исходных моделей конструктивных элементов [1, 2].

В настоящее время существуют следующие виды аппроксимаций [2]:

1. Степенная зависимость Бюльфингера:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^k, \quad (1)$$

где  $A$  – постоянная;  $k$  – показатель степени.

Аппроксимация используется для аналитического описания опытных зависимостей для многих материалов из-за простоты и соответствия данным этих материалов (рис. 1).

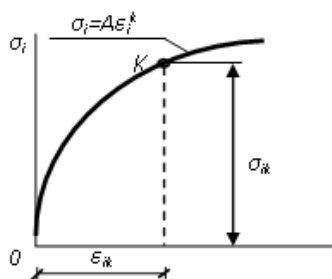


Рис. 1. Аппроксимация степенной зависимостью Бюльфингера

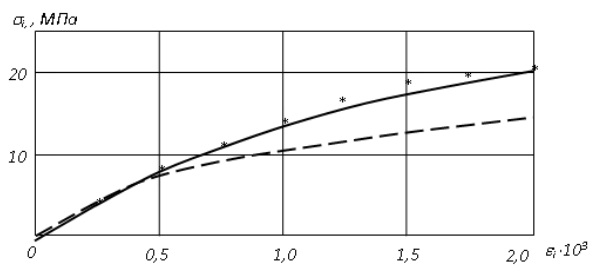


Рис. 2. Аппроксимация гиперболической зависимостью бетона (точки – экспериментальные значения, сплошная линия – аппроксимирующая зависимость)

2. Гиперболическая зависимость Тимошенко:

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon_i}{a + b\varepsilon_i}. \quad (2)$$

Аппроксимация даёт точное приближение с учётом ограниченного диапазона деформирования конкретного конструкционного материала (рис. 2).

3. Зависимость Соколовского:

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{1 + (\varepsilon_i/t)}}, \quad (3)$$

где  $t = E_0/\sigma_s$ ;  $E_0$  – начальный модуль упругости,  $\sigma_s$  – предельное значение напряжения, которое зависит от вида экспериментальной диаграммы деформирования.

4. Комбинированная степенная зависимость:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i + m\varepsilon_i^n \quad (4)$$

где  $E, m$  – экспериментальные значения;  $n$  – значение, получаемое подбором.

Зависимость находит широкое применение при расчёте нелинейно деформируемых конструкций.

5. Комбинация степенной и тригонометрической зависимости.

Зависимость даёт достаточно точно аппроксимировать экспериментальную кривую деформирования во всём диапазоне  $0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{i \max}$  (рис. 3).

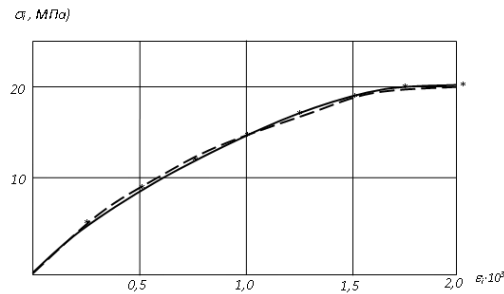


Рис. 3. Аппроксимация комбинацией степенной и тригонометрической зависимости

6. Аппроксимация кубическими сплайнами. Сплайн аппроксимирует экспериментальную диаграмму несколькими полиномами, соединяющими узлы или заданные точки. Полиномы подбираются таким образом, чтобы обеспечить гладкую стыковку полиномов в узлах.

Аппроксимация широко применяется при расчёте пластин и оболочек.

7. Оцифровка экспериментальной диаграммы деформирования. Экспериментальные диаграммы деформирования оцифровываются в виде численных массивов, обращение к которым позволит для заданной величины интенсивности деформаций получить значение секущего и касательного модулей.

Важное значение выбора аналитической зависимости, аппроксимирующей экспериментальную диаграмму деформирования, имеет при расчёте балок из нелинейно деформируемого материала. Расчёт таких балок методом Ритца-Тимошенко основан на использовании полной потенциальной энергии деформируемого тела:

$$\mathcal{E} = V - A, \quad (5)$$

где  $V$  – потенциальная энергия деформации;  $A$  – работа внешних сил.

Удельная потенциальная энергия деформации для несжимаемого тела:

$$dV = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i. \quad (6)$$

Учитывая данное выражение и работу внешних сил можно получить формулу для полной потенциальной энергии тела.

При аппроксимации  $\sigma_i = E\varepsilon_i + m\varepsilon_i^3$  ( $\varepsilon_i = -z^2\omega$ ):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}EI_y \int_0^l (w'')^2 dx - \frac{1}{4}mI_n \int_0^l (w'')^4 dx - \int_0^l q(x)w dx. \quad (7)$$

Прогиб балки при разложении в ряд:

$$w(x) = \sum_{n=1}^n K_n \varphi_n(x), \quad (8)$$

$K_n$  – обобщённые координаты;  $\varphi_n(x)$  – аппроксимирующие функции, которые должны удовлетворять геометрическим граничным условиям и быть линейно независимыми.

Идея метода Ритца-Тимошенко заключается в том, что первая вариация полной потенциальной энергии в состоянии устойчивого равновесия равна нулю:

$$\delta\mathcal{E} = 0 \rightarrow \delta\mathcal{E}(K_n) = 0. \quad (9)$$

Данный подход даёт возможность перейти к решению нелинейных алгебраических уравнений. Так, в первом приближении:

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta K} = 2f_1K - 4f_2K^3 - f_3 = 0. \quad (10)$$

Из выражения можно определить прогиб балки  $w$ , нормальное напряжение  $\sigma_i$ , значение секущего  $E_s = \sigma_i/\varepsilon_i$  и касательного  $E_k = d\sigma_i/d\varepsilon_i$  модулей для всех возможных состояний устойчивого равновесия.

Точность решения зависит от выбора аналитического выражения, аппроксимирующего экспериментальную диаграмму деформирования.

Точность аппроксимации экспериментальной диаграммы деформирования и сама аппроксимация рассматривалась практически оцифровкой данных. Рассматривалась диаграмма деформирования малоуглеродистой стали (рис. 4.) с содержанием углерода менее 1 % при плоском напряжённом состоянии с соотношением  $\sigma_1/\sigma_2 = 1,5$  при температуре окружающей среды  $-100\text{ }^\circ\text{C}$  [3].

По данной диаграмме составлялся массив координат её точек и с помощью программы Excel строился график (рис. 5). Полученный график аппроксимировался трендом в виде полиномиальной функции. При различных степенях полинома была получена достоверность аппроксимации в % (рис. 6 – 10): при 2-ой – 42,5 %; 3-ей – 67,9 %; 4-ой – 79,5 %; 5-ой – 87,5 %; 6-ой – 92,5 %. Полученные результаты свидетельствуют, что с увеличением степени полинома возрастала и достоверность аппроксимации.

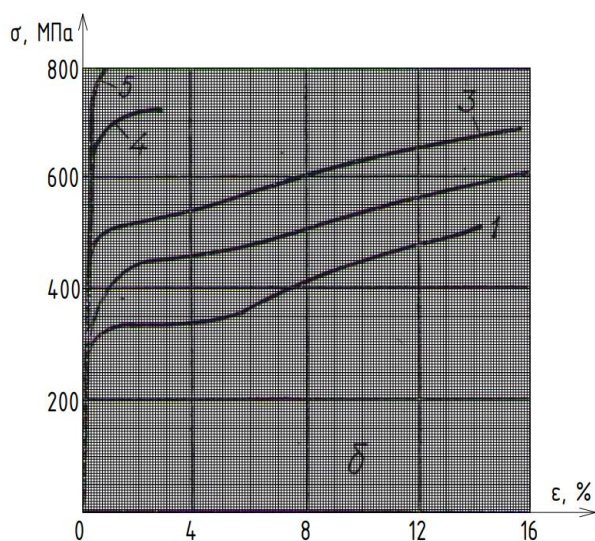


Рис. 4. Исходная диаграмма деформирования стали

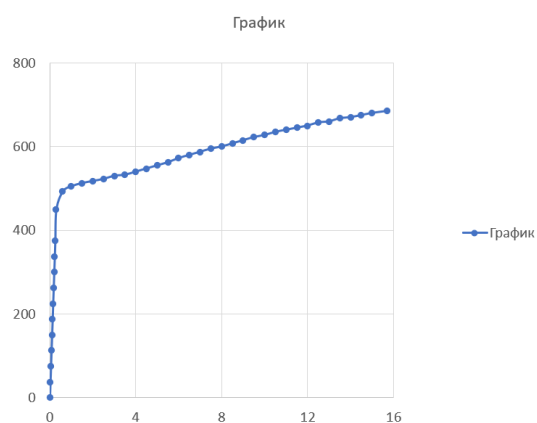


Рис. 5. Построенная диаграмма в Excel

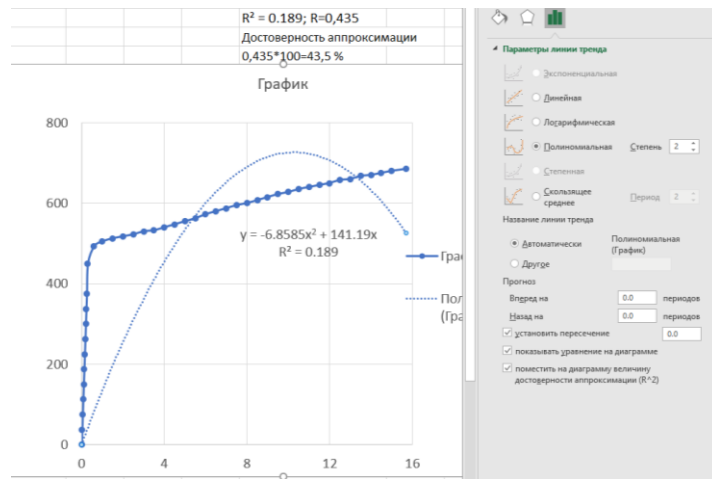


Рис. 6. Аппроксимация полиномиальной зависимостью второй степени

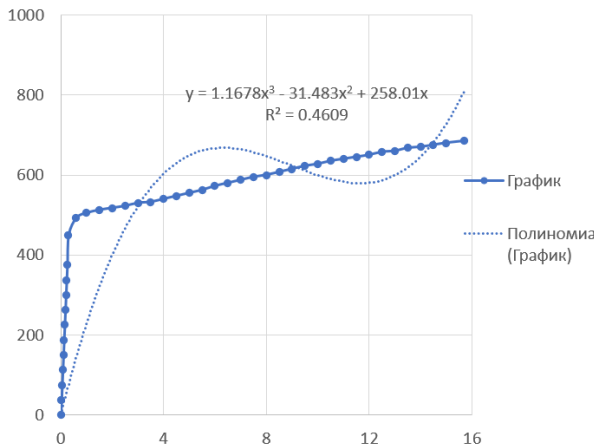
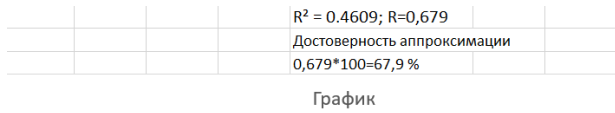


Рис. 7. Аппроксимация полиномиальной зависимостью третьей степени

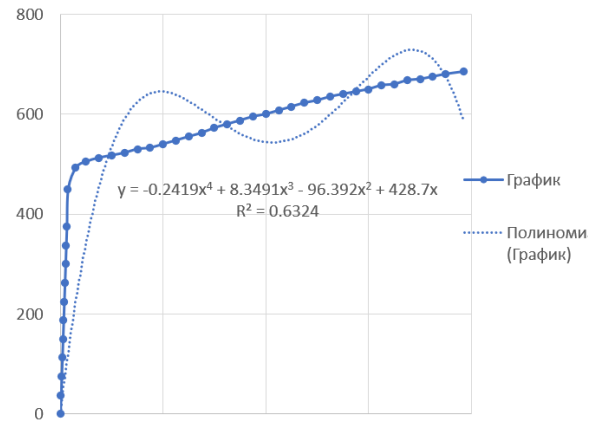
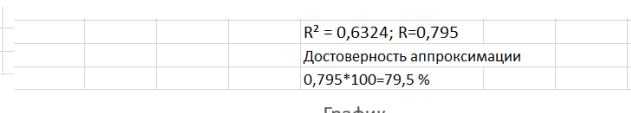


Рис. 8. Аппроксимация полиномиальной зависимостью четвертой степени

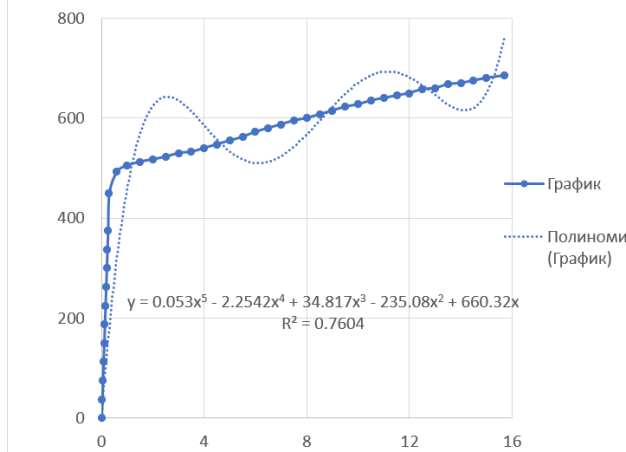
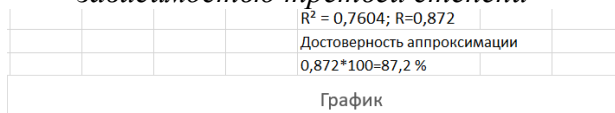


Рис. 9. Аппроксимация полиномиальной зависимостью пятой степени

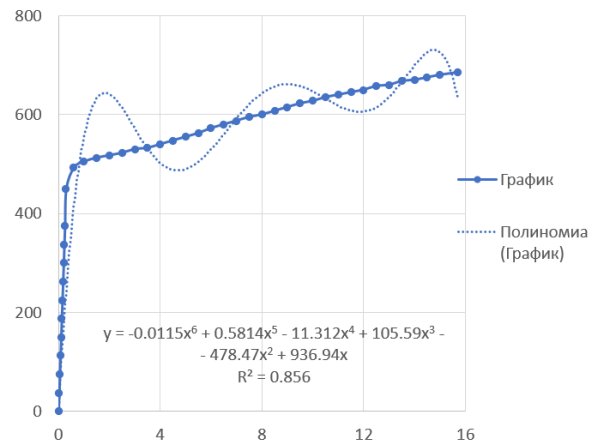
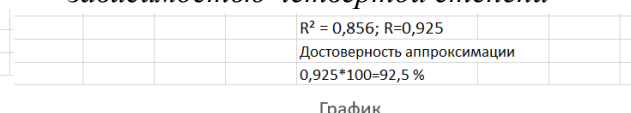


Рис. 10. Аппроксимация полиномиальной зависимостью шестой степени

Таким образом, учёт нелинейности даёт возможность производить более точные расчёты конструктивных элементов, и, как следствие, получить экономию материала. Точность расчётов определяется выбранной моделью аппроксимации, а также её видом математического представления.

#### Литература

1. Петров, В. В. Нелинейная строительная механика: учебное пособие / В. В. Петров. – Саратов: Саратовский гос. технический ун-т, 2015. – 160 с.: [сайт]. – URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01008239745> (дата обращения: 18.04.2021). – Текст: электронный.

2. Петров, В. В. Методы расчета балок, пластин и призматических оболочек из нелинейно-деформируемого материала: учебное пособие / В. В. Петров, И. В. Кривошеин, П. В. Селяев. – Саранск: Морд. гос. ун-т, 2009. – 164 с.: [сайт]. – URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/02000007126> (дата обращения: 18.04.2021). – Текст: электронный.

3. Механические свойства конструктивных материалов при сложном напряженном состоянии: справочник / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк, В. П. Ламашевский – Киев: Наук. думка, 1983. – 366 с.: [сайт]. – URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01001171265> (дата обращения: 18.04.2021). – Текст: электронный.

УДК 72

### **Архитектурно-художественное убранство в наследии усадебных ансамблей XIX века в Балаково**

Попова Надежда Александровна, доктор архитектуры, почётный архитектор России,  
почетный член РААСН, профессор кафедры  
«Промышленное и гражданское строительство»

Балаковский инженерно-технологический институт – филиал федерального  
государственного автономного образовательного учреждения высшего образования  
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Балаково

*Преемственное развитие ансамблей исторического города является одной из важнейших форм охраны ценного архитектурного наследия, поскольку любое здание, будь то памятник архитектуры или элемент исторической среды, фрагмент*