

539.1  
B85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической ядерной физике

5 сессия Конспект лекций на тему:

«НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ  
ЯДРА»

Часть II

В. В. ВАНАГАС

МЕТОДЫ ТЕОРИИ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП И ВЫДЕЛЕНИЕ  
КОЛЛЕКТИВНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ЯДРА

МОСКВА — 1974

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

539  
B85

Московский ордена Трудового Красного Знамени  
инженерно-физический институт

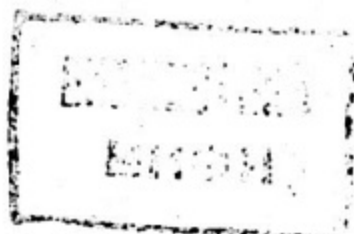
Всесоюзная школа по теоретической ядерной физике  
5 сессия Конспект лекций на тему:

"НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ  
ТЕОРИИ ЯДРА"

Часть 1

В.В. ВАНАГАС

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП И ВЫДЕЛЕ-  
НИЕ КОЛЛЕКТИВНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ  
ЯДРА



Москва - 1974 г.

587753

Методы теории представлений групп и выделение коллективных степеней свободы ядра.

В.В. Ванагас

### Аннотация

Сформулированы требования кинематической корректности волновых функций ядра, заданных в координатном представлении. Дано строгое определение микроскопических коллективных переменных ядра, описан их алгебраический смысл и роль фактор-пространства  $O_{n-1}/O_{n-4}$  ортогональных групп.  $O$  ( $n$  — число нуклонов ядра) при выделении коллективных и внутренних степеней свободы ядра. Изложен метод, основанный на теории индуцированных представлений групп Ли, позволяющий проецировать коллективную и внутреннюю часть произвольной волновой функции ядра. Найдено максимально возможное число коллективных переменных ядра, введение которых совместимо с требованиями кинематической корректности. Рассмотрены простейшие в кинематическом отношении внутренние волновые функции ядра и обсуждены получаемые с их помощью уравнения, являющиеся микроскопическим аналогом уравнений коллективной модели Бора-Моттельсона. Путем усреднения по микро-



скопическим аналогом переменных  $\beta$  и  $\gamma$  - колебаний ядра осуществлен переход к уравнениям метода К-гармоник. Приведены кинематически простейшие коллективные функции ядра, выяснен смысл наименьших подпространств, многочастичного пространства Гильберта, удовлетворяющих всем требованиям кинематической корректности (модельные функции унитарной и ортогональной схем) и доказана несовместимость оболочечной модели ядра с требованиями кинематической корректности.



Приступая к подготовке этих лекций, автор ставил своей целью в доступной форме изложить основные результаты работ [1-3], в которых был введен микроскопический аналог коллективных переменных модели Бора-Моттельсона, что позволило в координатном представлении корректно сформулировать задачу о выделении коллективных степеней свободы ядра, а также часть результатов работ [4-6], в которых предложена и детализирована теория микроскопического аналога коллективной модели Бора-Моттельсона и разработана ее расчетная техника. Последние работы по существу опираются на теорию индуцированных представлений групп Ли, поэтому при изложении основного материала в той или иной форме приходится коснуться ряда вопросов теории индуцированных представлений. Именно только коснуться, так как из-за ограниченного объема этих лекций невозможно более подробное изложение этого, до сих пор большинством физиков - теоретиков неусвоенного раздела теории групп.

В ходе работы над этими лекциями автору стало ясно, что результаты вышеупомянутых работ носят более общий характер и позволяют сформулировать кинематику микроскопической теории ядра в виде трех простых требований, два из которых очевидным образом вытекают из свойств гамильтониана ядра. В соответствии с этим построен и план

этих лекций. Изложение физической стороны предмета начинается с наиболее общих формулировок и кончается постепенной их детализацией. Путь изложения алгебраического материала противоположен, — общие положения сначала объясняются на простых примерах. Поэтому, думается, чтение этого конспекта лекций не будет затруднительным и для тех читателей, знакомство которых с основами теории групп ограничивается группой вращения и симметрической группой.

Часть материала излагается в этих лекциях впервые. В основном — это результаты, приведенные в первом разделе, в п. 4 четвертого раздела и в заключении. Список литературы не претендует на полноту. В него включены лишь основополагающие работы или работы, на которые читатель отсылается для более подробного изучения излагаемых или лишь бегло затронутых в тексте лекции вопросов.

1. Определение кинематически корректных волновых функций ядра и критический взгляд на крайние ядерные модели

1. Изучению коллективных степеней свободы ядра посвящено большое количество работ, разнообразных как по своему идейному содержанию, так и по используемому в них математическому аппарату. В этот весьма запутанный вопрос можно попытаться внести некоторую ясность, если про-

классифицировать эти работы по используемой в них математической технике и с самого начала отделить работы, основанные на методе вторичного квантования, от работ, в которых рассматриваются волновые функции, заданные в координатном представлении. Так как речь идет о задачах, решаемых в рамках нерелятивистской квантовой механики, эти два способа описания в принципе должны быть эквивалентны, хотя, как правило, весьма трудно или по ряду причин порою даже практически невозможно проследить взаимосвязь работ этих двух направлений. Это обстоятельство и оправдывает такое их разделение, касающееся скорее сложной технической, чем принципиальной стороны вопросов выделения коллективных степеней свободы ядра.

Эти замечания здесь приведены с целью подчеркнуть то обстоятельство, что нами будет рассматриваться лишь второй способ описания, т.е. будем исследовать волновые функции ядра, заданные в координатном представлении. Сказанное служит, грубо говоря, на половину круг наших интересов. Тем не менее, количество и разнообразие работ второго направления еще остается столь большим, что здесь практически невозможно дать сколько-нибудь удовлетворительный их обзор. В этом, однако нет и настоятельной необходимости, так как предмет наших лекций требует посмотреть на проблему выделения коллективных и внутренних степеней свободы



ядра только с определенной точки зрения,, которую можно сформулировать исходя из простых и естественных условий, налагаемых на произвольную волновую функцию ядра.

## 2. Приступим к формулировке этих условий.

1. Микроскопичность. Если допустить, что наблюдаемые свойства атомных ядер можно описать волновой функцией, являющейся решением уравнения Шредингера, то эта функция должна быть микроскопической. Под этим здесь понимается то простое обстоятельство, что волновая функция должна зависеть от всех переменных ядра. Набор этих переменных составляют  $3n$  пространственные координаты, скажем  $3n$  компоненты векторов  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$  (где  $n$  — число нуклонов ядра) заданные в лабораторной системе координат и, кроме того, либо спиновые переменные всех протонов и всех нейтронов, если эти частицы считаются различными (в этом случае мы будем говорить о протонно-нейтронном ядре), либо спин-изоспиновые переменные всех нуклонов, если предполагается, что протоны и нейтроны являются двумя состояниями частиц одного сорта — нуклонов (тогда будем говорить о нуклонном ядре).

Здесь еще необходимо особо подчеркнуть, что мы требуем, чтобы число пространственных переменных микроскопической волновой функции ядра в точности равнялось  $3n$ ,

так как в случае меньшего числа переменных функция уже не будет полностью микроскопической, а в случае большего числа переменных она будет перегружена лишними переменными.

1. Трансляционная инвариантность. Это условие требует, чтобы волновая функция свободного от внешних воздействий атомного ядра выражалась в виде произведения плоской волны, описывающей движение центра масс ядра, и трансляционно-инвариантной функции, описывающей внутренние свойства свободного ядра.

Волновая функция может быть микроскопической, но не трансляционно-инвариантной, или, наоборот, трансляционно-инвариантной, но не микроскопической. Разумеется, эти два условия можно объединить и говорить об микроскопической трансляционной-инвариантной волновой функции свободного ядра.

1. Микроскопическая трансляционная инвариантность,

Обеспечить ее можно, выбрав набор  $3n$  пространственных переменных ядра таким образом, чтобы выделить в этом наборе 3 переменные, скажем, вектор  $\vec{r}_0$  задающий положение центра масс ядра по отношению к лабораторной системе координат: и  $3(n-1)$  переменных, скажем, вектора  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) задающих остальные трансляционно-инвариантные пространственные переменные ядра.

Если к этим переменным еще добавить спиновые или спино-изоспиновые переменные, то волновая функция в этих переменных автоматически удовлетворяет условиям микро-скопичности и трансляционной инвариантности. В случае свободного ядра она факторизуется на произведение

$\Psi'(\vec{p}_0) \Psi(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-1})$ , где  $\Psi'$  — плоская волна, описывающая движение центра масс, а  $\Psi$  — любая трансляционно-инвариантная волновая функция, в частности функция, являющаяся решением уравнения Шредингера для трансляционно-инвариантного гамильтониана, произвольным образом зависящего от пространственных, спиновых или спино-изоспиновых переменных ядер.

II. Точные интегралы движения. Известно, что гамильтониан ядра с высокой степенью точности сохраняет общий момент ядра  $J$ , его проекцию  $M_J$ , пространственную четность, сорт и число частиц  $i$ , наконец, перестановочную (по всем переменным) симметрию волновой функции ядра. Поэтому потребуем, чтобы волновая функция ядра характеризовалась этими пятью интегралами движения. При этом последнее требование здесь выступает в двух вариантах — либо антисимметричность в отдельности по переменным протонов и нейтронов (для протонно-нейтронных ядер), либо антисимметричность по переменным всех нуклонов (для нуклонных ядер). Обратим еще внимание на то обстоятельство,



что в список интегралов движения включено как будто само собой разумеющееся требование сохранения сорта и числа частиц. Этот интеграл движения нам сослужит добрую службу, когда в дальнейшем придадим ему строгий математический смысл.

Теперь пора обсудить смысл сформулированных выше требований, на которые, ради краткости, иногда будем ссылаться как на условия  $I'$ ,  $I''$  (или  $I$ ) и  $II$ . Очевидно, что эти условия являются необходимыми, в том смысле, что истинная волновая функция ядра заведомо должна им подчиняться. Они, однако, недостаточны в том смысле, что далеко не все им подчиняющиеся функции являются истинными волновыми функциями ядра. Если нам удастся сконструировать какие-нибудь функции, удовлетворяющие условиям  $I$  и  $II$ , то они наверняка не будут удовлетворять точного уравнения Шредингера для ядра. Тем не менее в них будет отражена доля истины, т.е. учтены некоторые свойства этого уравнения, а именно кинематические свойства гамильтониана ядра. Чтобы подчеркнуть это, любые функции, удовлетворяющие условиям  $I$  и  $II$ , (но не обязательно являющиеся решением точного уравнения Шредингера), назовем кинематически корректными функциями. Заметим еще, что понятие "кинематические свойства" нами используется в обобщенном смысле, так как в него вкладывается не только обычно под-

разумеваемое требование 11, связанное с обеспечением интегралов движения, но и требование 1 микроскопической трансляционной инвариантности.

3. Теперь возвратимся к вопросам,, затронутым в п. 1. настоящего раздела и проверим кинематическую корректность модельных волновых функций ядра, заданных в координатном представлении. Чтобы не вдаваться в подробное перечисление всех модификаций различных моделей и выяснить лишь сущность дела, здесь остановимся лишь на два крайних взгляда на структуру ядра, один из которых опирается на концепцию независимых частиц, а второй рассматривает атомные ядра как самодеформирующие системы, в которых сложные движения нуклонов описываются несколькими коллективными переменными.

Первое из этих направлений реализуется в различных вариантах оболочечной модели; волновая функция которых задается с помощью конфигураций, составленных из линейных комбинаций произведения однонуклонных волновых функций, зависящих от однонуклонных переменных  $\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n$ . Использование этого набора переменных уже может обеспечить условие 1'. Для функций оболочечного типа сравнительно легко обеспечить и требование 11, так что остается лишь проблема трансляционной инвариантности. Из-за нее возникают большие неприятности: одночастичные перемен-

ные не являются трансляционно-инвариантными, в них содержатся три переменные, описывающие движение центра масс ядра отнюдь не в виде плоской волны, поэтому в общем случае условие 1'' резко противоречит оболочным представлениям. Поэтому, строго говоря, оболочечной картине можно верить лишь ценой отказа от заведомо правильного требования 1'' . Физическая причина этого кроется в том очевидном обстоятельстве, что единственный выделенной точкой пространства является центр масс свободного ядра, поэтому нельзя строить корректные функции, заданные в произвольной лабораторной системе координат. Это можно еще и так сказать: общая яма для движения нуклонов, описываемых одночастичными переменными, имеет смысл ямы, созданной внешними причинами, которые, однако, немислимы в случае свободного ядра.

Здесь необходимо сразу подчеркнуть, что трудности, возникающие из-за условия 1'' при построении функций оболочечного типа в первую очередь касается принципиальной стороны вопроса, так как в конкретных расчетах функцию, описывающую движение центра масс ядра, часто удается точно или приближенно зафиксировать в одном определенном состоянии и тем самым избежать появления ложных, нефизических уровней ядра. Этим, однако, не устраняются вышеприведенные возражения, потому что свободное движение центра



масс ядра заменяется связанным состоянием, что, повторяем, возможно лишь при наличии физических внешних полей.

В крайне коллективных моделях предполагается, что из-за каких-то до конца непонятных причин "заморожено" подавляющее число переменных ядра, а за различные свойства низколежащих уровней, по крайней мере для избранных ядер, ответственно лишь небольшое число степеней свободы ядра. Как прямое следствие таких предположений при построении модельной волновой функции ядра используются лишь несколько коллективных переменных, вводимых интуитивно из полуклассических соображений. В них потерял смысл одночастичных переменных и, следовательно, не может быть и речи о выполнении условия  $1'$  и проверки условия  $1''$ . Коллективные переменные не содержат "механизма" для перестановки нуклонов и, следовательно, отсутствует возможность обеспечить принцип Паули, так что в лучшем случае и условие  $11$  может быть обеспечено лишь частично. Поэтому коллективные модели во всех их модификациях в значительной степени в кинематическом смысле менее корректны, чем модели оболочечного типа, что и является одной из причин многих часто весьма критических высказываний в их адрес. Несмотря на это, для определенных областей массовых чисел опытные данные часто свидетельствуют в их пользу и тем самым подтверждают мнение, что в коллективных

моделях удачно угадан ряд характерных свойств атомных ядер. Этим можно объяснить те многочисленные усилия, которые в течение последнего десятилетия были затрачены на их обоснование.

4. Мы обсудили два крайних взгляда на структуру ядра. Основные их предпосылки настолько противоположны, что, кажется, исключают друг друга. В такой же мере противоречивы и экспериментальные данные, говорящие в пользу то одного, то другого подхода. Это тем более странно, что такая ситуация встречается даже в близких по числу нуклонов ядрах, скажем ядра  $O^{17}$ , имеющего ярко выраженный одночастичный спектр и ядер  $Ne^{20}$  и  $Mg^{24}$ , в спектре которых наблюдается серии уровней ротационного типа. Трудно поверить, что добавление нескольких нуклонов так перестраивает структуру этих ядер, что для ее понимания требуется совершенно противоположная физическая картина.

Чтобы найти выход из этого тупика остается допустить, что эти противоречия не являются столь глубокими, как это кажется на первый взгляд. Может быть, одночастичный подход кроет в себе задатки коллективного движения и, наоборот, коллективные модели допускают "микроскопизацию", содержащую в себе скрытые одночастичные черты? Возможно, существует единый подход, объединяющий одночастичные и коллективные аспекты, которые в спектрах избранных

ядер проявляют себя в чистом виде лишь благодаря удачному стечению ряда специфических обстоятельств. Можно ли, стартуя с одночастичных переменных понять картину возникновения коллективных степеней свободы ядра?

В связи с последним вопросом стоит коротко остановиться на одном направлении работ, в которых делается попытка дать микроскопическое обоснование коллективных движений в ядрах с помощью искусственного приема, заключающегося в конструировании волновых функций, зависящих как от всех микроскопических одночастичных переменных  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$  так и от определенного числа коллективных переменных, скажем, переменных  $\xi_1, \dots, \xi_K$ . Исходным "материалом" для построения функций такого рода обычно служат функции оболочечного типа, в которые с помощью определенной процедуры (чаще всего с помощью некоторых операторов, зависящих от переменных  $\xi_1, \dots, \xi_K$ ) "инжектируются" коллективные переменные. Даже не вникая в детали такого приема легко понять, что уже сама постановка вопроса свидетельствует о его поверхностности; в нем отсутствует "механизм" образования коллективных степеней свободы из одночастичных переменных; оба вида переменных существуют как бы независимо друг от друга, вследствие чего с самого начала возникает проблема исключения лишних переменных. Поэтому неудиви-

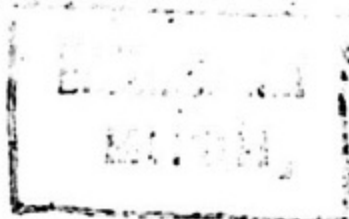


тельно, что успехи, достигнутые в этом направлении, не пропорциональны затраченным усилиям. Если посмотреть на эту задачу с нашей точки зрения, то, очевидно, что такие функции в кинематическом смысле некорректны, по крайней мере, по двум причинам: из-за отсутствия трансляционной инвариантности и из-за лишних переменных, наличие которых, как нами было специально подчеркнуто при формулировке условия 1', дает "перегруженную" микроскопичность.

Для решения вышепоставленной задачи примирения двух крайних взглядов на структуру ядра необходимо искать другие пути. При этом полезно для начала попытаться дать ответы на ряд конкретных вопросов. Вот некоторые из них. Как квантомеханически строго определить коллективные переменные? Сколько существуют коллективных и какой смысл остальных переменных ядра? Можно ли ввести микроскопический аналог переменных описывающих поверхностные колебания квадрупольного, октупольного и т.д. типа, если да, — обрывается ли этот ряд на некоторой мультипольности или его можно продолжать сколько угодно?

Можно ли найти функциональную связь между коллективными и одночастичными переменными?

Проверка крайних моделей дала неутешительные результаты — они оказались некорректными в кинематическом отношении. В связи с этим возникают и такие вопросы: как



строить кинематически корректные модели ядра, какие из них самые простые и в каком направлении они обобщают только что обсужденные некорректные модели ядра? Существуют ли модели, объединяющие одночастичные, коллективные и промежуточные между ними аспекты движения нуклонов в ядре?

Одна из целей настоящих лекций — дать ответы на эти вопросы.

## 2. Общая постановка задачи замены переменных и алгебраический смысл простейших примеров

1. При реализации намеченной в предыдущем разделе программы всегда будем обеспечивать требования кинематической корректности. Поэтому в первую очередь позаботимся о выборе таких переменных, которые автоматически удовлетворяют микроскопическую трансляционную инвариантность. Набор таких переменных хорошо известен — это нормированные координаты Якоби, связанные с одночастичными векторами  $\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n$  с помощью следующих соотношений

$$\vec{\rho}_i = \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} \left( \sum_t \vec{\tau}_t - i \vec{\tau}_{i+1} \right), \quad (2.1)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Заменяя в правой стороне (2.1) все  $\vec{\tau}_i$  векторами  $\vec{\tau}_i + \vec{\tau}_0$ , где  $\vec{\tau}_0$  — произвольный сдвиг, легко убедиться в трансляционную инвариантность векторов  $\vec{\rho}_i$ . Если набор спиновых или спиноизоспиновых переменных обозначить через  $Q$ , то наша задача теперь состоит в изучении класса волновых функций

$$\Psi(\Gamma | \vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_{n-1}; Q) \quad (2.2)$$

которые заведомо удовлетворяют условию 1. В (2.2)  $\Gamma$  — произвольный, но обязательно полный набор квантовых чисел

ядра, причем полнота здесь должна обеспечить разложение  $T\Psi(\Gamma)$  через исходный набор функций  $\Psi$ , где  $T$  — некие "хорошие" операторы. В дальнейшем будет дано подробное описание операторов  $T$ , из которого будет видно, что они действительно являются "хорошими" операторами.

До тех пор пока квантовые числа  $\Gamma$  неопределенные — и набор функций (2.2) в высшей степени произволен. С первого взгляда кажется, что для таких функций невозможно дать каких-либо конструктивных утверждений, позволяющих выделить их зависимость от коллективных переменных ядра. В действительности это не так: существует математический аппарат, с помощью которого удастся сформулировать работоспособный метод выделения коллективной функции ядра без каких-либо существенных дополнительных предположений о виде функции (2.2).

2. В конце предыдущего раздела были приведены критические замечания по поводу работ, в которых в качестве лишних переменных вводятся коллективные степени свободы ядра; их ограниченный успех обусловлен некорректной с самого начала постановкой задачи. При правильном подходе вместо "арифметического" сложения одночастичных и коллективных степеней свободы ядра необходимо осуществить обычную замену пространственных переменных, то есть взять  $3(n-1)$  функции  $\int_{i_1}^S$  и положить, что



$$\rho_i^S = f_i^S (\xi_1, \dots, \xi_K; q_{K+1}, \dots, q_{3(n-1)}), \quad (2.3)$$

где  $\rho_i^S$  — три декартовы компоненты вектора  $\vec{\rho}_i (s=x, y, z; i=1, \dots, n-1)$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_K$  —  $K$  коллективных, а  $q_{K+1}, \dots, q_{3(n-1)}$  —  $3(n-1) - K$  остальных переменных ядра. Когда будет удобно, наборы  $\xi_1, \dots, \xi_K$  и  $q_1, \dots, q_{3(n-1)}$  обозначим буквами  $\xi$  и  $q$  и будем их называть соответственно коллективными и внутренними переменными ядра. Первоочередная наша задача — разумным способом определить функции (2.3).

3. Идею замены переменных можно объяснить, если попытаться понять алгебраическую сущность всем привычной замены переменных, скажем, перехода от декартовых к полярной или сферической системе координат. Возьмем, например, замену переменных

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\rho \sin \vartheta_{12}^{(2)} \\ x_2 &= \rho \cos \vartheta_{12}^{(2)} \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

где  $0 \leq \vartheta_{12}^{(2)} < 2\pi$ . Придадим формуле (2.4) смысл, ведущий к далеко идущим обобщениям. С этой целью введем оператор вращения  $T_{12}^{(2)}$  двумерного пространства и реализуем его в следующем матричном виде:

$$G_2^+ \equiv T_{12}^{(2)} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta_{12}^{(2)} & \sin \vartheta_{12}^{(2)} \\ -\sin \vartheta_{12}^{(2)} & \cos \vartheta_{12}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

Если матричные элементы матрицы (2.5) обозначить через  $D_{ij}^{(12)}$ , то формулу (2.4) можно представить таким образом:

$$X_i = \rho D_{2i}^{(12)} (\vartheta_{12}^{(2)}) \quad (2.6)$$

Последнее выражение показывает, что столь обычные формулы замены переменных алгебраичны по своей структуре.

Действительно, матрицы (2.5) задают ортогональную группу  $O_2^+$  собственных вращений (т.е. вращений без отражения), а при замене переменных (2.4) в качестве функций  $f$  берутся матричные элементы последней строки матрицы  $D^{(12)}$ ; разумеется что знак минус в формуле (2.4) — это несущественная техническая деталь, зависящая от выбора фазы недиагональных элементов матрицы (2.5).

Прежде чем приступить к обсуждению выводов, вытекающих из нового способа записи формул перехода к полярной системе координат, рассмотрим еще один пример, в котором появятся некие новые черты, отсутствующие в только что приведенном примере из-за его тривиальности. Посмотрим этим новым алгебраическим взглядом на формулы перехода к сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \rho \sin \vartheta_{23}^{(3)} \sin \vartheta_{12}^{(3)} \\ X_2 &= -\rho \sin \vartheta_{23}^{(3)} \cos \vartheta_{12}^{(3)} \\ X_3 &= \rho \cos \vartheta_{23}^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где  $0 \leq \psi_{23}^{(3)} < \pi$ ,  $0 \leq \psi_{12}^{(3)} < 2\pi$ , а знак минус введен лишь для того, чтобы согласовать эту замену с общими формулами, которые будут приведены в дальнейшем. Чтобы записать (2.7) в виде, аналогичном (2.6), возьмем произведение трех операторов вращения трехмерного пространства  $T_{12}^{(2)} T_{23}^{(3)} T_{12}^{(3)}$ , реализуем их через матрицы и перемножим между собою. Имеем:

$$G_3^+ \equiv T_{12}^{(2)} T_{23}^{(3)} T_{12}^{(3)} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline C_2^{(2)} & S_2^{(2)} & 0 \\ \hline -S_2^{(2)} & C_2^{(2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & C_3^{(3)} & S_3^{(3)} \\ \hline 0 & -S_3^{(3)} & C_3^{(3)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline C_2^{(3)} & S_2^{(3)} & 0 \\ \hline -S_2^{(3)} & C_2^{(3)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline C_2^{(2)} C_2^{(3)} - S_2^{(2)} C_3^{(3)} S_2^{(3)} & C_2^{(2)} S_2^{(3)} + S_2^{(2)} C_3^{(3)} C_2^{(3)} & S_2^{(2)} S_3^{(3)} \\ \hline -S_2^{(2)} C_2^{(3)} - C_2^{(2)} C_3^{(3)} S_2^{(3)} & -S_2^{(2)} S_2^{(3)} + C_2^{(2)} C_3^{(3)} C_2^{(3)} & C_2^{(2)} S_3^{(3)} \\ \hline S_3^{(3)} S_2^{(3)} & -S_3^{(3)} C_2^{(3)} & C_3^{(3)} \\ \hline \end{array}$$

(2.8)

Здесь введены сокращенные обозначения  $C_2^{(2)} = \cos \psi_{12}^{(2)}$ ,  $S_3^{(3)} = \sin \psi_{23}^{(3)}$  и т.п. Если матричные элементы матрицы (2.8) обозначим через  $D_{ij}^{(13)}(\psi_{12}^{(2)}, \psi_{23}^{(3)}, \psi_{12}^{(3)})$  то легко увидеть, что вместо (2.7) можно писать

$$\chi_i = \rho D_{3i}^{(13)} \left( \psi_{23}^{(3)} \psi_{12}^{(3)} \right). \quad (2.9)$$

Внимательно посмотрим, что объединяет формулы (2.6) и (2.9) и чем они различаются?

В обоих случаях замена переменных осуществляется с помощью функций, которые находятся в определенной строке матрицы представления ортогональной группы  $O_\tau$  с  $\tau = 2, 3$ . В (2.6) и (2.9) была использована последняя строка этой матрицы, но если для  $\tau = 2$  номер строки по существу не важен, то этого нельзя утвердить при  $\tau = 3$ ; матричные элементы в первых двух строках матрицы (2.8) зависят от трех переменных, поэтому мы по необходимости вынуждены пользоваться ее третьей строкой. В чем сущность этой необходимости? Обратим внимание, что в (2.9) входят лишь параметры  $\psi_{23}^{(3)} \psi_{12}^{(3)}$ , от которых зависят операторы  $T$  с верхним индексом 3, т.е. параметры двух новых операторов, которые пришлось ввести при переходе от вращения двумерного пространства к вращению трехмерного пространства. Иными словами, при замене переменных достаточно пользоваться лишь параметрами тех вращений  $T$ , которые появляются при переходе от группы  $O_{\tau-1}^+$  к группе  $O_\tau^+$ , где, пока,  $\tau = 2, 3$ . Это утверждение было только что проверено для  $\tau = 3$ ; при  $\tau = 2$  оно тоже верно из-за тривиальности группы  $O_1^+$ , — формаль-

но можно считать, что эта группа состоит лишь из одного единичного элемента, т.е. попросту говоря, ее нет вообще.

Чем различаются выражения (2.6) и (2.9)? Имеется еще одно принципиальное, но нехарактерное для дальнейшего их отличие, заключающееся в том, что матрица (2.5) по отношению к "своей" группе  $O_2^+$  приводима, тогда как матрица (2.8), по отношению к "своей" группе  $O_3^+$  является неприводимой. Это обстоятельство, обусловленное коммутативностью группы  $O_2^+$ , является случайным, так как как из всех ортогональных матриц, задающих группы  $O_\nu^+$ , приводима лишь матрица для  $\nu = 2$ . Поэтому можно либо специально оговорить случай  $\nu = 2$ , и больше не заботиться об этом, либо так расширить группу  $O_2^+$ , чтобы по отношению к новой группе матрицы (2.5) стали неприводимыми.

4. Существует веская причина, требующая расширения ортогональной группы  $O_\nu^+$ . Она связана с принципом Паули. Допустим на минуту, что  $X_1$  и  $X_2$  - это переменные частиц, подчиняющихся определенной статистике. При обеспечении перестановочных свойств функций, зависящих от этих переменных, надо воспользоваться оператором перестановки  $P_{12}$ . Матричная реализация такого оператора, очевидно, имеет следующий вид:

$$P_{12} |X_1 X_2\rangle = |X_2 X_1\rangle = |X_1 X_2\rangle \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (2.10)$$



Подвергнем переменные  $X_1 X_2$  также и преобразованию  $T_{12}^{(2)}$  и, как и  $P_{12}$ , запишем его в удобной матричной форме:

$$T_{12}^{(2)}(\vartheta_{12}^{(2)}) |X_1 X_2| = |X_1 X_2|$$

$\cos \vartheta_{12}^{(2)}$	$\sin \vartheta_{12}^{(2)}$
$-\sin \vartheta_{12}^{(2)}$	$\cos \vartheta_{12}^{(2)}$

(2.11)

Теперь видно, что оператор  $P_{12}$  не является частным случаем оператора  $T^{(2)}$ , так как определители матриц преобразований в (2.10) и (2.11) различаются знаком. Перестановки являются внешними операциями по отношению к операциям собственных вращений, и действие операторов перестановки выходит за рамки алгебраического аппарата ортогональных групп  $O_n^+$ . Поэтому желательно расширить группу ортогональных преобразований, включая в нее не только операторы собственных вращений, но и операторы перестановки. Это расширение можно осуществить, воспользовавшись лишь одной численной ортогональной матрицей с определителем, равным  $-1$ , так как произведение этого "представителя" и матриц собственных вращений, из-за групповых свойств последних, исчерпывает и все вещественные ортогональные матрицы несобственных вращений. В качестве такого "представителя" возьмем диагональную матрицу

$$S_K = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & & \text{---} & \text{---} \\ & & & & \text{---} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (2.12)$$

отличающуюся от единичной матрицы  $e_K$  лишь знаком  $K$  - того элемента главной диагонали. Введем теперь

группу отражений  $G_2$ , состоящую из двух элементов

$$G_2 \equiv \{e_2, S_2\}, \quad (2.13)$$

реализуемых в виде матриц  $2$  - того порядка и умножим, скажем, слева, эти элементы на элементы группы собственных вращений. При  $2 = 2$  это задает элементы

$G_2$  ортогональной группы  $O_2$

$$G_2 \equiv \{G_2^+ e_2, G_2^+ S_2\} \equiv \{T_{12}^{(2)} e_2, T_{12}^{(2)} S_2\}, \quad (2.14)$$

или в матричном виде

$$G_2 \equiv \left\{ \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} \cos \psi_{12}^{(2)} & \sin \psi_{12}^{(2)} \\ -\sin \psi_{12}^{(2)} & \cos \psi_{12}^{(2)} \end{matrix}} , \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} \cos \psi_{12}^{(2)} & -\sin \psi_{12}^{(2)} \\ -\sin \psi_{12}^{(2)} & -\cos \psi_{12}^{(2)} \end{matrix}} \end{matrix} \right\} \quad (2.15)$$

Теперь уже видно, что

$$P_{12} = T_{12}^{(2)} \left( \psi_{12}^{(2)} = \frac{3}{2}\pi \right) G_2, \quad (2.16)$$

так что оператор перестановки является "внутренним" оператором полной ортогональной группы  $O_2$ . В случае  $\mathcal{Z}=3$  имеем:

$$G_3 \equiv \left\{ G_3^+ e_3, G_3^+ S_3 \right\} \equiv \left\{ T_{12}^{(2)} T_{23}^{(3)} T_{12}^{(3)} e_3, T_{12}^{(2)} T_{23}^{(3)} T_{12}^{(3)} S_3 \right\} \quad (2.17)$$

Обратим внимание на одно техническое и одно принципиальное обстоятельства, связанные с расширением группы  $O_{\mathcal{Z}}^+$  до группы  $O_{\mathcal{Z}}$ . Как видно из (2.17), при таком расширении нет необходимости умножать каждый оператор вращения на оператор (2.12), а достаточно умножить лишь произведение всех операторов  $T$  на  $b_{\mathcal{Z}}$ . При этом появляется нечто новое в топологическом отношении: если элементы групп  $O_2^+$  или  $O_3^+$  (в общем случае -  $O_{\mathcal{Z}}^+$ ) образовали непрерывное компактное множество, задаваемое параметрами  $\mathcal{U}_{12}^{(2)}$  или  $\mathcal{U}_{12}^{(2)} \mathcal{U}_{23}^{(3)} \mathcal{U}_{12}^{(3)}$  (в общем случае - всеми вещественными параметрами группы  $O_{\mathcal{Z}}^+$ ), то элементы групп  $O_2$  или  $O_3$  (в общем случае -  $O_{\mathcal{Z}}$ ) задаются уже двумя отдельными компактными множествами, между которыми нет непрерывной связи. В таких случаях говорят, что группа не является односвязанной и определена на нескольких (в нашем случае - двух) не связанных между собою листах. Алгебраическая связь между ними "поддерживается" с помощью дискретных операторов отражения. В практических применениях операторы отражения вы-

ступают в качестве равноценных партнеров наряду с инфинитезимальными операторами, которые отвечают за все алгебраические свойства лишь на одном избранном листе, содержащем единичный элемент группы (подробности см. в [5]).

5. Мы только что воспользовались термином "компактное множество", и теперь пора, хотя бы бегло, остановиться на этом исключительно важном понятии. Если не гнаться за строгостью определения, то "компактность группы" следует понимать как ограниченность той области, в которой принимает значения параметры, задающие элементы группы. Например, параметр  $\vartheta_{12}^{(2)}$  группы  $O_2^+$  принимает значения на конечном отрезке прямой  $0 \leq \vartheta_{12}^{(2)} < 2\pi$ , элементы группы  $O_3^+$  задаются параметрами, заполняющими в трехмерном пространстве прямоугольный параллелепипед, имеющий конечный объем. Образно говоря, все параметры компактного множества локализованы в некотором объеме пространства параметров, причем эта область ни в одном направлении не уходит в бесконечность. Как уже только что говорилось, эта область может быть или не быть односвязной.

В качестве простого примера некомпактной группы приведем группу движения плоскости, задаваемую преобразованием

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \vartheta + x_2 \sin \vartheta + a_1 \\ x'_2 &= -x_1 \sin \vartheta + x_2 \cos \vartheta + a_2 \end{aligned} \right\}, \quad (2.18)$$

где как и раньше,  $0 \leq \psi < 2\pi$ , а оба параметра сдвига  $a_1$  и  $a_2$  принимают значения в интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Очевидно, что параметры  $a_1, a_2$  и  $\psi$ , задающие группу, не локализованы, объем области их изменения бесконечен, и поэтому группа движения плоскости некомпактна. Можно уменьшить число нелокализованных параметров, если положить, что  $a_1 = -\rho \sin \psi_0$  и  $a_2 = \rho \cos \psi_0$ , где  $0 \leq \psi_0 < 2\pi$ . Тогда остается лишь один "некомпактный" параметр  $\rho$ , но зато он может "уходить" в бесконечность под всеми углами  $\psi_0$ . В этом отношении группа преобразования (2.18) имеет "сильное" компактное подмножество,, задаваемое параметрами  $\psi$  и  $\psi_0$  и при работе с группами такого рода не так уж трудно справиться с их некомпактностью; аналогичная ситуация будет встречаться в дальнейшем при выделении коллективных и внутренних переменных ядра.

6. В дальнейшем нам еще придется сталкиваться с вопросами некомпактности при выделении коллективных степеней свободы ядра, но теперь пора закончить рассмотрение простейших примеров замены переменных. Расширение группы  $O_2^+$  до  $O_2$  означает, что вместо (2.4) и (2.7) теперь имеем

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\rho \sin \psi_{12}^{(2)} \\ X_2 &= (-1)^{\sigma_2} \rho \cos \psi_{12}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$



и

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \rho \sin \vartheta_{23}^{(3)} \sin \vartheta_{12}^{(3)} \\ X_2 &= -\rho \sin \vartheta_{23}^{(3)} \cos \vartheta_{12}^{(3)} \\ X_3 &= (-1)^{\sigma_3} \rho \cos \vartheta_{23}^{(3)} \end{aligned} \right\} , \quad (2.20)$$

где

$$(-1)^{\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma = e \\ -1, & \text{если } \sigma = s. \end{cases} \quad (2.21)$$

Формулы (2.19) и (2.20) несколько непривычны, так как с их помощью осуществляется замена двух непрерывных переменных через две новых непрерывных и одну дискретную переменные.

Дозволенные значения параметра  $\vartheta_{12}^{(2)}$  заключены в пределах от 0 до  $2\pi$ , поэтому нельзя в (2.19)  $\vartheta_{12}^{(2)}$  заменить на  $-\vartheta_{12}^{(2)}$ , и лишь фаза  $(-1)^{\sigma_2}$  позволяет изменить ориентацию координатной системы в плоскости  $X_1 X_2$ . Дополнительную степень свободы, обуславливаемую дискретной переменной  $\sigma_2$ , нужно как-то скомпенсировать, поэтому при усреднении по новым переменным уже недостаточно интегрировать по  $\vartheta_{12}^{(2)}$ , но необходимо осуществить и суммирование по  $\sigma_2$ . Для группы  $O_2$

это означает, что вместо интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta_{12}^{(2)}}{2\pi} f(\rho \vartheta_{12}^{(2)}) \quad (2.22)$$

от произвольной функции теперь необходимо вычислять

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma_2} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{12}^{(2)}}{2\pi} f(\rho \psi_{12}^{(2)} \sigma_2). \quad (2.23)$$

Аналогично, при переходе от группы  $O_3^+$  к группе  $O_3$

интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{12}^{(2)}}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \psi_{23}^{(3)} \frac{d\psi_{23}^{(3)}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{12}^{(3)}}{2\pi} f(\rho \psi_{12}^{(2)} \psi_{23}^{(3)} \psi_{12}^{(3)}) \quad (2.24)$$

заменяется на

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma_3} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{12}^{(2)}}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \psi_{23}^{(3)} \frac{d\psi_{23}^{(3)}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{12}^{(3)}}{2\pi} f(\rho \psi_{12}^{(2)} \psi_{23}^{(3)} \psi_{12}^{(3)} \sigma_3). \quad (2.25)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что в интегралы (2.22) и (2.24) входит функция, заданная на группах  $O_2^+$  и  $O_3^+$ , тогда как в (2.23) и (2.25) — функция заданная на группах  $O_2$  и  $O_3$ . Переход от групп  $O^+$  к группам  $O$  здесь означает, что появилась возможность "рассортировать" функции  $f$  по отношению к их поведению на действие оператора отражения. Здесь мы вплотную подошли к понятию "функция на группе", которое в несколько измененном виде, дальнейшем будет играть важную роль.

Введем сокращенную запись формул усреднения. С этой целью воспользуемся обозначениями

$$dG_2^+ = \frac{1}{2\pi} d\psi_{12}^{(2)}, \quad (2.26)$$

$$dG_3^+ = \frac{1}{8\pi^2} \sin\psi_{23}^{(3)} d\psi_{12}^{(2)} d\psi_{23}^{(3)} d\psi_{12}^{(3)}$$

и

$$dG_\tau = \frac{1}{2} dG_\tau^+. \quad (2.27)$$

Тогда (2.22) – (2.25) можно записать в следующем виде:

$$\int_{G_\tau^+} dG_\tau^+ f(\rho G_\tau^+) \quad (2.28)$$

и

$$\int_{G_\tau} dG_\tau f(\rho G_\tau \sigma_\tau), \quad (2.29)$$

где  $\tau = 2, 3$ , а в (2.29) знак интегрирования одновременно означает и суммирование по  $\sigma_\tau$ .

### 3. Параметризация ортогональных групп и замена переменных в многомерных пространствах.

1. Мы уже подготовились для обобщения на  $\tau$ -мерный случай результатов п.3 – п.6 предыдущего раздела. Начнем с обобщения формул (2.5) и (2.8), т.е. опишем параметризацию группы вещественных ортогональных матриц  $O_\tau^+$ , определитель которых равен единице.

В  $\tau$ -мерном пространстве имеется  $\frac{1}{2} \tau(\tau-1)$  плоскостей, которые можно нумеровать двумя индексами  $p$  и  $q$ , если считать что  $p = 2, 3, \dots, \tau$  и

$q = 1, 2, \dots, p-1$ . Вращение в плоскости  $qp$  зададим оператором  $T_{qp}$ , реализованным в виде  $n$ -мерной вещественной матрицы, зависящей от параметра  $\psi_{qp}$ , с матричными элементами  $(T_{qp})_{ij}$ , отличающимися от матричных элементов единичной матрицы лишь двумя диагональными элементами

$$(T_{qp})_{qq} = (T_{qp})_{pp} = \cos \psi_{qp} \quad (3.1)$$

и двумя недиагональными элементами

$$(T_{qp})_{qp} = -(T_{qp})_{pq} = \sin \psi_{qp}. \quad (3.2)$$

Такая матрица имеет следующий вид

$$T_{qp} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} q \\ p \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ q \\ p \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (3.3)$$

где показаны лишь неравные нулю матричные элементы, а  $C_{qp}$  и  $S_{qp}$  сокращенно обозначают  $\cos \psi_{qp}$  и  $\sin \psi_{qp}$ . Очевидно, что любое вращение можно представить в виде произведения однопараметрических вращений  $T(\psi_{qp})$ . При этом следует обратить внимание, что поряд-

док расположения этих операторов в их произведении по существу неважен из-за того, что  $T_{qp}$  составляет полный набор разных операторов вращений, т.е. операторов, каждый из которых "работает" в своей плоскости. Такой способ параметризации группы  $O_{\mathcal{L}}^+$  удобен в инфинитезимальном отношении, так как с его помощью в пространстве параметров  $\mathcal{U}_{qp}$  в окрестности единичного элемента задаются однопараметрические кривые, которым соответствуют и разные инфинитезимальные операторы.

Такая параметризация, однако, слишком громоздка для глобальных методов, т.е. методов, опирающихся на интегрирование по группе. Существует более хитроумный способ вращения  $\mathcal{L}$ -мерного пространства, задаваемый с помощью операторов, "работающих" лишь в плоскостях с  $q=p-1$ . Общее число параметров, задающих группу, должно остаться прежним, поэтому для каждой плоскости  $p-1$  необходимо ввести  $t$  параметров, где  $t = 2, 3, \dots, p$ ; каждому из этих параметров соответствует свой оператор, так что вместо  $T_{qp}$  следует говорить об операторах  $T_{p-1p}^{(t)}$  задаваемых  $\mathcal{L}$ -мерными матрицами

$$T_{p-1p}^{(t)} = \begin{array}{c|c|c|c} & & |p-1| & p \\ \hline & 1 \dots 1 & & \\ \hline p-1 & & C_p^{(t)} & S_p^{(t)} \\ \hline p & & -S_p^{(t)} & C_p^{(t)} \\ \hline & & & 1 \dots 1 \end{array} \quad (3.4)$$



В (3.4) введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} C_p^{(t)} &= \cos \psi_{p-1p}^{(t)} \\ S_p^{(t)} &= \sin \psi_{p-1p}^{(t)} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Матрица (3.4) является частным случаем матрицы (3.3) с  $q = p-1$ . Все параметры  $\psi$  с  $p > 2$  принимают значения в интервале  $0 \leq \psi_{p-1p}^{(t)} < \pi$ , а параметры  $\psi$  с  $p = 2$  - в интервале  $0 \leq \psi_{12}^{(t)} < 2\pi$ .

Как уже только что говорилось, любое вращение  $\tau$   $n$ -мерного пространства можно задать с помощью произведения операторов  $T_{p-1p}^{(t)}$ , однако, теперь уже небезразличен их порядок. Действительно, нельзя ставить рядом операторы с одинаковыми  $p$ , так как в их произведение вместо двух параметров  $\psi_{p-1p}^{(t')}$  и  $\psi_{p-1p}^{(t'')}$  будет входить лишь их сумма  $\psi_{p-1p}^{(t')} + \psi_{p-1p}^{(t'')}$ , т.е. по существу будет потерян один из этих параметров. Поэтому необходимо зафиксировать определенный правильный порядок умножения операторов  $T_{p-1p}^{(t)}$ . Требование не помещать рядом операторы с одинаковыми  $p$  оставляет еще обширную свободу выбора, которая в значительной степени может быть снята, если пользоваться рекуррентным построением. Пусть уже выбран определенный порядок построения оператора  $G_{n-1}^+$  собственного вращения  $n-1$ -мерного пространства и необходимо его дополнить до оператора вращения

$g_{\tau}^{+}$   $\tau$ - мерного пространства. Ради определенности это дополнение осуществим "справа", т.е. положим

$$g_{\tau}^{+} = g_{\tau-1}^{+} g_{\tau}^{+}, \quad (3.6)$$

а  $g_{\tau}^{+}$  зафиксируем, полагая, что

$$g_{\tau}^{+} = \prod_{p=\tau}^2 T_{p-1p}^{(\tau)}. \quad (3.7)$$

Чтобы разобраться в структуре формулы (3.6), выпишем

ее в случае  $\tau = 2, 3, 4;$

$$g_2^{+} = T_{12}^{(2)}, \quad (3.8)$$

$$g_3^{+} = T_{12}^{(2)} T_{23}^{(3)} T_{12}^{(3)} \quad (3.9)$$

и

$$g_4^{+} = T_{12}^{(2)} T_{23}^{(3)} T_{12}^{(3)} T_{34}^{(4)} T_{23}^{(4)} T_{12}^{(4)}. \quad (3.10)$$

Параметризацией (3.8) и (3.9) мы уже пользовались в примерах п.3 - п.6 предыдущего раздела. Из примера (3.10) видно, что при переходе от  $\tau-1$  - мерного к  $\tau$  - мерному вращению появляется лишь один существенно новый поворот  $T_{\tau-1\tau}^{(\tau)}$ , своим нижним индексом  $\tau$  зацепляющий новое измерение. Слева от него находятся все повороты, а справа - только некоторые из поворотов пространства  $\tau-1$  измерений. Теперь уже понятно, что такая параметризация удобна в глобальном, интегральном отношении из-

за минимального числа существенно новых поворотов, появляющихся при переходе от группы  $O_{\tau-1}^+$  к группе  $O_{\tau}^+$ . Читателя, однако, ждет разочарование, если он попытается с помощью такой параметризации найти инфинитезимальные матрицы, так как дифференцирование по параметрам даст лишь  $\tau-1$  базисных инфинитезимальных операторов  $J_{12}, J_{23}, \dots, J_{\tau-1, \tau}$ . Для определения остальных  $\frac{1}{2} \tau(\tau-1) - (\tau-1)$  операторов придется обратиться к их коммутационным соотношениям.

2. Оператор отражения (2.12) уже записан в форме пригодной для общего случая  $\tau$ -мерного пространства поэтому, как и в (2.14) и (2.17), элементы  $G_{\tau}$  группы  $O_{\tau}$  зададим с помощью матриц

$$G_{\tau} = G_{\tau}^+ \sigma_{\tau}, \quad (3.11)$$

где  $\sigma_{\tau}$  - группа отражения (2.13). Элементы группы  $\sigma_{\tau}$  можно записать единым образом, если положить, что

$$\sigma_k = \begin{array}{c|c|c} & k & \\ \hline 1 & \dots & \\ \hline & & (-1)^{\sigma_k} \\ \hline k & & \\ \hline & & \dots & 1 \end{array} \quad (3.12)$$

где фаза  $(-1)^{\sigma}$  определена в (2.21).

Полезно еще записать рекуррентное по  $\tau$  построение элементов  $G$ . Согласно (3.6) и (3.11) имеем

$$G_{\tau} = G_{\tau-1}^+ G_{\tau}^+ \sigma_{\tau} = G_{\tau-1}^+ \sigma_{\tau-1} \sigma_{\tau-1}^{-1} G_{\tau}^+ \sigma_{\tau}, \quad \text{поэтому}$$

$$G_{\tau} = G_{\tau-1} g_{\tau}, \quad (3.13)$$

где

$$g_{\tau} = G_{\tau-1}^{-1} g_{\tau}^{+} G_{\tau}, \quad (3.14)$$

а  $G_{\tau-1}$  и  $G_{\tau}$  — матрицы (3.12) с  $k=\tau-1$  и  $k=\tau$ .

В математической литературе совокупность элементов

$g_{\tau}$  группы  $O_{\tau}$  обычно называют фактор-пространством и обозначают как

$$g_{\tau} = O_{\tau} / O_{\tau-1} \quad (3.15)$$

Исходя из (3.6), то же самое можно написать и для группы

$$O_{\tau}^{+} : \quad g_{\tau}^{+} = O_{\tau}^{+} / O_{\tau-1}^{+}. \quad (3.16)$$

Выше мы встретились с еще одним фактор-пространством

$$G_{\tau} = O_{\tau} / O_{\tau}^{+}, \quad (3.17)$$

вытекающим из (3.11).

Если говорить о произвольной группе  $G$  и некоторой ее подгруппе  $H$ , то можно ввести фактор-пространство

$$g = G / H. \quad (3.18)$$

При дополнительных условиях, когда  $H$  инвариантна относительно внутренних автоморфизмов (это означает, что

$ghg^{-1} \in H$ , т.е.  $H$  является нормальным делителем группы  $G$ , фактор-пространство превращается в фактор-группу. В нашем случае множества  $O_{\tau}/O_{\tau-1}$  или  $O_{\tau}^+/O_{\tau+1}^+$  являются лишь фактор-пространствами, тогда как  $O_{\tau}/O_{\tau}^+$  образует фактор-группу.

3. Понятие фактор-пространства и удобнее его обозначение позволяет записать в компактном виде формулы (2.19) и (2.20), одновременно обобщая их на  $\tau$ -мерный случай. Действительно, согласно (3.14), учитывая (3.7) для матрицы  $D^{(1\tau)}$ , зависящей от элементов фактор-пространства (3.15), имеем:

$$D^{(1\tau)}(g_{\tau}) = \sigma_{\tau-1}^{-1} \prod_{p=\tau}^2 T_{p-1p}^{(\tau)} \sigma_{\tau}. \quad (3.19)$$

Элементы  $g_{\tau}$  фактор-пространства (3.15) задаются с помощью  $\tau-1$  непрерывных  $U_{12}^{(\tau)}, U_{23}^{(\tau)}, \dots, U_{\tau-1\tau}^{(\tau)}$  и двух дискретных параметров  $\sigma_{\tau-1}$  и  $\sigma_{\tau}$ . Непосредственное перемножение позволяет легко убедиться в том, что последняя строка матрицы (3.19) не зависит от  $\sigma_{\tau-1}$ , поэтому формулы (2.19) и (2.20) можно обобщить на  $\tau$ -мерный случай, если положить, что

$$X_i = \rho D_{\tau,i}^{(1\tau)}(g_{\tau}), \quad (3.20)$$



где  $i = 1, 2, \dots, \tau$  и

$$\varrho = \left( \sum_i x_i^2 \right)^{1/2}. \quad (3.21)$$

Нам еще осталось обобщить на  $\tau$ -мерный случай формулы усреднения (2.28) и (2.29), модифицированные для интегрирования по фактор-пространству (3.15). Элемент объема этого фактор-пространства имеет такой вид:

$$dg_{\tau}^{+} = \frac{\Gamma(\frac{\tau}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\tau-1}{2})} \prod_{p=\tau}^2 \left( \sin \psi_{p-1p}^{(\tau)} \right)^{p-2} d\psi_{p-1p}^{(\tau)}. \quad (3.22)$$

Множитель в (3.22) определен из условия нормировки элемента объема:

$$\int_{g_{\tau}^{+}} dg_{\tau}^{+} = 1. \quad (3.23)$$

Аналогично (2.27) введем элемент объема фактор-пространства (3.15)

$$dg_{\tau} = \frac{1}{2} dg_{\tau}^{+}. \quad (3.24)$$

Теперь уже нетрудно записать формулу усреднения произвольной функции  $f$  по переменным  $\varrho, \psi_{12}^{(\tau)}, \psi_{23}^{(\tau)}, \dots, \psi_{\tau-1\tau}^{(\tau)}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varrho^{\tau-1} d\varrho \int_{g_{\tau}^{+}} dg_{\tau}^{+} f(\varrho g_{\tau}^{+}) &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{G_{\tau}} \int_0^{\infty} \varrho^{\tau-1} d\varrho \int_{g_{\tau}^{+}} dg_{\tau}^{+} f(\varrho g_{\tau}^{+} G_{\tau}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где учтено то обстоятельство, что последняя строка матричных элементов матрицы (3.17) не зависит от  $b_{r-1}$ .

Разумеется, формулы (3.23) и (3.25) могут быть обобщены и для фактор-пространства (3.18). Если отвлечься от ортогональных групп и говорить о произвольной группе  $G$  и ее подгруппе  $H$ , то вместо (3.25) необходимо писать

$$\int_{G/H} d(G/H) f(G/H), \quad (3.26)$$

где "элемент объема"  $d(G/H)$  удовлетворяет условию

$$\int_{G/H} d(G/H) = 1 \quad (3.27)$$

В частности, когда подгруппа  $H$  состоит лишь из одного элемента, т.е. является тривиальной, в (3.26) и (3.27) речь идет о функциях и интегралах на группе. Поэтому, интеграл (3.26) обобщает как формулы усреднения по группе так и усреднения по фактор-пространству. В математической литературе  $d(G/H)$  принято называть мерой на фактор-пространстве. Известны теоремы доказывающие, для определенного класса групп, существование и свойства инвариантности меры на фактор-пространстве. В частности, в случае компактных групп она всегда существует и является право- и левоинвариантной мерой. Существование ин-

теграла (3.26) также далеко не очевидно, но когда, работая с некомпактной группой, удается обеспечить его сходимость, эти усилия бывают вознаграждены многими содержательными результатами из теории специальных функций (см., напр., [7]).

## 4. Коллективные и внутренние переменные ядра

1. Возвратимся к вопросам, поставленным в п.2 второго раздела. Теперь мы уже знаем, в каком классе функций следует искать функции (2.3), осуществляющие переход от координат Якоби к новым трансляционно - инвариантным переменным ядра: это произведение "некомпактной" переменной  $\rho$  и матричных элементов матриц неприводимого представления  $(1_{\tau})$  ортогональной группы  $O_{\tau}$ , где  $\tau = 3(n-1)$ . Эта группа компактна, что обеспечивает "хорошие" свойства функций (2.3) и операторов вращений  $T$ . Формулу замены переменных можно получить из (3.20) при  $\tau = 3(n-1)$ . Она, очевидно, принимает вид

$$\rho_i^s = \rho D_{s_0 i_0, s_i}^{(1)}(g), \quad (4.1)$$

где  $s_0 i_0$  обозначает последнюю строку матрицы  $D^{(1)}$ , задающей группу  $O_{3(n-1)}$ , а  $g$  - элементы фактор-пространства

$$g = O_{3(n-1)} / O_{3(n-1)-1}. \quad (4.2)$$

Переменную

$$\rho = \left( \sum_{s_i} (\rho_i^s)^2 \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

принято называть глобальным радиусом ядра.

Мы только что нашли явный вид функции,, с помощью которых осуществляется замена пространственных переменных ядра, но пока не было приведено каких-либо конструктивных утверждений о смысле этих новых переменных. По каким признакам можно "рассортировать" микроскопические переменные на коллективные и внутренние переменные ядра? Можно ли такую "сортировку" произвести в наборе переменных  $\varphi, \varphi_{12}^{(3(n-1))}, \varphi_{23}^{(3(n-1))}, \dots, \varphi_{3(n-1)-1, 3(n-1)}^{(3(n-1))}$ , который следует выбрать, если : пользоваться в предыдущем разделе описанной параметризацией фактор-пространства (4.2), или необходимо придумать другую ее параметризацию, более естественную для наших целей? Чтобы понять, что же означает естественная параметризация, необходимо с перва дать ответ на первый из этих вопросов.

2. Начнем с определения коллективных микроскопических переменных. Коллективными переменными будем называть те избранные переменные, которые, образно говоря, могут существовать независимо от остальных переменных ядра. Этому определению, которое из-за его неопределенности, не выдерживает никакой критики, можно придать строгий смысл, если вспомнить, что причиной, по которой переменные квантовой системы тождественных частиц перемешиваются, является принцип Паули. Требования принципа Паули обеспечиваются с помощью операторов перестановки, т.е.

с помощью элементов симметрической группы  $S_n$ . Поэтому, независимо от остальных, могут существовать лишь те переменные, которые "не чувствуют" принципа Паули, т.е. переменные, являющиеся инвариантами симметрической группы  $S_n$ . По определению их и будем называть коллективными переменными  $\xi$ . Остальные же переменные  $\eta$  "чувствующие" принцип Паули, назовем внутренними переменными ядра.

Хотя эти определения являются математически строгими, пользоваться ими следует лишь опираясь на условия 1 и 11, сформулированные в первом разделе. Действительно, исходя например из  $\tau$  переменных  $X_1, \dots, X_\tau$ , всегда можно сконструировать  $\tau$  функций, инвариантных по отношению к преобразованиям группы  $S_\tau$  и как будто таким образом ввести соответствующие им коллективные переменные ядра. Приведем пример такой конструкции для  $\tau = 3$ . Введем три  $S_3$ -инвариантные функции

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ f_2 &= X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3 \\ f_3 &= X_1 X_2 X_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

и будем искать волновую функцию как функцию новых "коллективных" переменных  $f_1 f_2 f_3$ . Однако произвольная функция, зависящая от  $f_1 f_2 f_3$ , всегда является  $S_3$  скалярной функцией, поэтому такая конструкция исключает



возможность обеспечить принцип Паули, т.е. обеспечить требование 11. Из этого примера видно, что число коллективных переменных должно быть строго ограничено. Иными словами, принцип Паули может быть обеспечен лишь с помощью определенного числа внутренних переменных ядра, и наша задача состоит в отыскании их минимального набора, причем минимальностью набора здесь понимается в том смысле, что дальнейшее его сужение ведет к невозможности обеспечения принципа Паули.

Отыскание минимального набора внутренних переменных ядра пока отложим на будущее, а теперь более подробно выясним роль симметрической группы при разделении переменных на коллективные и внутренние. Чтобы отыскать "реакцию" переменных на действие операторов симметрической группы  $S_n$ , необходимо выяснить, каким образом эта группа вложена в ортогональную группу  $O_{3(n-1)}$ .

Операторы симметрической группы переставляют однонуклонные переменные  $\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n$ . С помощью выражения (2.1) можно найти преобразование координат Якоби, индуцированное перестановкой переменных  $\tau_i$ . Перестановки действуют на индексы  $i$  векторов  $\vec{\tau}_i$ , откуда следует что и элементы симметрической группы  $S_n$  действуют лишь на нижние индексы  $i$  векторов Якоби, генерируя на базисе этих векторов неприводимое представле-

ние группы  $S_n$  (подробности см. в [8]). Если подвергнуть вектора  $\vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_{n-1}$  преобразованиям ортогональной группы  $O_{n-1}$ , то станет очевидно, что любое преобразование симметрической группы, подобно преобразованию (2.16), можно представить в виде произведения собственных поворотов  $n-1$ -мерного пространства на операцию отражения. Иными словами, симметрическая группа  $S_n$ , переставляющая вектора  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$ , является подгруппой ортогональной группы  $O_{n-1}$ , преобразующей вектора  $\vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_{n-1}$ , когда  $\vec{\rho}_i$  и  $\vec{z}_i$  связаны между собою соотношениями (2.1). Это утверждение сокращенно обозначается следующим образом

$$O_{n-1} \supset S_n, \quad (4.5)$$

и говорится, что симметрическая группа  $S_n$  вложена в ортогональную группу  $O_{n-1}$  по цепочке  $O_{n-1} \supset S_n$ . Обратим внимание на тот факт, что ранг ортогональной группы на единицу меньше ранга симметрической группы, так что  $S_n$  весьма плотно "вставлена" в  $O_{n-1}$ . В п.4 второго раздела был дан пример вложения симметрической группы  $S_2$  в ортогональную группу  $O_2$  или, в общем случае, вложения

$$O_n \supset S_n, \quad (4.6)$$

в котором симметрическая группа "вставлена" в ортогональную группу менее плотно, по сравнению с (4.5). Математическая причина, позволяющая перейти от цепочки (4.6) к цепочке (4.5), кроется в переходе от  $S_n$ -приводимого базиса  $\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n$  к  $S_n$ -неприводимому базису, состоящему из координат Якоби (2.1) и  $S_n$ -скалярной переменной

$$\vec{\rho}_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i, \quad (4.7)$$

описывающей движение центра масс ядра. Вспомним,, что этот переход стал необходим из-за физического требования трансляционной инвариантности волновой функции ядра.

Теперь уже нутрудно сообразить, каким образом вложить симметрическую группу  $S_n$  в ортогональную группу  $O_{3(n-1)}$  - это вложение подсказывает индексы матричных элементов в (4.1). Наличие двух индексов  $S = x, y, z$  и  $i = 1, 2, \dots, n-1$  означает, что эта нумерация приспособлена для прямого произведения  $3 \times 3$ -мерной матрицы (осуществляющей вращение "нашего" трехмерного пространства) на  $(n-1) \times (n-1)$ -матрицу, (осуществляющую вращения абстрактного  $(n-1)$ -мерного пространства векторов Якоби). Прямому произведению таких матриц соответствует прямое произведение групп  $O_3^+$  и  $O_{n-1}$ , поэтому естественно ввести цепочку

$$O_{3(n-1)} \supseteq O_3^+ \times O_{n-1}, \quad (4.8)$$

означающую, что элемент ортогональной группы  $O_{3(n-1)}$  сужается на прямое произведение элементов группы и группы  $O_{3(n-1)}$ . При сужении на цепочке (4.8) подразумевается, что матрица отражения  $3(n-1)$ -мерного пространства заменяется матрицей отражения  $n-1$ -мерного пространства; такая замена законна, так как учет отражения (см. п.4 второго раздела) требует использования лишь одного "представителя" — одной численной матрицы с определителем, равным  $-1$ .

3. Выпишем полную цепочку

$$O_{3(n-1)} \supseteq O_3^+ \times O_{n-1} \supseteq \bigcup S_n \quad (4.9)$$

и приступим к детализации формулы (4.1). Мы выяснили, что в этой формуле под фактор-пространством нельзя понимать фактор-пространства (4.2), параметризованного способом, описанным в п.2 предыдущего раздела; параметризация такого рода приспособлена для цепочки

$$O_{3(n-1)} \supseteq O_{3(n-1)-1} \supseteq \dots \supseteq O_1, \quad (4.10)$$

тогда как симметрическая группа естественным образом может быть вложена лишь в цепочку (4.8). Чтобы придать формуле (4.1) новый смысл, запишем элементы  $q$  группы  $O_{3(n-1)}$  в виде

$$q = \tilde{q} G_3^+ q_{n-1}; \quad (4.11)$$

приспособленном для цепочки (4.9). В (4.11)  $G_3^+$  - параметры группы вращения  $O_3^+$ ,  $q_{n-1}$  - параметры группы  $O_{n-1}$ , смысл которых нам еще предстоит выяснить и  $\tilde{q}$  - остальные параметры, дополняющие набор  $G_3^+ q_{n-1}$  до полного набора  $3(n-1)-1$  переменных.

Необходимо разобраться в новой параметризации матричных элементов (4.1). Входящие в (4.1) матричные элементы запишем в виде суммы произведения матричных элементов, зависящих от  $\tilde{q}$ ,  $G_3^+$  и  $q_{n-1}$ :

$$D_{i' i''}^s = \rho \sum_{\substack{s' i_0 \\ s' i''}}^{(i)} D_{s_0 i_0, s' i'}^{(i)}(\tilde{q}) D_{s' i', s'' i''}^{(1_3)}(G_3^+) D_{s'' i'', s i}^{(1_{n-1})}(q_{n-1}). \quad (4.12)$$

Но  $D^{(1_3)}$  - это матрицы  $O_3^+$  - непроводимых представлений  $(1_3)$ , зависящие от элементов  $G_3^+$ , поэтому ее матричные элементы диагональны по индексу  $i$  и не зависят от него, т.е.

$$D_{s' i', s'' i''}^{(1_3)}(G_3^+) = \delta(i' i'') D_{s' s''}^{(1_3)}(G_3^+). \quad (4.13)$$

Тоже касается и индексов  $S$  матричных элементов матрицы  $D^{(1_{n-1})}$ . В итоге формула (4.12) упрощается и приобретает следующий вид:

$$Q_{i'}^S = \rho \sum_{S_0 i_0, S' i'} D_{S_0 i_0, S' i'}^{(1)}(\tilde{g}) D_{S', S}^{(1_3)}(g_3^+) D_{i', i}^{(1_{n-1})}(q_{n-1}). \quad (4.14)$$

Теперь нам необходимо отыскать рациональную параметризацию матриц  $D^{(1)}(\tilde{g})$ ,  $D^{(1_3)}(g_3^+)$  и  $D^{(1_{n-1})}(q_{n-1})$ . В качестве параметров  $g_3^+$  возьмем три угла Эйлера, задаваемые вращением (2.8), а неприводимые матрицы  $D^{(1_{n-1})}$  группы  $O_{n-1}$  зададим на фактор-пространстве

$$q_{n-1} = O_{n-1} / O_{n-4}. \quad (4.15)$$

Очевидно, что

$$O_{n-1} / O_{n-4} = O_{n-3} / O_{n-4} \cdot O_{n-2} / O_{n-3} \cdot O_{n-1} / O_{n-2}, \quad (4.16)$$

поэтому, согласно (3.15),

$$q_{n-1} = g_{n-3} g_{n-2} g_{n-3}. \quad (4.17)$$

Если воспользоваться формулой (3.14), то в (4.17) можно выписать в явном виде операторы отражения. Имеем

$$q_{n-1} = \sigma_{n-4}^{-1} g_{n-3}^+ g_{n-2}^+ g_{n-1}^+ \sigma_{n-1} \quad (4.18)$$

и теперь с помощью (3.7) уже легко записать выражение  $q_{n-1}$  через операторы вращения:



$$q_{n-1} = \sigma_{n-4}^{-1} \prod_{p=n-3}^2 T_{p-1,p}^{(n-3)} \prod_{p=n-2}^2 T_{p-1,p}^{(n-2)} \prod_{p=n-1}^2 T_{p-1,p}^{(n-1)} \sigma_{n-1}. \quad (4.19)$$

Нетрудно подсчитать, что  $q_{n-1}$  зависит от  $3(n-3)$  непрерывных параметров. Если к ним еще прибавить три параметра группы  $O_3^+$  и глобальную переменную  $\varphi$ , то в случае  $n > 3$  общий баланс переменных  $3(n-1) - 3(n-3) - 3 - 1$  показывает, что оставшееся фактор-пространство

$$\tilde{q} = O_{3(n-1)} / O_{3(n-1)-1} \quad (4.20)$$

задается лишь двумя непрерывными параметрами, которые обозначим через  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Когда же  $n=3$ , тогда имеем глобальную переменную, три угла Эйлера и один параметр группы  $O_2$ , и баланс переменных  $6 - 3 - 1 - 1 = 1$  показывает, что фактор-пространство (4.20) задается лишь одной переменной  $\psi_1$ .

Зависящие от параметров  $\psi_1$  и  $\psi_2$  вращения зададим матрицам

$$\tilde{T}_1 = \begin{array}{c|ccc|ccc} & \begin{array}{c} s' i' \\ s_0 i_0 \end{array} & & & x_{n-3} & y_{n-2} & z_{n-1} \\ \hline & & \dots & \dots & & & \\ \hline \cdot & & 1 & & & & \\ \cdot & & & 0 & & & \\ \cdot & & & & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & \\ \hline x_{n-3} & & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ \hline y_{n-2} & & 0 & & 0 & c_1 & s_1 \\ \hline z_{n-1} & & 0 & & 0 & -s_1 & c_1 \end{array} \quad (4.21)$$

и

$$\tilde{T}_2 = \begin{array}{c|ccc|ccc} & \begin{array}{c} s' i' \\ s_0 i_0 \end{array} & & & x_{n-3} & y_{n-2} & z_{n-1} \\ \hline & & \dots & \dots & & & \\ \hline \cdot & & 1 & & & & \\ \cdot & & & 0 & & & \\ \cdot & & & & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & 0 & & & & \\ & & & & & & 1 \\ \hline x_{n-3} & & 0 & & c_2 & s_2 & 0 \\ \hline y_{n-2} & & 0 & & -s_2 & c_2 & 0 \\ \hline z_{n-1} & & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (4.22)$$

где  $0 \leq \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$  и  $0 \leq \vartheta_2 < \frac{\pi}{2}$ , а  $c_1 = \cos \vartheta_1$  и т.п. Перемножив матрицы (4.21) и (4.22), получаем .

$s'i$ $s_0 i_0$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$x_{n-3}$	$y_{n-2}$	$z_{n-1}$
	1					
		$\cdot$		0	0	0
			1			
$x_{n-3}$	0			$c_2$	$s_2$	0
$y_{n-2}$	0			$-c_1 s_2$	$c_1 c_2$	$s_1$
$z_{n-1}$	0			$s_1 s_2$	$-s_1 c_2$	$c_1$

(4.23)

$$\tilde{g} = \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 =$$

Из матрицы (4.23) непосредственно видно, что входящие в (4.14) матричные элементы не равны нулю лишь при  $S' = i'$ , если выбрана такая параметризация фактор-пространства  $\tilde{g}$ , в случае которой при  $n > 3$  в

(4.14) строкам  $S' = X'$ ,  $S' = y'$  и  $S' = Z'$  матрицы  $D^{(13)}$  соответствуют строки  $i' = n-3$ ,  $i' = n-2$  и  $i' = n-1$  матрицы  $D^{(1n-1)}$ .

Если же  $n = 3$ , нет матрицы (4.22) и получаем, что значения  $S' = y'$  и  $S' = Z'$  скоррелированы с первой и второй строками матриц представления группы  $O_2$ .

Учтем в (4.14) дополнительную диагональность, т.е. наличие под знаком суммы  $\delta(s'i')$ , после чего эта формула приобретает такой окончательный вид:

(4.24)

$$\rho_i^S = \sum_{S'} \rho^{(S')} D_{S',S}^{(13)}(g_3^+) D_{S',i}^{(1n-1)}(q_{n-1}),$$

где введено обозначение

$$\rho^{(s')} = \rho D_{s_0 i_0, s' s'}^{(1)}(\tilde{q}). \quad (4.25)$$

Полезно сравнить между собой формулы (3.20) и (4.24), обе из которых служат для замены переменных. В первой из них исходные переменные имеют лишь один индекс, вследствие чего она "работает" на канонической цепочке

$$0_{\tau} \supset 0_{\tau-1}, \quad (4.26)$$

тогда как вторая приспособлена для исходных переменных с двумя индексами, поэтому она "работает" на неканонической цепочке (4.8). Формула (4.24) будет играть важную роль в дальнейшем. Она получена в работе [4].

С самого начала мы пользуемся вещественными переменными  $\rho_i^s$  и производим их замену с помощью вещественных матриц вращений. Встречаются задачи, для которых удобно комплексифицировать переменные  $\rho_i^s$ . Это легко осуществить, если с помощью унитарных преобразований  $U^{-1} D^{(1_3)} U$  и  $V^{-1} D^{(1_{n-1})} V$  перейти в (4.24) к новым комплексным переменным  $\bar{\rho}_i^{-s}$ . После такого преобразования подобия формула (4.24) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_i^{-s} &= \sum_{s' i''} \rho_{i''}^{s''} U_{s'', s} V_{i'', i} = \\ &= \sum_{s' i'} \bar{\rho}_{i'}^{(s' i')} \bar{D}_{s', s}^{(1_3)} (g_3^+) \bar{D}_{i', i}^{(1_{n-1})} (q_{n-1}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\bar{\rho}(s'i') = \sum_{s''} \rho(s'') U_{s'',s'} V_{s'',s'}. \quad (4.28)$$

В (4.27)  $\bar{D}$  — матричные элементы матриц  $D$  в новом базисе. Для изучения ортогональных групп наиболее удобны так называемые комплексные кэртановские координаты, поэтому преобразование подобия чаще всего осуществляет переход к таким переменным типа переменных

$x \pm iy$ . В частности, можно воспользоваться либо преобразованием  $U$ , либо  $V$ , либо  $U$  и  $V$  одновременно. Комплексификация переменных порою очень эффективна при построении непроводимых базисов. Яркий пример такой комплексификации встречается при построении волновой функции трехнуклонной системы.

4. Мы уже неоднократно подчеркивали, что операции симметрической группы являются "внутренними операциями" группы  $O_{n-1}$ . Переменные  $\rho^{(s)}$  и  $G_3^+$  не затрагиваются операторами группы  $O_{n-1}$ , а это означает, что эти шесть переменных являются инвариантами симметрической группы  $S_n$ . Однако, по нашему определению,  $S_n$  — инвариантные переменные называются коллективными переменными ядра, поэтому результаты предыдущего пункта доказывают, что при  $n > 3$  существуют, по крайней мере, шесть коллективных переменных ядра:

три угла Эйлера и три переменные  $\rho^{(s')} (s' = x', y', z')$  радиального типа, принимающие значения в интервале  $0 \leq \rho^{(s')} < \infty$ ; если же  $n = 3$  группа  $O_{n-1}$  вырождается до группы  $O_2$ , и, согласно замечанию, следующему за формулой (4.20), вместо трех  $\rho^{(s')}$  остаются лишь две переменные  $\rho^{(s')} (s' = y', z')$ . Ради полноты можно рассмотреть и почти тривиальный случай  $n = 2$ . Тогда группа  $O_1$  вырождается до дискретной группы отражения и, следовательно, "не забирает" непрерывных переменных, в связи с чем все три переменные двухуклонной задачи —  $\rho^{(z)}$  и два угла Эйлера являются коллективными переменными.

Существуют ли еще и другие коллективные переменные ядра? Теперь мы уже знаем, что этому вопросу эквивалентен следующий вопрос: существует ли еще какая-либо непрерывная группа  $G_0$ , которую можно было бы вставить между группами  $O_{n-1}$  и  $S_n$ , т.е. существует ли цепочка

$$O_{n-1} \supseteq G_0 \supseteq S_n \quad (4.29)$$

с нетривиальной непрерывной группой  $G_0$ ?

Если бы ответ на этот вопрос был положительным, то, очевидно,, дополнительные параметры, появляющиеся при расширении группы  $G_0$  до группы  $O_{n-1}$  были бы  $S_n$  — инвариантами, т.е. коллективными переменными



ядра. Можно, однако, доказать, что при всех  $n$  такая группа не существует. Не будем останавливаться на формальной стороне этого доказательства, а наметим лишь его основные этапы. Группа  $O_{n-1}$  — компактна, поэтому и  $G_0$  должна быть компактной группой. Все компактные группы классифицированы и хорошо известны, поэтому это утверждение легко проверить для малых  $n$ , скажем, для  $n=3$  и далее, методом математической индукции, провести доказательство для любого  $n$ .

Итак, мы выяснили максимально возможное число коллективных переменных ядра. Сформулируем окончательный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Не нарушая требований микроскопической трансляционной инвариантности и антисимметричности волновой функции ядра, состоящего из  $n$  нуклонов можно ввести шесть коллективных переменных при  $n > 3$ , пять коллективных переменных при  $n = 3$  и три коллективных переменных при  $n = 2$ . Остальные  $3(n-3)$  непрерывных переменных с отражением при  $n > 3$  и отражение при  $n = 2$  являются существенно неколективными (внутренними) переменными ядра.

Следует обратить внимание, что в формулировке этой теоремы говорится о нуклонах, а это, как мы условились в п.2 первого раздела, означает, что протоны и нейтроны

различаются с помощью проекции изоспина. Другими словами, условие теоремы требует антисимметричности по всем переменным ядра, вследствие чего в качестве "сторожа" выступает симметрическая группа  $S_n$ , запрещающая выделение больше, чем шести коллективных переменных ядра.

Рассмотрим другой вариант теории, когда протоны и нейтроны трактуются как различные частицы, и поэтому нет требования антисимметричности по перестановке протонов с нейтронами. Пусть ядро состоит из  $n_1$  протонов и  $n_2$  нейтронов и пусть  $n_1 + n_2 = n$ . Введем ортогональные группы  $O_{n_1-1}$  и  $O_{n_2-1}$  и по цепочке (4.5) вложим в них симметрические группы  $S_{n_1}$  и  $S_{n_2}$ , обеспечивающие принцип Паули по протонам и нейтронам в отдельности. Вместо (4.9) теперь имеем цепочку

$$O_{3(n-1)} \supset O_3^+ \times O_{n-1} \supset O_3^+ \times \left( \begin{array}{c} O_{n_1-1} \dot{+} O_{n_2-1} \\ \cup \quad \cup \\ S_{n_1} \quad S_{n_2} \end{array} \right) \quad (4.30)$$

где  $\dot{+}$  означает прямую сумму им соответствующих матриц). Согласно теореме 1 протонная система описывается

$3(n_1-3)$ , а нейтронная система -  $3(n_2-3)$  внутренними переменными. Группа  $O_{n-1}$  содержит

$3(n-3)$  переменных, часть которых, а именно

$3(n_1+n_2-3) - 3(n_1-3) - 3(n_2-3) = 9$ , теперь

становится коллективными переменными ядра. Поэтому заключаем, что для протонно-нейтронного ядра справедлива следующая теорема.

Теорема П. Не нарушая требований микроскопической трансляционной инвариантности и антисимметричности волновой функции ядра, состоящего из  $n_1$  протонов и  $n_2$  нейтронов ( $n_1 \geq 3$  и  $n_2 \geq 3$ ) можно ввести 15 коллективных переменных, 6 из которых имеют тот же смысл, что и в теореме 1.

Во избежание излишней педантичности в формулировку теоремы П не включены случаи  $n_1=1,2$  и  $n_2=1,2$ , и, кроме того, в ней не говорится о числе внутренних переменных ядра.

Мы ответили на часть вопросов, поставленных в п.4 первого раздела. Обсуждение физического смысла введенных переменных отложим до шестого раздела, а теперь коротко остановимся на тех общих математических идеях, которые нами эксплуатировались при изучении коллективных и внутренних переменных ядра.

## 5. Элементы теории индуцированных представлений.

1. У читателя могло возникнуть ложное впечатление, что параметризация фактор-пространства ортогональной группы  $O_{3(n-1)}$  для неканонической цепочки (4.8) (п. 3 предыдущего раздела) осуществлена интуитивно и поэтому в какой-то степени искусственна. В действительности это не так. Существует теория, составляющая раздел общей теории групп, называемая теорией индуцированных представлений, на основе которой и были получены результаты, изложенные в двух предыдущих разделах. Основы этой, в настоящее время интенсивно развиваемой теории (подробнее см. напр. [7, 9, 10]) были заложены несколько десятков лет тому назад. Не имея возможности в рамках этих лекций сколько-нибудь более подробно остановиться на этих вопросах, в этом разделе приведем лишь некоторые отрывочные сведения из теории индуцированных представлений, с целью познакомить читателя с теми общими математическими идеями, которые неожиданно оказались полезными в теории ядра.

Начнем с простейшего примера. Хорошо известна формула

$$U_m^{\ell} \left( \begin{matrix} (3) \\ 12 \\ (3) \end{matrix} \right) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} D_{0m}^{\ell} \left( \begin{matrix} (2) & (3) & (3) \\ \mathcal{U}_{12} & \mathcal{U}_{23} & \mathcal{U}_{12} \end{matrix} \right), \quad (5.1)$$

связывающая шаровые функции с матричными элементами матриц  $O_3^+$  — неприводимых представлений  $D^{\ell}$ . В чем сущность этой формулы. Если имеем группу  $O_3^+$  и мы заинтересованы в утилитарном ее использовании для решения различных физических задач, то надо знать функции, образующие базисы неприводимых пространств и операторы (обычно реализованные в виде матриц), действующие в этих пространствах. Формула (5.1) показывает, однако, что базисные функции выражаются через часть матричных элементов матриц неприводимых представлений. Из предыдущих разделов уже знаем, что шаровые функции  $Y_m^{\ell}$  являются функциями, заданными на фактор-пространстве  $O_3^+/O_2^+$ , тогда как матричные элементы матрицы  $D^{\ell}$  — функциями, заданными на группе  $O_3^+$ . Поэтому неудивительно, что существует такая связь между частным случаем более общих функций  $D^{\ell}$  и более простыми функциями  $Y^{\ell}$ .

При такой интерпретации формулы (5.1) она не выглядит очень конструктивной; чтобы получить более простую величину  $Y$  сначала нужно знать более сложную величину  $D$ . Хорошо было бы иметь обратную возможность — по известному базису  $Y$  восстановить матричные элементы матрицы  $D$ . Но это действительно легко. Если известны  $Y_m^{\ell}(g_3^+)$ , — здесь аргумент функции обозначен согласно (3.16) — то матричные элементы операторов

$T(g_3^+)$  можно восстановить либо с помощью левого сдвига

$$T_L(g_3^+) y_m^e(g_3^+) = y_m^e((g_3^+)^{-1} g_3^+), \quad (5.2)$$

либо - правого сдвига

$$T_R(g_3^+) y_m^e(g_3^+) = y_m^e(g_3^+ g_3^+). \quad (5.3)$$

Легко проверить, что произведению операторов, определенных с помощью (5.2) или (3.33), соответствует произведение элементов группы. Проверим это для оператора  $T_L$ . Подействуем  $T_L(g_{03}^+)$  на (5.2), в результате чего аргумент  $y$ -ка  $(g_3^+)^{-1} g_3^+$  будет заменен аргументом  $(g_3^+)^{-1} (g_{03}^+)^{-1} g_3^+ = (g_{03}^+ g_3^+)^{-1} g_3^+$  (но не аргументом  $(g_{03}^+)^{-1} (g_3^+)^{-1} g_3^+ !$ ), а это и доказывает, что произведению операторов соответствует произведение элементов группы. Таким образом, для операторов  $T$  левого или правого сдвига

$$T(g_1) T(g_2) = T(g_1 g_2), \quad (5.4)$$

а это и означает, что они образуют операторное представление группы  $O_3^+$ . Для реализации  $T$  в виде матриц достаточно разложить правые стороны (5.2) или (5.3) через  $y_m^e(g_3^+)$ ; коэффициенты такого разложения и будут матричными элементами матрицы  $D^e(g_3^+)$



Таким образом по известным базисам и восстанавливаются матричные элементы матриц неприводимых представлений.

Сделаем шаг в сторону обобщения и вместо  $y_m^t$  воспользуемся какими-то другими функциями  $F_\gamma$  ( $\gamma = 1, 2, \dots$ ), заданными на фактор-пространстве  $O_3^+ / O_2^+$ . Тогда

(5.2) и (5.3) заменяются формулами

$$T_L(g) F_\gamma(g) = F_\gamma(g^{-1}g). \quad (5.5)$$

или

$$T_R(g) F_\gamma(g) = F_\gamma(gg). \quad (5.6)$$

Имея в виду дальнейшие обобщения, в (5.5) и (5.6) уже не пишем индексов букв  $G$  и  $g$ . Об этих двух формулах можно сказать то же самое, что говорилось и о формулах (5.2) и (5.3), с той лишь разницей, что теперь операторы  $T(g)$  будут, вообще говоря, проводимыми. Это и есть та цена, которую приходится платить за неопределенность функций  $F_\gamma$ . Если класс этих функций достаточно широк в том смысле, что в пространстве функций  $F_\gamma$  содержатся и функции  $TF_\gamma$ , т.е. если существует разложение

$$F_\gamma(gg) = \sum_{\gamma'} F_{\gamma'}(g) t_{\gamma'\gamma}(g), \quad (5.7)$$

то, подставляя (5.7) в (5.6), получаем матричную реализацию вообще говоря приводимого оператора представления

$T_R(\mathfrak{g})$  . Полупутно вспомним, что аналогичное требование полноты набора волновых функций по отношению к операторам нам уже встречалась в п.1. второго раздела.

2. Перейдем к еще более общей задаче и будем говорить о произвольной "хорошей" группе  $G$  и с помощью ее подгруппы  $H$  определим фактор-пространство  $\mathfrak{g}$  (3.18); здесь у нас нет возможности более подробно остановиться на вопросе, что же означает "хорошая" группа, но ради определенности, хотя это и необязательно, читатель под этим может понимать компактные группы; в случае некомпактных групп некоторые утверждения требуют уточнения или могут стать просто неверными.

Когда речь идет о произвольной группе  $G$  и ее фактор-пространстве  $\mathfrak{g}$ , все сказанное о формулах (5.5)–(5.7) остается в силе, с той лишь разницей, что теперь появляются дополнительные заботы с выборе фактор-пространства  $G/H$ . Пример группы  $O_3^+$  показывает, что, возможно, мы проявим чрезмерные усилия, если в качестве  $\mathfrak{g}$  возьмем все элементы группы  $G$ , так как тогда функции  $F$ , на которые собираемся индуцировать представления  $T$ , будет перегружены переменными. С другой стороны, недопустимо пользоваться слишком "малым" фактор-пространством. Чтобы убедиться в этом, возьмем крайний случай  $H = G$ , т.е.  $\mathfrak{g} = 1$ .

Тогда формулы (5.5) или (5.6) генерируют лишь тривиальное единичное представление, отображающее все операторы  $T(\mathcal{G})$  в единицу. Из этих примеров видно, что в случае произвольной группы  $\mathcal{G}$  возникает нетривиальная задача выбора подходящего фактор-пространства  $\mathcal{G}/H$ .

Ясно, что операторы представления  $T$ , определяемые формулами (5.5) или (5.6) зависят как от класса используемых функций  $F_{\mathcal{G}}$ , так и от выбора фактор-пространства  $\mathcal{G}/H$ . Оставляя широкие возможности выбора класса функций  $F_{\mathcal{G}}$ , теория индуцированных представлений, в первую очередь, акцентирует вторую из этих причин, определяющих вид операторов  $T$  и дает конкретно рекомендации, каким образом выбрать переменные функции  $F_{\mathcal{G}}$ . Этими общими идеями мы и воспользовались при получении результатов, описанных в предыдущих разделах.

3. Вместо того, чтобы говорить о функциях, заданных на фактор-пространстве  $\mathcal{G}/H$ , задачи теории индуцированных представлений часто формулируются в терминах классов смежности группы  $\mathcal{G}$  по ее подгруппе  $H$ . С этой целью с помощью элемента  $g$ , не принадлежащего подгруппе  $H$ , осуществляется расслоение группы  $\mathcal{G}$ , задаваемые, скажем, правым сдвигом  $Hg$  подгруппы  $H$ .

В случае "удобных" подгрупп  $H$ , пространство функций  $F$  ограничивается классом функций, удовлетворяю-

шим условию

$$F(Hg) = \alpha(H) F(g), \quad (5.8)$$

где  $\alpha(H)$  — множитель, образующий одномерное представление подгруппы  $H$ . Эта формула показывает, что здесь речь идет о классе функций, удобно факторизующихся на произведение двух множителей, первый из которых зависит от элементов подгруппы, а второй — от элементов факторпространства.

Запишем основную формулу, генерирующую операторы индуцированных представлений. Ради определенности рассмотрим, например, операторы правого сдвига. Зафиксируем аргумент  $g$  исходных функций  $F(g)$ , т.е. элемент факторпространства  $G/H$  и согласно (5.6) в пространстве этих функций зададим оператор  $T_R(g)$ . Далее аргумент  $g'g$  функции  $F(g'g)$  представим в виде

$$g'g = h_g g'_g, \quad (5.9)$$

где индекс  $g$  букв  $h$  и  $g$  означает, что каждому элементу  $g$  (при фиксировании  $g$ ) соответствуют определенные элементы  $h_g$  и  $g'_g$ ; примеры такого соответствия будут даны несколько ниже. Теперь формула (5.6), с учетом условия (5.8), приобретает вид

$$T_R(g) F(g) = \alpha(h_g) F(g'_g). \quad (5.10)$$

Это и есть основная формула, определяющая операторы представления  $T_R(\mathfrak{g})$ . При удачном выборе подгруппы  $H$  можно найти явный вид множителя  $\alpha(h_g)$ , а в нем, как мы скоро увидим, содержится большая информация о запасе непроводимых представлений группы  $\mathfrak{g}$ .

4. Типичный пример применения формулы (5.10) известен из теории общей линейной группы  $GL(\tau, \mathbb{C})$ . Элементы этой группы задаются  $\tau$ -мерными, матричные элементы которых являются произвольными комплексными числами, на которые наложено лишь условие существования обратной матрицы, что эквивалентно требованию, чтобы определитель этих матриц не был равен нулю. При изучении такой группы, как правило, ограничиваются матрицами, определитель которых равен единице, поэтому вместо  $GL(\tau, \mathbb{C})$  обычно рассматривается несколько суженная группа специальных линейных преобразований  $SL(\tau, \mathbb{C})$ , реализуемая комплексными  $\tau$ -мерными матрицами с определителем равным единице. Такое сужение оправдывается тем, что при переходе от  $SL(\tau, \mathbb{C})$  к  $GL(\tau, \mathbb{C})$  в алгебраическом смысле ничто существенное не теряется.

Удачный выбор подгруппы  $H$  обеспечивается разложением  $SL(\tau, \mathbb{C})$  через произведение двух матриц ступенчато-треугольного вида. Эти матрицы конструируют-

ся следующим образом. Пусть  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{g}$  — элементы группы, подгруппы и фактор-пространства, заданные с помощью соответствующих  $\tau$ -мерных матриц, и

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{g}. \quad (5.11)$$

Разобьем число  $\tau$  на  $k$  слагаемых  $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k = \tau$  зафиксируем это разбиение и разделим матрицы  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{g}$  на блоки, соответствующие этому разбиению. Матрицы такой структуры состоят из диагональных, а также нижних и верхних (по отношению к диагональным) блоков. Теперь легко объяснить структуру матриц  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{g}$ . В матрицах  $\mathfrak{H}$  заполнены все блоки за исключением нижних, в которых везде находятся нули. Эти матрицы и задают "удобную" подгруппу  $\mathfrak{H}$ . В матрицах  $\mathfrak{g}$  заполнены все нижние блоки, в диагональных ее блоках находятся единичные матрицы, а в верхних блоках — везде нули. Эти матрицы задают фактор-пространство  $\mathfrak{g}$ . в матрицах  $\mathfrak{G}$  разумеется, заполнены все блоки.

Приведем простой пример. Пусть имеем разбиение  $4 + 3 + 2$  числа  $\tau = 9$ . Тогда матричное разложение (5.11) имеет следующую структуру



(5.12)

где заштрихованные блоки заполнены ненулевыми матричными элементами.

Каждое разбиение числа  $\tau$  задает свою подгруппу  $H$  и свое фактор-пространство  $\mathfrak{g}$ . Основное утверждение теории индуцированных представлений специальной линейной группы  $SL(\tau, \mathbb{C})$  гласит, что при отыскании ее неприводимых операторов в качестве аргументов функции  $F$  необходимо взять все  $\mathfrak{g}$ , построенные вышеописанные способы. Фактор-пространство  $\mathfrak{g}$  задается максимальным числом параметров,  $-\frac{1}{2}\tau(\tau-1)$  параметрами, для разбиения  $1+1+\dots+1=\tau$ ; в этом случае ступенчато-треугольные матрицы вырождаются в просто треугольные матрицы. С другой стороны, если не говорить о тривиальном разбиении  $\tau=\tau$ , ведущем к единичному представлению  $T(\mathfrak{g}) \rightarrow 1$ , то фактор-пространство  $\mathfrak{g}$  задается минимальным числом параметров  $-\tau-1$  параметрами, для разбиения  $(\tau-1)+1=\tau$ ; этот случай соответствует так называемой максимально вырожденной серии представле-

ний.

5. Возвратимся к формуле (5.10). В случае только что описанного фактор-пространства ступенчато-треугольных матриц группы  $SL(\tau, \mathbb{C})$ , теория индуцированных представлений позволяет найти явный вид множителей  $\alpha(h_g)$ . При этом доказывается (подробности см. [9]), что  $\alpha$  зависит лишь от определителей диагональных ящиков матриц  $h_g$  и имеет следующий простой вид

$$\alpha(h_g) = \prod_{i=1}^k \left[ \text{Det}(h_g)^{(i)} \right]^{\vartheta_i} \quad (5.13)$$

где  $(h_g)^{(i)}$  - матрица  $i$ -того диагонального ящика, а  $\vartheta_i$  - наборы комплексных чисел, характеризующих неприводимые представления группы  $SL(\tau, \mathbb{C})$ .

В зависимости от разбиения числа  $\tau$  и наборов  $\vartheta_i$ , формулы (5.10) и (5.13) позволяют на определенном классе функций генерировать неприводимые операторы группы  $SL(\tau, \mathbb{C})$  и дать их естественную классификацию на основные и дополнительные серии, на унитарные и не унитарные представления, на конечномерные и бесконечномерные представления и т.п.

Возьмем простейший пример группы  $SL(\tau, \mathbb{C})$  с  $\tau = 2$ . В этом случае имеется лишь одно нетривиальное разбиение  $1+1=2$ , и фактор-пространство  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  задается треугольной матрицей

(5.14)

$$g = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline z & 1 \\ \hline \end{array},$$

где комплексное число  $z$  - аргумент функции  $F$ . Запишем общий элемент этой группы в виде

$$g = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array}, \quad (5.15)$$

где  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ . Чтобы найти аргументы  $h_g$  и  $g_g$ , необходимо, согласно (5.9), осуществить треугольное разложение матрицы  $gg$ . Легко проверить, что

$$\begin{aligned}
 gg &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline z & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{11}z + a_{21} & a_{12}z + a_{22} \\ \hline \end{array} = \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{a_{12}z + a_{22}} & a_{12} \\ \hline 0 & a_{12}z + a_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \frac{a_{11}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{22}} & 1 \\ \hline \end{array}, \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

поэтому

$$h_g = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{a_{12}z + a_{22}} & a_{12} \\ \hline 0 & a_{12}z + a_{22} \\ \hline \end{array} \quad (5.17)$$

и

$$g_g = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \frac{a_{11}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{22}} & 1 \\ \hline \end{array} \quad (5.18)$$

Доказывается (см. напр. [9]), что в случае  $\tau = 2$  множитель (5.13) имеет следующий вид

$$\alpha(h_g) = |a_{12}z + a_{22}|^{m+i\delta-2} (a_{12}z + a_{22})^{-m} \quad (5.19)$$

где  $m$  - целое, а  $\delta$  - произвольное вещественное число. Учитывая (5.18) и (5.19), формулу (5.10) можно теперь записать в окончательном виде

(5.20)

$$T_R(g)F(z) = |a_{12}z + a_{22}|^{m+i\delta-2} (a_{12}z + a_{22})^{-m} F\left(\frac{a_{11}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{22}}\right).$$

В качестве второго примера возьмем серию максимального вырожденных представлений, соответствующую разбиению  $(\tau-1) + 1 = \tau$ . В этом случае структура разложения (5.11) такова:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline g_{11} \dots g_{1\tau-1} & g_{1\tau} \\ \hline \dots & \dots \\ \hline g_{\tau-11} \dots g_{\tau-1\tau-1} & g_{\tau-1\tau} \\ \hline g_{\tau 1} \dots g_{\tau\tau-1} & g_{\tau\tau} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline h_{11} \dots h_{1\tau-1} & h_{1\tau} \\ \hline \dots & \dots \\ \hline h_{\tau-11} \dots h_{\tau-1\tau-1} & h_{\tau-1\tau} \\ \hline 0 \dots 0 & h_{\tau\tau} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 \dots 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots \\ \hline 0 \dots 1 & 0 \\ \hline g_{\tau 1} \dots g_{\tau\tau-1} & \\ \hline \end{array}$$

(5.21)

Согласно общей формуле (5.10) возьмем функции  $F$ , зависящие от матричных элементов матрицы

$$g = \begin{array}{|cccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \hline z_{z1} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{z z-1} & 1 \end{array} \quad (5.22)$$

далее справа умножим (5.22) на общий элемент  $g$  и осуществим разложение (5.9). Легко проверить, что

$$h_g = \begin{array}{|cccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \hline z'_{z1} & \cdot & \cdot & \cdot & z'_{z z-1} & 1 \end{array} \quad (5.23)$$

где

$$T_R(g) |z_{z1} \dots z_{z z-1} 1| = |z'_{z1} \dots z'_{z z-1} 1| =$$

$$= |z_{z1} \dots z_{z z-1} 1| \begin{array}{|cccc} g_{11} & \cdot & \cdot & g_{1z} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{z-1} & \cdot & \cdot & g_{zz} \end{array} \quad (5.24)$$

Теперь нам уже известен аргумент функций  $F(gg)$ , и чтобы выписать формулу (5.10), необходимо лишь знать выражение множителя  $\alpha$ . Как и раньше, не будем его

выводить, а воспользуемся готовым его видом. Доказывается, что в случае представлений максимального вырожденной серии группы  $SL(\tau, c)$ , он имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}(h_g) = |z'_{zz}|^{m+i\delta-\tau} (z'_{zz})^{-m}, \quad (5.25)$$

где, как и в (5.19),  $m$  — целое, а  $\delta$  — произвольное вещественное число; (5.25) обобщает (5.19), но это обобщение не является единственным. Учитывая (5.23) и (5.25)

окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} T_R(g) F(z_{z1}, \dots, z_{z\tau-1}) &= \quad (5.26) \\ &= |z'_{zz}|^{m+i\delta-\tau} (z'_{zz})^{-m} F\left(\frac{z'_{z1}}{z'_{zz}}, \dots, \frac{z'_{z\tau-1}}{z'_{zz}}\right). \end{aligned}$$

Мы специально записали эту формулу в сокращенных обозначениях (5.24), чтобы нагляднее была видна ее структура.

6. Читатель наверняка уже заметил сходство между переменными (5.22), используемыми при построении операторов максимально вырожденных представлений и формулой (4.1) перехода к новым переменным ядра. В обоих случаях речь идет о переменных, задаваемых с помощью матричных элементов последней строки матрицы, определяющей факторпространство  $\mathcal{Q}$ , причем, из-за необходимости рассматривать перестановки как внутреннюю операцию непрерывной группы, (как это было при переходе от группы  $O_\tau^+$  к группе  $O_\tau$ ) группу  $SL(\tau, c)$  необходимо расширить, скажем, до группы  $\mathcal{G}L(\tau, c)$ .



По постановке задачи и по общей идеологии эти два подхода действительно близки друг к другу, но в техническом отношении они различаются рядом существенных деталей. Главное, что использование некомпактной группы  $GL(z, c)$  с  $z = 3(n-1)$  открывают возможности пользоваться аналитическим аппаратом теории функций комплексных переменных, что достигается заменой переменных  $\rho_i^S$  новыми "объектами" преобразования  $Z_i^S$ ; вместо того, чтобы говорить о комплексных переменных  $Z_i^S$ , здесь нарочно говорим об "объектах" преобразования, так как  $Z_i^S$  могут иметь и иной смысл, например смысл операторов рождения и уничтожения. Примеры "объектов" преобразования будут приведены в последнем разделе настоящих лекций.

При использовании общей линейной группы  $GL(3(n-1), c)$  нет необходимости избавляться от "некомпактных" переменных путем введения глобального радиуса  $\rho$ ; все выкладки можно осуществить, пользуясь свойствами пространств конечномерных представлений группы  $GL(3(n-1), c)$  и только в окончательных результатах перейти к ее вещественным формам. В частности, переходя на некомпактную подгруппу  $GL(3, c) \times GL(n-1, c)$  таким образом можно выяснить алгебраический смысл и трех коллективных переменных (4.25).

Фактор-пространство ступенчатых треугольных матриц содержит большой запас переменных, начиная с  $\frac{1}{2} z(z-1)$  комплексных величин для треугольных и кончая  $z-1$  величиной для максимально вырожденных матриц. Мы только что выяснили, что ядерной задаче многих тел соответствует максимально вырожденная серия. Причиной этого, очевидно, является закон сохранения сорта и числа частиц: из-за постоянства числа нуклонов либо протонов и нейтронов, (мы не рассматриваем процессов их превращения), в задаче с самого начала фиксируется координатизация волновой функции ядра, и по этой причине не возникает необходимость использовать весь запас переменных фактор-пространства треугольных матриц.

В заключении раздела приведем формулы преобразования строк и столбцов матричных элементов  $M_{i'i}(g_0)$  матрицы представления произвольной группы  $G$ . Согласно (5.5) для оператора левого сдвига имеем:

$$\begin{aligned} T_L(g) M_{i'i}(g_0) &= M_{i'i}(g^{-1} g_0) = \\ &= \sum_{i''} M_{i'i''}(g^{-1}) M_{i''i}(g_0). \end{aligned}$$

(5.27)

В том случае, когда  $M$  - унитарная матрица, последняя

формула дает:

$$T_L(g) \mathcal{M}_{i'i}(g_0) = \sum_{i''} \mathcal{M}_{i''i}(g_0) \mathcal{M}_{i''i'}^*(g). \quad (5.28)$$

Оператор правого сдвига, как это видно из (5.6), преобразует столбцы матрицы  $\mathcal{M}$  :

$$\begin{aligned} T_R(g) \mathcal{M}_{i'i}(g_0) &= \mathcal{M}_{i'i}(g_0 g) = \\ &= \sum_{i''} \mathcal{M}_{i'i''}(g_0) \mathcal{M}_{i''i}(g). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Сравнение последних двух формул показывает, что в случае вещественных ортогональных матриц левый и правый сдвиги одинаковым образом преобразуют соответственно строки и столбцы матрицы  $\mathcal{M}$  .

## 6. Общий метод проецирования коллективных и внутренних волновых функций ядра.

1. После краткого экскурса в общую теорию индуцированных представлений настало время возвратиться к основной формуле замены переменных (4.24). Рассмотрим сначала, как ведет себя  $\rho_i^S$  при правом сдвиге на произвольный элемент  $G_{03}^+$  группы  $O_3^+$ . Согласно общей формулы (5 (5.29) имеем:

$$T_R(G_{03}^+) \rho_i^S = \sum_{S'} \rho^{(S')} D_{S'S}^{(13)}(G_3^+ G_{03}^+) D_{S'i}^{(1n-1)}(g_{n-1}). \quad (6.1)$$

Пусть теперь  $G_{03}^+ = (G_3^+)^{-1}$ . Тогда

$$D_{S'S}^{(13)}(G_3^+ (G_3^+)^{-1}) = \delta(S'S), \quad (6.2)$$

и (6.1) дает

$$\rho_i^S \equiv T_R((G_3^+)^{-1}) \rho_i^S = \rho^{(S)} D_{Si}^{(1n-1)}(g_{n-1}). \quad (6.3)$$

Каков же смысл последней формулы? Пусть в трехмерном пространстве имеем исходную и собственную системы координат, и собственная система относительно исходной задается углами Эйлера  $G_3^+$ . Операторы  $T_R((G_3^+)^{-1})$  задают поворот от исходной к собственной системе, поэтому если  $\rho_i^S$  были переменные ядра, заданные в исходной системе, то  $\rho_i^S$  — это переменные в собственной системе координат. Чтобы лишний раз проверить это, сравним симметрические тензоры второго ранга

$$J^{SS'} = \sum_t \rho_t^S \rho_t^{S'} \quad (6.4)$$

и

$$\overset{\circ}{J}^{SS'} = \sum_i \overset{\circ}{\rho}_i^S \overset{\circ}{\rho}_i^{S'}, \quad (6.5)$$

компоненты которые составлены из переменных  $\overset{\circ}{\rho}_i^S$  и  $\overset{\circ}{\rho}_i^{S'}$ .

С помощью (4.24) получаем, что

$$\overset{\circ}{J}^{SS'} = \sum_{S_1} \rho^{(S_1)} \rho^{(S_2)} D_{S_1 S}(\mathcal{G}_3^+) D_{S_1 S'}(\mathcal{G}_3^+), \quad (6.6)$$

тогда как (6.3) дает

$$\overset{\circ}{J}^{SS'} = \rho^{(S)} \rho^{(S')} \delta(SS'). \quad (6.7)$$

Сравнение (6.6) и (6.7) показывает, что как это и должно быть, при переходе к собственной системе координат тензор (6.6) приводится к главным осям.

Только что описанный переход к главным осям тензора  $\overset{\circ}{J}$ , впервые сформулированный в [11], послужил отправным пунктом для вывода формулы (6.3), позволяющей осуществить замену переменных в собственной системе координат. В явном виде эта формула в случае фактор-пространства без отражений  $\mathcal{G}_{n-1}^+$  впервые была дана в работе [2], которая, как нами уже отмечалось в предисловии, послужила началом для дальнейших работ этого направления.

Пусть  $X_i$  - переменные в исходной, а  $\overset{\circ}{X}_i$  - переменные в собственной системе координат. Мы только что выяснили, что алгебраический смысл перехода от  $X_i$  к  $\overset{\circ}{X}_i$  означает поворот

$$\overset{\circ}{X}_i = T((\mathcal{G}/H)^{-1}) X_i, \quad (6.8)$$

где  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  - фактор-пространство, определяющее собственную систему координат.

В качестве примера, возьмем переменные (3.20) и перейдем к  $\dot{X}_i$  по фактор-пространству  $\mathcal{O}_\tau/\mathcal{O}_{\tau-1}$ . Действуя оператором  $T_R(q_{n-1}^{-1})$ , получаем:

$$\dot{X}_i = \rho \delta(i, \tau). \quad (6.9)$$

Эта формула показывает, что в собственной системе координат "выживает" лишь  $X_\tau$ , которая становится переменной радиального типа.

Легко осуществить такой переход для переменных (4.24) по отношению к фактор-пространству  $\mathcal{O}_{n-1}/\mathcal{O}_{n-4}$ , т.е. перейти к "главным осям" в  $n-1$ -мерном пространстве векторов Якоби. Как и раньше, легко получаем, что

$$\rho_i^S \equiv T_R(q_{n-1}^{-1}) \rho_i^S = \begin{cases} 0, & \text{при } i = 1, 2, \dots, n-4 \dots \\ \rho^{(i)} D_{i,S}^{(13)}(g_3^+), & \text{при } i = n-3, n-2, n-1, \end{cases} \quad (6.10)$$

где значениям  $i = n-3, n-2, n-1$ , как мы условились в п.3 четвертого раздела, соответствуют декартовые индексы  $X, Y, Z$ . Последнее выражение показывает, что при проецировании с помощью оператора  $T(q_{n-1}^{-1})$  часть переменных  $\rho_i^S$  становится равной нулю, тогда как остальные, а именно девять переменных, заменяются известными функциями, зависящими от коллективных переменных



ядра  $\xi$ .

2. Мы уже вплотную подошли к задаче выделения в волновой функции (2.2) коллективных и внутренних переменных ядра и сейчас увидим, что она решается почти тривиальным образом. Подействуем на функцию (2.2) единичным оператором  $T_R(q_{n-1}^{-1})T_R(q_{n-1})$  и развернем тождество

$$\begin{aligned} \Psi(\Gamma/\rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s; Q) &= \\ &= T_R(q_{n-1}^{-1})T_R(q_{n-1})\Psi(\Gamma/\rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s; Q). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Реализуя оператор  $T_R(q_{n-1})$  через матрицу  $B(q_{n-1})$  некоторого, вообще говоря, приводимого представления группы  $O_{n-1}$ , и используя обратный оператор для проецирования по формуле (6.10), получаем

$$\begin{aligned} \Psi(\Gamma/\rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s; Q) &= \\ &= \sum_{\Gamma'} \mathbb{N}_Q(\Gamma'|\xi) B_{\Gamma'\Gamma}(q_{n-1}), \end{aligned} \quad (6.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_Q(\Gamma'|\xi) &= \\ &= \Psi(\Gamma'|\rho_1^s=0, \dots, \rho_{n-4}^s=0, \rho_{n-3}^x = \rho^{(x)} D_{xx}^{(13)}, \dots, \rho_{n-1}^z = \rho^{(z)} D_{zz}^{(13)}; Q). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Входящие в (6.13) матричные элементы матрицы  $D^{(13)}$  зависят от углов Эйлера  $\xi_3^+$ . Последняя формула показывает, что набор коллективных функций получаем из набора исходных функций, заменяя в последних по (4.10) переменные  $\rho_i^s$  переменными  $\rho_i^{00s}$ . Теперь также стало понят-

но, что значит "хорошие" операторы, о которых шла речь в п.1 второго раздела – это операторы компактной и, следовательно, безусловно "хорошей" группы  $O_{n-1}$ . Пока еще не выяснено, что означает полнота набора функций (2.2), но скоро и на этот вопрос будет дан однозначный ответ.

Формула (6.12) еще неудовлетворительна в том отношении, что входящая в нее коллективная функция  $\mathcal{M}$  зависит от спиновых или спино-изоспиновых переменных ядра. Действительно, аппарат ортогональных групп, приспособленный для изучения пространственных переменных никак не затрагивает спиновых координат, поэтому в окончательной формуле (6.12) они и остались там, где были с самого начала, а именно – в исходной волновой функции. Поскольку мы изучаем пространственные степени свободы ядра, то исключить переменные  $Q$  можно лишь в самом начале при постановке задачи. Такая возможность существует благодаря предложенной Е.Вигнером в тридцатых годах супермультиплетной схеме [12].

3. Коротко напомним сущность супермультиплетной схемы. Пусть  $S_n$  – симметрическая группа, переставляющая пространственные переменные ядра, – такой смысл эта группа и имела в предыдущем изложении, а  $S'_n$  – симметрическая группа, переставляющая либо спиновые (для протонно-нейтронного ядра), либо спино-изоспиновые (для нуклонного ядра). Если пользуемся услугами этих групп,

то в наборе квантовых чисел волновых функций необходимо выявить их неприводимые характеристики – схемы Юнга  $\lambda$  и  $\lambda'$ .

Рассмотрим пространственную волновую функцию

$$\Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L M \\ \lambda \mu \end{matrix} \middle| \varphi_1^S, \dots, \varphi_{n-1}^S \right) \quad (6.14)$$

и спиновую (или спино-изоспиновую) функцию

$$\Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_S S M \\ \lambda' \mu' \end{matrix} \middle| a \right), \quad (6.15)$$

с более детализированными наборами квантовых чисел. В (6.14) и (6.15)  $\mu$  и  $\mu'$  – базисы представлений  $\lambda$  и  $\lambda'$ , а  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_S$  – остальные квантовые числа. Хорошо известно (см. напр. [8]) каков смысл набора  $\Gamma_S$  и как строится функция (6.15), однако, здесь нет необходимости более подробно останавливаться на ее свойствах, так как в дальнейшем речь пойдет лишь об орбитальных функциях (6.14). От набора их квантовых чисел

$\Gamma_0$  потребуем лишь полноты по отношению к разложению типа (5.7). В характеристиках волновых функций (6.14) и (6.15) неизбежно появились квантовые числа орбитального  $L$  и спинового  $S$  моментов и их проекций  $M$ ,  $M_S$ , так как лишь с их помощью можно обеспечить точный интеграл движения ядра – общий его момент  $\mathcal{J}$  и его проекцию  $M_{\mathcal{J}}$ .

Симметрические группы  $S_n$  и  $S'_n$  действуют в независимых друг от друга пространствах, поэтому полную ан-

тисимметрическую функцию ядра можно построить путем связываний с коэффициентами Клебша-Гордана симметрической группы представлений  $\lambda$  и  $\lambda'$  в результирующее антисимметрическое представление  $\alpha$ . Хорошо известно, что при таком связывании  $\lambda'$  и  $\mu'$  однозначно коррелированы с  $\lambda$  и  $\mu$ ; чтобы подчеркнуть это, вместо  $\lambda'\mu'$  будем писать  $\tilde{\lambda}\tilde{\mu}$ . С помощью коэффициента Клебша-Гордана группы  $O_3^+$  свяжем также и  $L$  и  $S$  в  $J$ , и в итоге получаем полную антисимметрическую волновую функцию супермультиплетной схемы:

$$\Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_0 & \Gamma_S \\ (\lambda & \tilde{\lambda}) \end{matrix} \alpha \right) \left( LS \right) J M J \Big| \rho_1^S, \dots, \rho_{n-1}^S; Q =$$

$$= \sum_{M M_S} \Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_0 & L & M \\ (\lambda & \mu) \end{matrix} \Big| \rho_1^S, \dots, \rho_{n-1}^S \right) \Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_S & S & M_S \\ (\tilde{\lambda} & \tilde{\mu}) \end{matrix} \Big| Q \right) C_{M M_S M_S}^{L S J} C_{\mu \tilde{\mu}}^{\lambda \tilde{\lambda} \alpha} \quad (6.16)$$

В (6.16) нарочно пишется коэффициенты Клебша-Гордана симметрической группы вместо обычно используемого множителя  $(d_\lambda)^{-1/2}$ , где  $d_\lambda$  - размерность  $S_n$  - неприводимого представления  $\lambda$ ; такая запись оставляет свободу в выборе этих коэффициентов, что иногда может оказаться существенным.

4. Сравнительно малой ценой - путем введения приближенных интегралов движения  $\lambda L \Gamma_S S$  - нам удалось избавиться от переменных  $Q$  и перенести задачу выделения коллективных переменных на пространственную функцию (6.14). Техника проецирования из нее коллективных и внутренних функций ничем не отличается от техники, использо-

ванной при выводе формул п.2 настоящего раздела, поэтому сразу выпишем окончательные выражения. Функцию

(6.14) можно разложить в виде

$$\Psi\left(\begin{matrix} \Gamma_0 L M \\ \lambda \mu \end{matrix} \middle| \varrho_1^S, \dots, \varrho_{n-1}^S\right) = \sum_{\Lambda_0} \Theta(\Lambda_0 L M | \xi) B_{\Lambda_0, \Gamma_0 \lambda \mu}(\varrho_{n-1}), \quad (6.17)$$

где  $B$  имеет тот же смысл, что и в (6.12), а

$$\Theta(\Lambda_0 L M | \xi) = \Psi\left(\Lambda_0 L M \middle| \varrho_1^S = 0, \dots, \varrho_{n-4}^S = 0, \varrho_{n-3}^x = \rho^{(x)} D_{xx}^{(13)}, \dots, \varrho_{n-1}^z = \rho^{(z)} D_{zz}^{(13)}\right). \quad (6.18)$$

Особо обратим внимание на индекс суммирования в (6.17), где он обозначен новой буквой, чтобы подчеркнуть, что нумерация строк матрицы  $B$  может быть задана набором квантовых чисел  $\Lambda_0$ , не имеющих ничего общего с набором  $\Gamma_0 \lambda \mu$ . Согласно (5.27) и (5.29) строки и столбцы матрицы  $B$  преобразуются независимо, поэтому нет необходимости коррелировать между собою и их обозначения. Схему Юнга  $\lambda$  достаточно иметь в характеристике столбцов матрицы  $B$ , чтобы с помощью (6.16) строить антисимметрическую волновую функцию, поэтому матричные элементы  $B_{\Lambda_0, \Gamma_0 \lambda \mu}$  можно назвать внутренними пространственными волновыми функциями ядра.

Наличие в (6.18) приближенных интегралов движения  $L$

и  $M$  позволяет выделить зависимость этой функции от углов Эйлера. Как и при выводе (6.12), это осуществим, развертывая тождество, получаемое действием на (6.18) тождественным оператором  $T_R((G_3^+)^{-1}) T_R(G_3^+)$ . Учитывая еще, что

$$T_R((G_3^+)^{-1}) \rho_{i^s}^{00} = \rho^{(s)} \delta^{(si)}, \quad (6.19)$$

как и раньше легко получаем

$$\mathbb{H}(\Lambda_0 L M | \xi) = \sum \mathbb{H}(\Lambda_0 L K | \rho^{(s)}) D_{KM}^L(G_3^+), \quad (6.20)$$

где  $\mathbb{H}(\Lambda_0 L K | \rho^{(s)}) =$   
 $= \Psi(\Lambda_0 L K | \rho_1^s = 0, \dots, \rho_{n-4}^s = 0, \rho_{n-3}^x = \rho^{(x)}, \rho_{n-3}^y = 0, \dots, \rho_{n-1}^y = 0, \rho_{n-1}^z = \rho^{(z)}).$  (6.21)

В (6.10)  $D^L$  — матрицы  $O_3^+$  — неприводимых представлений, а  $K$  — проекция орбитального момента ядра на внутреннюю ось  $Z$ . Формулы типа (6.20) обычно используются в феноменологических коллективных моделях ядра при разложении коллективной функции по матричным элементам матрицы  $D^L$ .

Выражения (6.12), (6.13) в общем случае и выражения (6.17), (6.20), (6.21) в случае супермультиплетной схемы дают общее решение поставленной в п.1 второго раздела задачи выделения коллективных и внутренних функций ядра. Действительно, по полному набору функций (6.14) коллективные функции определяем с помощью (6.20) и (6.21).



В свою очередь, при известных  $\mathbb{H}$ , в принципе можно найти и матрицу  $B$ : умножая (6.17) на  $\mathbb{H}^*$  и интегрируя по  $\xi$  получаем систему алгебраических уравнений для определения матричных элементов матрицы  $B$ :

$$\int d\xi \mathbb{H}^*(\Lambda'_0 L M | \xi) \Psi(\Gamma_0 L M | \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s) =$$

$$= \sum_{\Lambda_0} C_{\Lambda'_0, \Lambda_0} B_{\Lambda_0 \Gamma_0 \Lambda \mu} (q_{n-1}), \quad (6.22)$$

где входящие числа  $C_{\Lambda'_0, \Lambda_0}$  вычисляются по формуле

$$C_{\Lambda'_0, \Lambda_0} = \int d\xi \mathbb{H}^*(\Lambda'_0 L M | \xi) \mathbb{H}(\Lambda_0 L M | \xi). \quad (6.23)$$

Этим и исчерпывается задача определения функций  $\mathbb{H}$  и  $B$ .

5. Чтобы лучше понять результаты предыдущего пункта и попутно выяснить некоторые особенности коллективных функций (6.21), рассмотрим простой пример. Возьмем функции двухмерного изотропного гармонического осциллятора в декартовой системе координат

$$\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2 | x_1, x_2) \Psi_{\varepsilon_1}(x_1) \Psi_{\varepsilon_2}(x_2), \quad (6.24)$$

где

$$\Psi_{\varepsilon}(x) = (\sqrt{\pi} 2^{\varepsilon} \varepsilon!)^{-1/2} H_{\varepsilon}(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad (6.25)$$

а  $H_{\varepsilon}(x)$  — полиномы Эрмита. С помощью (6.9) при  $z=2$  перейдем к собственной системе координат и развернем тождество типа (6.11). Тогда

$$\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2 | x_1, x_2) = \sum_{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2} \mathbb{H}(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2 | \rho) B_{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(q), \quad (6.26)$$

где  $q = \mathcal{V}_{12}^{(2)} \rho_2$ , а коллективная функция  $\mathbb{H}$  имеет такой вид:

$$\mathbb{H}(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2 | \rho) = \Psi_{\varepsilon'_1}(0) \Psi_{\varepsilon'_2}(\rho). \quad (6.27)$$

Но известно, что

$$\textcircled{H}(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2 | \varrho) = \Psi_{\varepsilon'_1}(0) \Psi_{\varepsilon'_2}(\varrho).$$

$$H_{\varepsilon}(0) = \frac{1+(-1)^{\varepsilon}}{2} (-1)^{\varepsilon/2} \frac{\varepsilon!}{(\varepsilon/2)!}, \quad (6.28)$$

поэтому  $\textcircled{H}$  не исчезает лишь для четных  $\varepsilon'_1$ . Запишем уравнение (6.22) для определения матричных элементов матрицы  $B$ :

$$\int_0^{\infty} \varrho d\varrho \Psi_{\varepsilon'_1}(0) \Psi_{\varepsilon'_2}(\varrho) \Psi_{\varepsilon_1}(-\varrho \sin \vartheta_{12}^{(2)}) \Psi_{\varepsilon_2}((-1)^{\varepsilon_2} \varrho \cos \vartheta_{12}^{(2)}) =$$

$$= \sum_{\varepsilon''_1, \varepsilon''_2} C_{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2} B_{\varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2} (\vartheta_{12}^{(2)}, \varepsilon_2), \quad (6.29)$$

где замена переменных осуществлена с помощью (2.19).

Коэффициенты  $C$  находим, вычисляя интеграл

$$C_{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2} = \Psi_{\varepsilon'_1}(0) \Psi_{\varepsilon''_1}(0) \int_0^{\infty} \varrho d\varrho \Psi_{\varepsilon'_2}(\varrho) \Psi_{\varepsilon''_2}(\varrho). \quad (6.30)$$

Первое, на что необходимо обратить внимание в этом примере, — это появление правил отбора по квантовому числу  $\varepsilon'_1$ , вытекающих из свойств полиномов Эрмита в нуле. Это, разумеется, общее свойство коллективной функции (6.21), поэтому заключаем, что набор квантовых чисел  $\Lambda_0$  в разложении (6.17) меньше набора  $\Gamma_0 \bar{\Gamma}_\mu$  и, следовательно, вообще говоря, матрица  $B$  неквадратична.

Второе — это отсутствие свойства ортогональности коллективных функций ядра, — что видно в нашем примере из интеграла перекрытия (6.30). Отсутствие ортогональности ведет к системе алгебраических уравнений (6.22), ре-

шение которой – матричные элементы матрицы  $B$ , являются сложными и трудно обозримыми функциями внутренних переменных ядра. Поэтому, хотя результаты настоящего раздела в принципе и дают возможность выделить коллективную и внутреннюю функцию ядра, практическое осуществление этого в случае произвольной исходной супермультиплетной функции  $\Psi$  может оказаться очень трудной задачей.

Отсутствие возможности сформулировать свойство ортогональности в отдельности для функций  $\mathbb{H}$  и  $B$  также оставляет чувство неудовлетворенности и показывает, что только что изложенная общая методика проецирования требует дальнейшего ее развития. Этим мы и займемся в следующих двух разделах настоящих лекций.

## 7. Кинематически простейшие внутренние волновые функции ядра

1. Если еще раз мысленно проследим весь пройденный путь, то увидимся, что результаты п.4 предыдущего раздела получены, опираясь лишь на два сформулированные в первом разделе требования кинематической корректности и, кроме того, на предложение о супермультиплетной структуре волновой функции ядра. Все возможности, заложенные в условиях I и II, теперь уже исчерпаны и, если хотим продвинуться дальше, необходимо сформулировать новое требование, открывающее путь для дальнейшей детализации формул (6.17) и (6.21).

Существует необозримое множество супермультиплетных функций (6.14), удовлетворяющих требованию кинематической корректности. В их числе есть и собственные функции той части полного гамильтониана ядра, которая не зависит от спиновых и изоспиновых переменных. До тех пор, пока не изучаются решения соответствующего уравнения Шредингера, — а в случае  $\Pi$  — частичного ядра никто этого не умеет делать, — во множестве функций (6.14) разумно отыскать простейшие из них. При этом задача будет корректно сформулирована лишь тогда, когда будет указан критерий простоты. Алгебраический аппарат позволяет легко это сделать, так как в теории представлений групп синонимом простоты является понятие неприводимости. Действительно,

является понятие неприводимости. Действительно, по определению неприводимая величина (пространство, матрица, оператор) — это самая простая величина, не поддающаяся дальнейшему "раздроблению". Поэтому неприводимость является необходимым и достаточным кинематическим критерием для отбора простейших из класса функций (6.14).

Необходимо сразу оговориться, что требование кинематической простоты в очень большой степени сужает класс гамильтонианов, собственные функции которых удовлетворяют этому критерию. В наших лекциях сужение класса рассматриваемых гамильтонианов мы производим вторично: с самого начала речь шла о функциях произвольного, в том числе и точного гамильтониана ядра, а начиная с п.3 предыдущего раздела рассматривались лишь функции гамильтониана, не зависящего от спиновых и изоспиновых переменных. Теперь этот класс гамильтонианов сужается еще раз. Пока рано говорить какой именно тип гамильтонианов попадает под категорию кинематически простейших, но несомненно, что они наверняка будут сильно отличаться от реалистического гамильтониана ядра.

Условимся называть супермультиплетные функции, удовлетворяющие требованиям I, II и только что сформулированному критерию кинематической простоты, простейшими кинематическими волновыми функциями и приступим к дальней-

шей детализации результатов п.4 предыдущего раздела.

Критерий кинематической простоты может быть применен по отношению к преобразованиям любой группы. Вид формулы (6.17) подсказывает, что в первую очередь его необходимо применить к преобразованиям группы  $O_{n-1}$ . Действительно, входящая в (6.17) матрица  $B$  дает матричную реализацию оператора представления группы  $O_{n-1}$ , - в этом можно сразу убедиться, если применить к функции (6.17) формулу (5.27) или (5.29). Потребуем, чтобы это представление было наиболее простым, т.е. неприводимым, а это возможно лишь тогда, когда набор квантовых чисел  $\Gamma_0$  содержит характеристику неприводимых представлений  $\omega$  ортогональной группы  $O_{n-1}$ . Симметрическая группа  $S_n$  вложена в группу  $O_{n-1}$  по цепочке (4.5), и для характеристики полного базиса этой цепочки может понадобиться индекс  $\alpha$ , различающий одинаковые  $S_n$  - неприводимые представления  $\lambda$ , содержащиеся в  $O_{n-1}$  - неприводимом представлении  $\omega$ . Поэтому критерий кинематической простоты, примененный по отношению к группе  $O_{n-1}$ , означает, что в (6.17)  $\Gamma_0$  следует заменить новым набором  $\Gamma_0 \omega \alpha$ , где  $\Gamma_0$  опять будет обозначать произвольный набор остальных квантовых чисел. Набор  $\Lambda_0$  также заменим через  $\Lambda_0 \omega' \nu^0$ , где  $\nu^0$  - базис  $O_{n-1}$  - неприводимого представления  $\omega$ , а  $\Lambda_0$  - опять обозначает произвольный набор остальных квантовых чисел. Но теперь по смыслу неприводимого представления



Но теперь по смыслу неприводимого представления

$$B_{\Lambda_0 \omega \nu^0, \Gamma_0 \omega \alpha \lambda \mu}(q_{n-1}) = \delta(\Lambda_0 \Gamma_0) \delta(\omega' \omega) D_{\nu^0, \alpha \lambda \mu}^{\omega}(q_{n-1}) \quad (7.1)$$

и вместо формулы (6.17) имеем:

$$\psi \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L M \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s \right) = (d_{\omega})^{-1/2} \sum_{\nu^0} \mathbb{H} \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L M \\ \nu^0 \end{matrix} \middle| \xi \right) \Phi(\nu^0 \omega \alpha \lambda \mu | q_{n-1}), \quad (7.2)$$

где  $d_{\omega}$  — размерность представления  $\omega$ . В (7.2)

введено обозначение

$$\Phi(\nu^0 \omega \alpha \lambda \mu | q_{n-1}) = (d_{\omega})^{1/2} D_{\nu^0, \alpha \lambda \mu}^{\omega}(q_{n-1}). \quad (7.3)$$

Формулы (6.20) и (6.21) модифицируются лишь незначительно — в них  $\Lambda_0$  необходимо заменить через  $\Gamma_0 \omega \nu^0$ :

$$\mathbb{H} \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L M \\ \omega \nu^0 \end{matrix} \middle| \xi \right) = \sum_K \mathbb{H} \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L K \\ \omega \nu^0 \end{matrix} \middle| \rho^{(s)} \right) D_{KM}^L(q_3^+), \quad (7.4)$$

где

$$\mathbb{H} \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L K \\ \omega \nu^0 \end{matrix} \middle| \rho^{(s)} \right) =$$

$$\psi \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L K \\ \omega \nu^0 \end{matrix} \middle| \rho_1^s = 0, \dots, \rho_{n-4}^s = 0, \rho_{n-3}^x = \rho^{(x)}, \rho_{n-3}^y = 0, \dots, \rho_{n-1}^y = 0, \rho_{n-1}^z = \rho^{(z)} \right). \quad (7.5)$$

Сравнение (7.2) с (6.17) показывает, какой огромный шаг в сторону конкретизации удалось сделать благодаря критерию простоты: вместо неопределенных внутренних функций ядра  $B$  теперь появились хорошо определенные функции (7.3), зависящие от основного массива, а именно

3(n-3) переменных ядра. Эти функции характеризуются физическим набором квантовых чисел  $\alpha\lambda\mu$ , нумерирующих столбцы матрицы  $D^\omega$  и пока неопределенным набором  $\nu^0$ , о котором лишь известно, что он задает базис  $O_{n-1}$  - неприводимого представления  $\omega$ . В (7.2) полностью определенным остается набор квантовых чисел  $\Gamma_0$ , характеризующий коллективную функцию ядра; к этой функции пока не применялся критерий кинематической простоты.

2. Сейчас появилась возможность доказать одно важное свойство внутренних волновых функций (7.2), позволяющее, в частности, многое сказать о смысле квантовых чисел  $\nu^0$ . Начнем с выяснения трансформационных свойств переменных (4.24) по отношению к преобразованиям группы  $O_{n-1}$ . Пусть  $g_{n-1}$  - произвольный элемент этой группы. Тогда, действуя на (4.24) оператором левого сдвига  $T_L(g_{n-1})$ , получаем

$$T_L(g_{n-1})\rho_i^s = \sum_{s'} \rho^{(s')} D_{s's}^{(13)}(g_3^+) D_{s'i}^{(1_{n-1})}(g_{n-1}^{-1} q_{n-1}) = \quad (7.6)$$

$$= \sum_{s'} \rho^{(s')} D_{s's}^{(13)}(g_3^+) \sum_{i''} D_{s'i''}^{(1_{n-1})}(g_{n-1}^{-1}) D_{i''i}^{(1_{n-1})}(q_{n-1})$$

Возьмем теперь в (7.6) в качестве элемента группы  $O_{n-1}$  элементы  $g_{n-4}$  ее подгруппы  $O_{n-4}$  и обратим внимание, что в (7.6)  $s'$  обозначает лишь последние три строки матрицы  $D^{(1_{n-1})}$ . Эти строки очевидно, не зависят от  $g_{n-4}$ . В силу этой независимости в качестве  $g_{n-4}$  можно взять

единичный элемент, поэтому

$$D_{s'i''}^{(1_{n-1})}(g_{n-4}^{-1}) = D_{s'i''}^{(1_{n-1})}(e) = \delta(s'i''), \quad (7.7)$$

где  $e$  — единичный элемент группы  $O_{n-4}$ . Воспользовавшись (7.7), для (7.6) получаем, что

$$T_L(g_{n-4})\varphi_i^s = \varphi_i^s. \quad (7.8)$$

Это важное свойство переменных  $\varphi_i^s$  показывает, что они являются инвариантами по отношению к левому сдвигу на произвольный элемент подгруппы  $O_{n-4}$ .

Подействуем теперь оператором  $T_L(g_{n-4})$  на функцию (7.2). С одной стороны, из-за (7.8), функция (7.2) является инвариантом этого оператора, а с другой стороны, его действие в матрице  $D^\omega$  заменяет  $q_{n-1}$  на  $g_{n-4}^{-1}q_{n-1}$ . Поэтому должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} D_{\nu_0^\omega, \alpha \lambda \mu}^\omega(q_{n-1}) &= D_{\nu_0^\omega, \alpha \lambda \mu}^\omega(g_{n-4}^{-1}q_{n-1}) = \\ &= \sum_{\nu_1^\omega} D_{\nu_0^\omega, \nu_1^\omega}^\omega(g_{n-4}^{-1}) D_{\nu_1^\omega, \alpha \lambda \mu}^\omega(q_{n-1}), \end{aligned} \quad (7.9)$$

а это возможно лишь в том случае, когда для всех  $g_{n-4}$

$$D_{\nu_0^\omega, \nu_1^\omega}^\omega(g_{n-4}^{-1}) = \delta(\nu_0^\omega \nu_1^\omega). \quad (7.10)$$

Что означает условие (7.10)? Чтобы выяснить его смысл, фиксируем базис  $\nu^\omega$  цепочкой

$$O_{n-1} \supset G^\omega \supset O_{n-4}, \quad (7.11)$$

где  $G^\omega$  — произвольная группа, которая "помещается" между группами  $O_{n-1}$  и  $O_{n-4}$ . Выбор цепочки (7.11)

означает, что базис  $\psi^0$  необходимо заменить новым базисом, скажем  $\psi^0 \omega_0 \psi_0$ , где  $\psi^0$  теперь уже означает характеристики группы  $\mathfrak{g}^0$ , а  $\omega_0$  и  $\psi_0 - O_{n-4}$  - неприводимое представление и его базис. В новом базисе матричные элементы (7.10) диагональны по  $\psi^0$  и  $\omega_0$  и не зависят от  $\psi^0$ , поэтому (7.10) приобретает такой вид:

$$D_{\psi_0, \psi_0'}^{\omega_0} (\mathfrak{g}_{n-4}^{-1}) = \delta(\psi_0 \psi_0'). \quad (7.12)$$

Условие (7.12) должно выполняться для всех элементов  $\mathfrak{g}_{n-4}$ , но это возможно лишь тогда, когда  $\omega_0$  является  $O_{n-4}$  - скалярным представлением.

Мы доказали, что базис цепочки (7.11) дает правила отбора в сумме (7.2); нечто похожее нам уже встречалось в примере, приведенном в п.5 предыдущего раздела, где в сумме (6.26) обнаружено правило отбора по квантовому числу  $\xi_1'$ . Теперь стало понятно, почему при обсуждении (6.17) было особенно подчеркнуто отличие в нумерации строк и столбцов матрицы  $\beta$ . Если возвратиться к более конкретной формуле (7.2), то станет ясным, что способ нумерации столбцов матрицы  $D$  с необходимостью задается принципом Паули, тогда как оптимальным базисом для строк этой матрицы служит базис цепочки (7.11). Поэтому в дальнейшем будем считать, что в (7.2) и (7.3)  $\psi^0$  обозначает базис лишь этой цепочки, причем верхний индекс ноль буквы  $\psi$  указывает на свойства  $O_{n-4}$  - скалярности

этого базиса.

В математической литературе изученные специальные функции, заданные на фактор-пространствах ортогональных групп ( см. напр. 7 ) являются очень простыми по сравнению с функциями (7.3). Поэтому были затрачены значительные усилия для подробного их изучения, вплоть до разработки рекуррентного метода построения ( подробности см. в 5, 6 и в указанной в них литературе ). В настоящее время свойства этих функций известны столь подробно, что разложение (7.2) можно применять для исследования конкретных ядер. Объем и предмет этих лекций, однако, не позволяет сколько-нибудь подробно изложить общую теорию внутренних волновых функций (7.3), поэтому ниже обсудим лишь простейшие избранные вопросы.

3. Начнем со свойств ортогональности и нормировки функций  $\mathbb{H}$  и  $\Phi$ . Исходя из глобальной теоремы компактных групп, ( см. напр. [10] ) опираясь на  $U_{n-4}$ -скалярность строк матрицы  $D^\omega$  и наличие группы отражения, можно доказать следующее свойство их ортогональности

[4, 5] :

$$\int dq_{n-1} \Phi^*(\nu^0 \omega' \alpha' \lambda' \mu' | q_{n-1}) \Phi(\nu^0 \omega \alpha \lambda \mu | q_{n-1}) = \delta(\nu^0 \nu^0) \delta(\omega' \omega) \delta(\alpha' \alpha) \delta(\lambda' \lambda) \delta(\mu' \mu). \quad (7.13)$$

Напомним, что знак интеграла в (7.13) одновременно обо-

значает и суммирование по элементам группы отражения. Если исходные функции (7.2) были нормированы и ортогональны по всем их характеристикам, то (7.13) и хорошо известное свойство ортогональности матричных элементов матрицы  $D^L$

$$d_L \int d\zeta_3^+ D_{K'M'}^{*L}(\zeta_3^+) D_{KM}^L(\zeta_3^+) = \delta(L'L) \delta(K'K) \delta(M'M) \quad (7.14)$$

позволяет доказать следующее свойство ортогональности коллективных функций ядра:

$$\frac{N(n)}{d_\omega d_L} \sum_{K\gamma^0} \int d\tau_\rho \mathbb{H} \left( \begin{matrix} \Gamma_0' L K \\ \omega \gamma^0 \end{matrix} \middle| \rho^{(s)} \right) \mathbb{H} \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L K \\ \omega \gamma^0 \end{matrix} \middle| \rho^{(s)} \right) = \delta(\Gamma_0' \Gamma_0). \quad (7.15)$$

Здесь  $d_L = 2L + 1$ , а  $N(n)$  — квадрат нормирующего множителя, появление которого связано с тем обстоятельством, что, как обычно, при замене переменных (4.24) новые переменные покрывают область изменения старых переменных лишь с точностью до многообразия меньшей размерности.

Элемент объема  $d\tau_\rho$  в (7.15) имеет такой вид:

$$d\tau_\rho = |(\rho^{(x)})^2 - (\rho^{(y)})^2| \rho^{(x)} \rho^{(y)} d\rho^{(x)} d\rho^{(y)}, \quad (7.16)$$

при  $n = 3$  и

$$d\tau_\rho = |(\rho^{(x)})^2 - (\rho^{(y)})^2| |(\rho^{(y)})^2 - (\rho^{(z)})^2| |(\rho^{(z)})^2 - (\rho^{(x)})^2| \times \\ \times (\rho^{(x)} \rho^{(y)} \rho^{(z)})^{n-4} d\rho^{(x)} d\rho^{(y)} d\rho^{(z)}, \quad (7.17)$$



при  $n > [2]$ . Следует обратить внимание, что в (7.16) и (7.17) переменные не разделяются, т.е.  $d\tau_\rho$  не может быть записан в виде произведения  $d\tau_\rho(x) d\tau_\rho(y) d\tau_\rho(z)$ .

Такой вид объема задает и определенный тип интегралов по переменным  $\rho(s)$ .

4. Интересно знать, как много членов содержится в разложении (7.2) – от числа слагаемых зависит, насколько связаны между собой внутреннее и коллективное движение нуклонов в ядре. В п.2 настоящего раздела уже было выяснено, что промежуточную группу  $\mathcal{G}^0$  можно выбрать по своему усмотрению. В математическом отношении наиболее проста группа  $\mathcal{G}^0 \rightarrow O_{n-2} \supset O_{n-3}$ , ведущая к канонической цепочке

$$O_{n-1} \supset O_{n-2} \supset O_{n-3} \supset O_{n-4}, \quad (7.18)$$

в случае которой вместо  $\mathcal{Y}^0$  удобно написать набор  $\bar{\omega} \bar{\bar{\omega}} \bar{\bar{\bar{\omega}}}$ , подразумевая, что  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\bar{\omega}}$  и  $\bar{\bar{\bar{\omega}}}$  – это неприводимые представления групп  $O_{n-2}$ ,  $O_{n-3}$  и  $O_{n-4}$  соответственно. Теперь, когда цепочка (7.11) полностью зафиксирована, появилась возможность найти число слагаемых в разложении (7.2). Напомним правила приведения на цепочке (7.18), приспособленные для нашей задачи. С этой целью сперва выясним класс  $O_{n-1}$  – неприводимых представлений, допускаемых фактор-пространством  $O_{n-1}/O_{n-4}$ . Мы уже знаем (см. п.6 пятого раздела), что из-за сохранения числа

и сорта частиц в ядерной задаче многих тел встречаются лишь неприводимые представления группы  $GL(3(n-1), C)$  максимально вырожденной серии. Спуститься до ортогональной группы  $O_{n-1}$  удобно по следующей цепочке подгруппы

$$GL(3(n-1), C) \supset U_{3(n-1)} \supset U_3 \times U_{n-1} \supset O_{n-1}, \quad (7.19)$$

где  $U$  — унитарные группы соответствующего ранга. Унитарные группы замечательны в том отношении, что они являются универсальными среди компактных групп. Известно (см. напр. [10]), что эти группы дают полный запас компактных групп, в том смысле, что любая компактная группа изоморфна некоторой подгруппе унитарных групп. Из-за этого свойства унитарных групп при переходе на первом звене цепочки (7.19) от  $GL(3(n-1), C)$  к  $U_{3(n-1)}$ , конечномерные представления общей линейной группы остаются неприводимыми. Отсюда вытекает, что их можно маркировать тем же способом, как и соответствующие им представления группы  $U_{3(n-1)}$ . Маркировка последних хорошо известна (см. напр. [8]) — они задаются одним неотрицательным целым числом  $[E]$ , где  $E = 0, 1, 2, \dots$ . При переходе к подгруппе  $U_3 \times U_{n-1}$  по цепочке

$$U_{3(n-1)} \supset U_3 \times U_{n-1} \quad (7.20)$$

это число всевозможными способами разбивается на три

целых неотрицательных слагаемых которые далее располагаются в неубывающем порядке. Такие всевозможные упорядоченные наборы трех чисел  $[E_1 E_2 E_3]$ , где  $E_1 \geq E_2 \geq E_3$  и  $E_1 + E_2 + E_3 = E$  одновременно характеризуют как  $U_3$  -, так и  $U_{n-1}$  - неприводимые представления. Возьмем например  $E = [4]$ . Тогда имеем пять возможных разбиений этого числа, - 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1, последнее из которых нам не подходит. Остальные разбиения  $[4]$ ,  $[31]$ ,  $[22]$ ,  $[211]$  перечисляют неприводимые представления как группы  $U_3$  так и группы  $U_{n-1}$ , содержащиеся в  $U_{3(n-1)}$  - неприводимом представлении  $[4]$ .

Нам важно, что  $U_{n-1}$  - неприводимые представления характеризуются не более чем тремя целыми числами. Как следствие этого, при приведении на цепочке

$$U_{n-1} \supset O_{n-1} \quad (7.21)$$

- подробности такого приведения можно найти в [8], - появляются  $O_{n-1}$  - неприводимые представления

$$\omega \equiv (\omega_1 \omega_2 \omega_3 0 \dots 0) \quad (7.22)$$

характеризуемые также не более чем тремя неотрицательными целыми числами, удовлетворяющими удовлетворяющими условию  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3$ .

Мы выяснили класс  $O_{n-1}$  - неприводимых представлений и можем приступить к формулировке правил, позволяющих определить число слагаемых в (7.2). Учитывая то об-

стоятельство, что в этом разложении содержатся лишь  $O_{n-4}$ -скаляры, хорошо известные правила приведения на канонической цепочке (7.18) ортогональных групп, приобретают следующий вид. При приведении на первом звене цепочки (7.18) - переходе от группы  $O_{n-1}$  к группе  $O_{n-2}$  - необходимо найти все числа  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$ , удовлетворяющие неравенствам

$$\omega_1 \geq \bar{\omega}_1 \geq \omega_2 \geq \bar{\omega}_2 \geq \omega_3. \quad (7.23)$$

Для приведения на втором звене - цепочке  $O_{n-2} \supset O_{n-3}$  для каждой пары  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  находим все числа  $\bar{\bar{\omega}}_1$ , удовлетворяющие неравенствам

$$\bar{\omega}_1 \geq \bar{\bar{\omega}}_1 \geq \bar{\omega}_2. \quad (7.24)$$

Пары чисел

$$\begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ & \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 \\ & & \bar{\bar{\omega}}_1 \end{array} \quad (7.25)$$

и задает как  $O_{n-1}$  - неприводимое представление  $\omega$  так и его базис  $\bar{\omega} \equiv (\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2)$  и  $\bar{\bar{\omega}} \equiv (\bar{\bar{\omega}}_1)$ .

Только что приведенные правила без всяких изменений справедливы при  $n-1 > 5$ . Для ортогональных групп  $O_{n-1}$  с  $n-1 \leq 5$  сигнатура (7.22) с помощью так называемых правил модификации (см. напр. [8] стр.139) должна быть соответствующим образом изменена. Однако это

чисто технический вопрос, не имеющий отношения к существу дела.

Нетрудно сосчитать число слагаемых разложения (7.2). Для начала найдем все  $O_{n-1}$  неприводимые представления (7.22), в случае которых в (7.2) содержится лишь одно слагаемое, причем чтобы обойтись без использования модификации будем считать, что  $n-1 > 5$ . С помощью (7.23) и (7.24) легко проверить, что одно слагаемое в (7.22) содержится лишь в случае представлений с сигнатурой.

$$\omega \equiv (\omega_1 \omega_1 \omega_1 0 \dots 0), \quad (7.26)$$

где  $\omega_1 = 0, 1, 2, \dots$ . Теперь осталось посмотреть, в каких случаях представления такого типа допускаются принципом Паули. На этот вопрос можно дать ответ, если воспользоваться достаточно сложной техникой внутреннего плетизма (см. напр. [8] стр.143). К счастью, подробное описание этой техники не является здесь необходимой, так как для ядер с  $n \leq 40$  существуют широкие таблицы [8,13], в которых перечислены или из которых легко найти допустимые  $O_{n-1}$  - представления  $\omega$ .

Не будем останавливаться на подробном анализе этих таблиц, но приведем лишь несколько цифр, показывающих, как часто в разложении (7.2) содержится лишь одно слагаемое. Во всех состояниях нормальной четности для ядер с  $5 \leq n \leq 16$  имеются 38  $O_{n-1}$  - неприводимых представ-

лений, в числе которых лишь четыре раза (для ядер с  $n = 7, 10, 13, 16$ ) встречаются представления типа (7.26). Во всех состояниях нормальной четности для ядер с  $17 \leq n \leq 40$  имеются около 6000 состояний с различными  $O_{n-1}$ - и  $S_n$ -неприводимыми характеристиками и между ними лишь в 34 случаях (для ядер с  $n = 16 + 3k$  где  $k = 1, 2, \dots, 8$ ) в (7.2) содержится одно слагаемое.

Таким образом, в подавляющем числе случаев даже для простейших кинематически корректных волновых функций в (7.2) имеется больше одного слагаемого, а это означает, что, по крайней мере, из-за кинематических причин в ядре внутреннее и коллективное движение нуклонов не разделяется.

Сколько же слагаемых имеется в сумме (7.2)? Для каждого конкретного случая это легко определить. Возьмем, например,  $O_{11}$  - неприводимое состояние (44) ядра  $C^{12}$ . С помощью (7.23) и (7.24) находим, что в этом случае базис (7.25) состоит из 15 компонент. Много ли это или мало? С одной стороны, достаточно много, чтобы сделать невозможным отделение коллективного и внутреннего движения нуклонов в ядре. Но, с другой стороны, очень мало по сравнению с размерностью  $d_{(44)}$  матрицы  $D^{(44)} O_{11}$  - неприводимого представления (44): подсчет размерности  $d_{(44)}$  дает, что  $d_{(44)} = 112200$ . Поэтому лишь благо -



даря доказанной в п.2 настоящего раздела  $O_{n-4}$  - скалярности в этой необозримой сумме остается лишь 15 слагаемых.

5. При желании в (7.2) можно пользоваться другой промежуточной группой  $G^0$  и, скажем, вместо (7.11) взять базис цепочки

$$O_{n-1} \supset O_3 + O_{n-4}, \quad (7.27)$$

где  $O_3$  - группа вращения абстрактного пространства векторов Якоби, натянутого на вектора  $\vec{\rho}_{n-3}, \vec{\rho}_{n-2}$  и  $\vec{\rho}_{n-1}$ ; эту группу нельзя путать с группой вращения "нашего" трехмерного пространства. Для цепочки (7.27) набор  $\mathcal{V}_0$  удобно заменить набором  $\beta \mathcal{L} \mathcal{V}_1$ , где  $\beta$  - индекс повторения,  $\mathcal{L}$  - неприводимое представление группы  $O_3$ , которое можно назвать, например, квазиимпульсом [4], а  $\mathcal{V}_1$  - его базис. Квантовые числа цепочки (7.27) менее удобны в математическом отношении, но зато, может быть, более наглядны из-за появления квазиимпульса  $\mathcal{L}$ .

Как зафиксировать базис  $\mathcal{V}_1$ ? Существует несколько способов его выбора. Первый из них - это введение обычной проекции  $\mathcal{M}$ , задаваемой цепочкой  $O_3 \supset O_2$ . Но эта возможность не единственная. Базис  $\mathcal{V}_1$ , например, может быть задан с помощью цепочки  $O_3 \supset S_3 \supset S_2$ , подразумевая при этом, что группа  $S_3$  переставляет векторы  $\vec{\rho}_{n-3}, \vec{\rho}_{n-2}, \vec{\rho}_{n-1}$ , а группа  $S_2$  - векторы  $\vec{\rho}_{n-2}$  и  $\vec{\rho}_{n-1}$ . Такой ба-

зис позволяет сортировать коллективные и внутренние функции относительно их поведения на геометрическую перестановку трех осей трехмерного подпространства  $n-1$  мерного пространства векторов Якоби; симметрическая группа  $S_3$  вложена здесь в ортогональную группу  $O_3$  по цепочке (4.6), поэтому перестановки не имеют ничего общего с перестановкой одноуклонных векторов.

Имеется еще одна возможность выбора базиса  $\mathcal{Y}_1$  с помощью максимально плотного вложения симметрической группы  $S_4$  в ортогональную группу  $O_3$  по цепочке (4.5). Мы уже знаем (см. п.2 четвертого раздела), что в случае выбора такого базиса элементы группы  $S_4$ , переставляя переменные  $\vec{\tau}_{n-3}, \vec{\tau}_{n-2}, \vec{\tau}_{n-1}$  и  $\vec{\tau}_n$ , индуцируют преобразование векторов Якоби  $\vec{\rho}_{n-3}, \vec{\rho}_{n-2}, \vec{\rho}_{n-1}$ . Далее базис  $S_4$  неприводимого представления фиксируется цепочкой  $S_3 \supset S_2$ , причем  $S_3$  и  $S_2$  соответственно переставляют вектора  $\vec{\tau}_{n-2}, \vec{\tau}_{n-1}, \vec{\tau}_n$  и  $\vec{\tau}_{n-1}, \vec{\tau}_n$ .

Здесь специально подробно описаны различные возможности выбора базиса цепочки (7.11), так как будучи эквивалентными в формуле (7.2), они могут быть различными при искусственном обрывании этого ряда. Может оказаться, что квантовые числа одного из этих наборов иногда являются "хорошими" приближенными квантовыми числами и поэтому допускают приближенное обрывание ряда (7.2), т.е. приближенное разделение коллективных и внутренних

степеней свободы ядра. Если попытаться провести параллель с квантовым числом  $K$  в разложении (7.4), которое представляет проекцию момента  $L$  в собственной (по отношению к трехмерному вращению) системе координат, то  $\psi^0$  для любой вышеперечисленной цепочки дает "проекцию момента"  $\omega$  в собственной (по отношению к  $n-1$ -мерному вращению) системе координат. Если эту аналогию продолжать дальше, то о формулах (7.4) и (7.2) можно сказать, что первая из них дает выделение зависимости коллективных функций от углов Эйлера, — при этом требуется использовать весь запас неприводимых функций на группе  $O_3^+$ , — тогда как вторая формула (7.2) дает выделение зависимость микроскопической волновой функции от внутренних переменных ядра, причем для этой цели достаточно использовать лишь ничтожную часть запаса неприводимых функций, заданных на группе  $O_{n-1}$ , а именно, набор  $O_{n-4}$  — скалярных (по отношению к левому сдвигу) функций, заданных на фактор-пространстве  $O_{n-1}/O_{n-4}$ .

Мы уже знаем, как перечислить слагаемые в (7.2) в случае канонической цепочки (7.18), а теперь рассмотрим, как найти допускаемые значения квазимоменты  $L$  и индекса его повторения  $\beta$ , задаваемые цепочкой (7.27). Задача приведения представления ортогональной группы на прямую сумму двух ее ортогональных подгрупп основанная на

разложении характеров ортогональной группы через характеры унитарной группы в удобном виде разработана Литтлвудом [14], а техника такого разложения подробно описана в [15]. Недавно эти правила были упрощены в работе [16]. Здесь разберем лишь частный случай общей формулы, полученной в [16], приспособленной для  $O_{n-4}$ -скалярного представления. Эта формула имеет следующий вид:

$$(\omega) = \sum \alpha([\omega'][\omega_0] \rightarrow [\omega]) (\omega') + \dots, \quad (7.28)$$

где  $[\omega_0] \stackrel{\omega'\omega_0}{=} [0], [2], [22], [4], \dots$ , а  $\alpha$  — коэффициенты разложения, а  $+\dots$  обозначает слагаемые, в которых нет  $O_{n-4}$  — скаляров.

Как пользоваться этой формулой? Пусть задано  $O_{n-1}$ -неприводимое представление  $(\omega)$ , например, в случае  $n = 8$  —  $O_7$  — представление (44). На маркировку этого представления будем смотреть как на таблицу Юнга [44], обозначающую соответствующее неприводимое представление унитарной группы; это обстоятельство подчеркивается переходом к квадратным скобкам в ее обозначении. Далее находим все таблицы  $[\omega']$  и  $[\omega_0]$ , внешнее произведение которых дает таблицу  $[\omega]$ . В нашем примере перечень  $[\omega']$  и  $[\omega_0]$  можно найти в таблице, приведенной в [8], стр. 275. Там имеются два столбца  $[4^2]$  (один с верхним, а другой — с нижним обозначениями) и видно, что схему  $[4^2]$  можно получить из прямых произведений  $[43][1]$ ,  $[42][2]$ ,  $[41][3]$ ,

$[32][21]$ ,  $[4][4]$ ,  $[31][31]$ ,  $[21^2][31]$ ,  $[2^2][2^2]$  и  $[51][1^2]$ . К этим произведениям еще необходимо добавить и тривиальное произведение  $[44][0]$ . Далее этот список нужно симметризовать, т.е. дополнить произведениями  $[1][43]$ ,  $[2][42]$ ,  $[3][41]$ ,  $[21][32]$ ,  $[31][21^2]$ ,  $[1^2][51]$  и  $[0][44]$ , после чего уже имеем все  $[\omega']$  и  $[\omega_0]$ , прямое произведение которых дают таблицу  $[44]$ . Нам осталось учесть то обстоятельство, что в (7.28) суммирование ведется лишь по таким  $[\omega_0]$ , в характеристику которых входят лишь четные числа. В связи с этим в списке остаются лишь прямые произведения  $[42][2]$ ,  $[4][4]$ ,  $[2^2][2^2]$ ,  $[44][0]$ ,  $[2][42]$  и  $[0][44]$  и находим, что  $[\omega']$  в (7.28) может принимать значения  $[42]$ ,  $[4]$ ,  $[2^2]$ ,  $[44]$ ,  $[2]$  и  $[0]$ . Теперь осталось учесть правила модификации, полный перечень которых для нашей задачи приведен в [8] на стр. 140. Эти правила запрещают возможность появления таблиц  $[42]$ ,  $[22]$  и  $[44]$ , поэтому (теперь опять переходим к обозначению  $(\omega')$ ) остаются лишь  $O_3$ -неприводимые представления  $(\omega') = (0)$ ,  $(2)$ ,  $(4)$ , т.е. квазиоменты  $\mathcal{L} = 0, 2, 4$ . Размерности этих представлений известны и легко находим, что для нашего примера  $\mathcal{L} = (7.2)$  содержатся 15 слагаемых; то же самое число слагаемых, очевидно, получается и с помощью канонического базиса (7.25). В этом примере индекс повторения  $\beta$  оказался несущественным, но,

например, в случае  $O_{10}$  - представления (52) появляются квазимоменты  $\mathcal{L} = 1, 2, 3, 4, 5$  причем значение  $\mathcal{L} = 3$  повторяется дважды. Пронумеровать базис квазимомента  $\mathcal{L}$  с помощью симметрических групп  $S_3$  или  $S_4$  нетрудно с помощью техники внутреннего плетизма, с которым читатель может познакомиться, например, в [8].

Анализ формулы (7.28) дает возможность указать те  $O_{n-1}$  - неприводимые представления, в которых содержится нулевой квазимомент  $\mathcal{L}$ . Общее правило таково: скалярный квазимомент допускается только такими  $O_{n-1}$  - представлениями  $\omega \equiv (\omega_1 \omega_2 \omega_3)$ , в которых либо все числа  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  - четны, либо все числа  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  - нечетны; в последнем случае обязательно  $\omega_3 \neq 0$ . Это правило наряду с таблицами  $O_{n-1}$  - представлений, допускаемых принципом Паули, позволяет легко найти все состояния с нулевым квазимоментом для ядер с  $n \leq 40$ .



## 8. Уравнение Шредингера для коллективных функций и кинематически простейшие коллективные функции ядра

1. В предыдущем разделе мы обсудили некоторые свойства кинематически простейших внутренних волновых функций ядра и, в частности, выяснили, что они характеризуются определенной орбитальной схемой Юнга  $\lambda$  и ее базисом  $\mu$ . Поэтому из них можно строить антисимметричные функции ядра. Согласно общей формуле (6.16) имеем:

$$\begin{aligned} \psi(v^0 \omega \alpha \lambda \Gamma_S S M_S | q_{n-1} Q) = \\ = \sum_{\mu} \Phi(v^0 \omega \alpha \lambda \mu | q_{n-1}) \Psi(\Gamma_S S M_S | Q) C_{\mu \tilde{\mu}}^{\lambda \tilde{\lambda} \alpha} \end{aligned} \quad (8.1)$$

В характеристике этой функции пока нет одного из важнейших интегралов движения — общего момента ядра  $J$ . Для его обеспечения умножим (8.1) на  $D_{KM}^L(G_3^+)$  и воспользуемся коэффициентами Клебша-Гордана группы  $O_3^+$ :

$$\begin{aligned} \psi(v^0 \omega \alpha \lambda K \Gamma_S (LS) J M_J | q_{n-1} G_3^+ Q) = \\ = \sum_{M M_S} \Psi(v^0 \omega \alpha \lambda \Gamma_S S M_S | q_{n-1} Q) D_{KM}^L(G_3^+) C_{M M_S M_J}^{L S J} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Функции (8.2) дают полный набор функций для переменных  $q_{n-1} G_3^+ Q$ .

Возьмем теперь произвольный трансляционно-инвариантный гамильтониан ядра

$$\mathcal{H}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-1}, Q), \quad (8.3)$$

с помощью (4.24) осуществим в нем замену переменных и усредним его на базисе функций (8.2) :

$$\int dq_{n-1} d^3 q_3^+ dQ \psi^*(\nu^0 \omega' \alpha' \lambda' k' \Gamma'_s (L' S')) \gamma_{M_j} |q_{n-1} q_3^+ Q\rangle \rho(\rho^{(s)} q_{n-1} q_3^+ Q) - \epsilon) \times \quad (8.4)$$

$$\times \psi(\nu^0 \omega \alpha \lambda k \Gamma_s (L S)) \gamma_{M_j} |q_{n-1} q_3^+ Q\rangle = 0.$$

Выражение (8.4) дает систему дифференциальных уравнений в частных производных по переменным  $\rho^{(x)}, \rho^{(y)}, \rho^{(z)}$ . Эта система характеризуется точными интегралами движения, сформулированными в условии II, поэтому она корректна в кинематическом отношении. Уравнения (8.4) являются микроскопическим аналогом уравнений Бора-Моттельсона.

Чтобы увидеть эту аналогию, необходимо от переменных  $\rho^{(x)}, \rho^{(y)}, \rho^{(z)}$  перейти к новым переменным [2] :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} [(\rho^{(x)})^2 - (\rho^{(y)})^2] &= \rho^2 \beta \sin \gamma \\ \frac{1}{2} [2(\rho^{(z)})^2 - (\rho^{(x)})^2 - (\rho^{(y)})^2] &= \rho^2 \beta \cos \gamma \\ (\rho^{(x)})^2 + (\rho^{(y)})^2 + (\rho^{(z)})^2 &= \rho^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

где  $\rho$  - глобальный радиус ядра (4.3), а  $\beta$  - и  $\gamma$  - микроскопический аналог параметров, описывающих  $\beta$ - и  $\gamma$ -колебания поверхности ядра. Макроскопический аналог переменной  $\rho$  - радиальные колебания плотности в модели Бора-Моттельсона - не рассматриваются. Легко найти связь параметров  $\beta$  - и  $\gamma$  с параметрами  $\tilde{q}$  фактор-пространства (4.20). Постановка (4.25) в (8.5) с учетом (4.23)

дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\vartheta_1)^2[(\sin\vartheta_2)^2 - (\cos\vartheta_2)^2] &= \beta \sin \gamma \\ \frac{1}{2}[2(\cos\vartheta_1)^2 - (\sin\vartheta_1)^2] &= \beta \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Система уравнений (8.4) бесконечна, но в бесконечность она "уходит" лишь по одному квантовому числу  $\omega$ . Действительно, фиксированное  $\omega$  определяет наборы  $\vartheta^0$  и  $\alpha \lambda$ . В свою очередь, каждый  $\lambda$  задает конечный набор  $\Gamma_S$  и  $S$ , а для данного  $\Gamma$  каждый  $S$  допускает конечный набор орбитальных моментов  $L$ . Поэтому реальной задачей является исследование системы (8.4) в диагональном по  $\omega$  приближении. Система еще более упрощается, если для начала довольствоваться гамильтонианом, не зависящим от спиновых и изоспиновых переменных. Такой гамильтониан реалистичен, если предположить, что схема Юнга является достаточно "хорошим" квантовым числом и рассматривать орбитальные состояния со схемами типа  $[4 \ 4 \ \dots \ 4]$ ; в случае таких схем исчезает вклад от взаимодействий, зависящих от спиновых и изоспиновых переменных.

Орбитальные схемы Юнга такого типа встречаются и в тех случаях, когда  $\vartheta^0$  в (8.4) может принимать одно значение (см. п. 4 предыдущего раздела). Все эти упрощения ведут к тому, что система (8.4) вырождается до одно-

го уравнения. Типичные примеры такого уравнения встречаются для магических ядер  $He^4$ ,  $O^{16}$  и  $C^{40}$ , в случае которых свойства уравнения (8.4) изучались в [17].

Можно отыскать и другие ядра, в случае которых исследование системы уравнений (8.4) реалистично в смысле трудностей вычислительного характера. Разумеется, существует отнюдь нетривиальная задача усреднения гамильтониана на функциях (8.2). Однако техника усреднения в настоящее время хорошо разработана [4,5] и позволяет получить систему дифференциальных уравнений (8.4) для многих ядер, содержащих до нескольких десятков нуклонов.

2. При выводе разложения (7.2) из более общего разложения (6.17) мы воспользовались требованием кинематической простоты по отношению к группе  $O_{n-1}$ , что дало возможность перейти от неопределенных внутренних волновых функций  $B_{\lambda_0, \Gamma_0 \lambda \mu}$  к полностью определенным волновым функциям (7.3). Разумеется, этот принцип можно применить и к другим группам, в частности, к группе  $O_{3(n-1)}$ . С этой целью с помощью (4.25) заменим в функциях (7.5) переменные  $\rho^{(s)}$  через  $\rho \tilde{q}$ , подействуем оператором  $T(\tilde{q}^{-1})T(\tilde{q})$  на (7.5), и, как и при выводе (6.12), развернем соответствующее тождество. Имеем:

$$\mathbb{H} \left( \begin{matrix} \Gamma_0 L K \\ \omega \nu^0 \end{matrix} \middle| \rho \tilde{q} \right) = \sum_{\Delta} \mathbb{H}(\Delta | \rho) B_{\Delta, \Gamma_0 L K \omega \nu^0}(\tilde{q}). \quad (8.7)$$

Матрицы  $B$  являются, вообще говоря, приводимыми матрицами представления группы  $O_{3(n-1)}$ , зависящими от параметров фактор-пространства (4.20). Как и в (6.17), использование новой буквы  $\Delta$  в качестве индекса суммирования означает, что строки и столбцы матрицы  $B$  можно нумеровать различными способами. Требование кинематической простоты по отношению к группе  $O_{3(n-1)}$  означает, что будем говорить лишь о таких функциях (8.7), для которых матрица  $B$  дает  $O_{3(n-1)}$ -неприводимое представление. Это значит, что набор  $\Gamma_0$  заменяется через  $\Gamma_0 \Omega \delta$ , где  $\Omega$  обозначает  $O_{3(n-1)}$ -неприводимое представление,  $\delta$  - индекс повторения  $L$  и  $\omega$  в  $\Omega$ , а  $\Gamma_0$  произвольный набор остальных характеристик. Базис  $\Delta$  занумеруем по-другому - вместо него будем писать  $\Delta \Omega' \bar{\Omega} \bar{\xi}$ , где  $\bar{\Omega} \bar{\xi} - O_{3(n-1)}$ -неприводимое представление и его базис, а  $\Delta$  - остальные квантовые числа. В полной аналогии с (7.1) имеем

$$\begin{aligned} D_{\Delta \Omega' \bar{\Omega} \bar{\xi}, \Gamma_0 \Omega \delta L K \omega \nu^0}(\tilde{q}) &= \\ &= \delta(\Delta \Gamma_0) \delta(\Omega' \Omega) D_{\bar{\Omega} \bar{\xi}, \delta L K \omega \nu^0}(\tilde{q}), \end{aligned} \quad (8.8)$$

поэтому (8.7) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \left( \begin{array}{c|c} \Gamma_0 \Omega \delta L K & \rho \tilde{q} \\ \omega \nu^0 & \end{array} \right) &= \\ &= \sum_{\bar{\Omega} \bar{\xi}} \mathbb{H} \left( \begin{array}{c|c} \Gamma_0 \Omega & \rho \\ \bar{\Omega} \bar{\xi} & \end{array} \right) D_{\bar{\Omega} \bar{\xi}, \delta L K \omega \nu^0}(\tilde{q}). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Каковы правила отбора в последней сумме по  $\bar{\Omega} \bar{\xi}$ ? Чтобы их найти, заменим в (7.4) и (7.2)  $\Gamma_0$  через  $\Gamma_0 \Omega \delta$ , подставим (8.9) в (7.4), а полученное выражение — в (7.4). Тогда можно осуществить суммирование по  $\mathcal{V}^0 K$  и в итоге получаем

$$\begin{aligned} \Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \delta L M \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \varrho \tilde{q} q_{n-1} g_3^+ \right) &= \\ &= \sum_{\bar{\Omega} \bar{\xi}} \Theta \left( \begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \\ \bar{\Omega} \bar{\xi} \end{matrix} \middle| \varrho \right) D_{\bar{\Omega} \bar{\xi}, \delta L M \omega \alpha \lambda \mu}^{\Omega} \left( \tilde{q} q_{n-1} g_3^+ \right). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Но теперь в (8.10) матричные элементы матрицы  $D^{\Omega}$  зависят от параметров  $\tilde{q} q_{n-1} g_3^+$ , набор которых эквивалентен параметрам фактор-пространства (4.2), заданного на канонической цепочке (4.10). Поэтому, не меняя индексов в (8.10), можно перейти к новым переменным  $q$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \delta L M \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \varrho q \right) &\equiv \Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \delta L M \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \varrho_1^s, \dots, \varrho_{n-1}^s \right) = \\ &= \sum_{\bar{\Omega} \bar{\xi}} \Theta \left( \begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \\ \bar{\Omega} \bar{\xi} \end{matrix} \middle| \varrho \right) D_{\bar{\Omega} \bar{\xi}, \delta L M \omega \alpha \lambda \mu}^{\Omega} (q). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Это же разложение дает замену переменных (4.1), которая осуществляется с помощью последней строки  $3(n-1)$ -мерной матрицы  $D^{(1)}$ . Матричные элементы этой строки, очевидно, не зависят от параметров  $\bar{q}$  группы  $O_{3(n-1)-1}$ , т.е. являются ее скалярными функциями. Поэтому

$$T_L(\bar{q}) \varrho_i^s = \varrho_i^s. \quad (8.12)$$

Повторяя в точности рассуждения, имевшие место при доказательстве  $O_{n-4}$ -скалярности строк матрицы  $D^{\omega}$ , полу-



чаем, что входящие в (8.11) матричные элементы матрицы  $D^{\Omega}$  являются  $O_{3(n-1)-1}$  - скалярами по отношению к оператору левого сдвига  $T_L(\bar{q})$ . Следовательно, в (8.11) есть лишь одно слагаемое с  $\bar{\Omega} = \bar{0}$ , и формулы (8.9), (8.10) и (8.11) приобретают окончательный вид

$$\Theta\left(\begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \delta L K \\ \omega \nu^{\circ} \end{matrix} \middle| \rho \tilde{q} \right) = \Theta(\Gamma_0 \Omega | \rho) D_{\bar{0}, \delta L K \omega \nu^{\circ}}^{\Omega}(\tilde{q}), \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \Psi\left(\begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \delta L M \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s \right) = \\ = (d_{\Omega})^{-1/2} \Theta(\Gamma_0 \Omega | \rho) \Phi(\Omega \delta L M \omega \alpha \lambda \mu | \tilde{q} q_{n-1} g_3^+) \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \text{и } \Psi\left(\begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \delta L M \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s \right) = \\ = (d_{\Omega})^{-1/2} \Theta(\Gamma_0 \Omega | \rho) \Phi(\Omega \delta L M \omega \alpha \lambda \mu | q). \end{aligned} \quad (8.15)$$

В двух последних выражениях  $d_{\Omega}$  - размерность представления  $\Omega$  и, кроме того, как для параметров  $\tilde{q} q_{n-1} g_3^+$ , так и для параметров  $q$  введено обозначение

$$\Phi(\Omega \delta L M \omega \alpha \lambda \mu) = (d_{\Omega})^{1/2} D_{\bar{0}, \delta L M \omega \alpha \lambda \mu}^{\Omega}. \quad (8.16)$$

3. Пора осмыслить полученные результаты. По сравнению с предыдущим разделом, где функции, зависящие от переменных  $\tilde{q}$  остались неопределенными, а также и по сравнению с п.1 настоящего раздела, где было обсуждено урав-

нение Шредингера для отыскания этих функций, в предыдущем пункте, благодаря наложенному требованию кинематической простоты по отношению к группе  $O_{3(n-1)}$ , эти функции были заменены элементами (8.16) скалярной строки матрицы  $D^{\Omega}$ . Этот результат, напоминающий связь (5.1) шаровых функций с матрицами вращения  $D^L$ , весьма типичен для теории индуцированных представлений. Нетрудно найти и другие аналогичные примеры, встречающиеся в теории специальных функций. Например, приведенные в §4 п.1 гл.1X [7] полиномы Гегенбауэра являются скалярными столбцами матрицы  $O_{\tau}^+$  - неприводимого представления. Они, разумеется, намного проще функций (8.16), которые, во-первых, составляют неприводимый базис ортогональной группы с отражением и, во-вторых, характеризуются неканоническим базисом цепочки (4.9). Последнее обстоятельство очень затрудняет их построение. Несмотря на это, в настоящее время существует детально разработанная техника расчета на базисе таких функций, и, в частности, развиты методы расчета, основанные на идее генеалогического разложения [18].

Функции (8.16) дают полный базис, зависящий от всех  $3(n-1)-1$  угловых переменных. С помощью этого базиса можно построить функции так называемого метода К-гармоник (метода гиперсферических функций) [19,20]. Сделать

это можно в точности также, как мы поступили в п.1 настоящего раздела при образовании полных внутренних функций ядра. Аналогично (8.2) построим антисимметрическую функцию

$$\Psi(\Omega \delta \omega \alpha \lambda (LS) \gamma M \gamma \Gamma_S | \tilde{q} q_{n-1} G_3^+ \text{ или } q; Q) = \quad (8.17)$$

$$= \sum_{\tilde{\mu} M M_S} \Phi(\Omega \delta L M \omega \alpha \lambda \mu | \tilde{q} q_{n-1} G_3^+ \text{ или } q) \Psi \left( \begin{matrix} \Gamma_S S M_S \\ \lambda \tilde{\mu} \end{matrix} \middle| Q \right) C_{M M_S M \gamma}^{\lambda \tilde{\mu} \alpha}.$$

Функции (8.17) и являются базисными функциями метода К-гармоник. Теперь осуществим соответствующую замену переменных в гамильтониане (8.3) и усредним его на базе функций (8.17):

$$\int (d\tilde{q} dq_{n-1} dG_3^+ \text{ или } dq) dQ \Psi^*(\Omega' \delta' \omega' \alpha' \lambda' (L'S') \gamma M \gamma \Gamma_S | \tilde{q} q_{n-1} G_3^+ \text{ или } q; Q) \times \quad (8.18)$$

$$\times (\mathcal{H}(\rho; \tilde{q} q_{n-1} G_3^+ \text{ или } q) - \mathcal{E}) \Psi(\Omega \delta \omega \alpha \lambda (LS) \gamma M \gamma \Gamma_S | \tilde{q} q_{n-1} G_3^+ \text{ или } q; Q) = 0$$

Выражение (8.18) дает бесконечную систему дифференциальных уравнений по переменной  $\rho$ , позволяющей, в принципе, найти коллективные функции  $\Theta(\mathcal{E} \Omega | \rho)$ . Эта система "уходит" в бесконечность по квантовому числу  $\Omega$ , поэтому в практических расчетах приходится ограничить возможные значения  $\Omega$ , а зачастую и другие квантовые числа и

таким образом решать оборванную систему численно или с помощью разложения ее решения по удобному базису функций, зависящих от  $\rho$ . Имеется немало работ, в которых исследуются решения "укороченной" системы (8.18), как в случае малонуклонных систем так и для магических или околomagических ядер, содержащих до нескольких десятков нуклонов. Разбор этих работ, ссылки на многие из которых можно найти в [21], не входит в нашу задачу. Здесь только укажем, что сравнительно простая техника усреднения (8.18), разработанная в наиболее алгебраическом виде в [22], позволяет легко выписать "укороченную" систему уравнений (8.18).

Мы выяснили, что система уравнений (8.18) получается из системы (8.4), если последнюю дополнительно усреднить по функциям  $D^{\mathcal{R}}(\tilde{q})$ . Поэтому в случае метода К-гармоник "замораживаются" те степени свободы ядра, которые являются микроскопическим аналогом  $\beta$ - и  $\gamma$ -колебаний коллективной модели Бора-Моттельсона. Выяснилось также сходство способа построения функций (8.16) с построением базисных функций в теории индуцированных представлений. В частности, если пользоваться набором переменных  $\tilde{q}, q_{n-1}, q_3^+$ , то интерпретация функций (8.16) как скалярной строки матрицы  $D^{\mathcal{R}}$ , сразу позволяет раскрыть их внутреннюю структуру. Действительно, разлагая

(8.16) в виде произведения матричных элементов, зависящих соответственно от  $\tilde{q}$ ,  $q_{n-1}$  и  $g_3^+$  и учитывая свойства матриц неприводимых представлений получаем:

$$\Phi(\Omega \delta_{LM} \omega \alpha \lambda \mu | \tilde{q} q_{n-1} g_3^+) = \quad (8.19)$$

$$= \sum_{\nu^0} \mathbb{H}(\Omega \delta_{LM} \omega \nu^0 | \tilde{q} g_3^+) \Phi(\nu^0 \omega \alpha \lambda \mu | q_{n-1}),$$

где последний множитель под знаком суммы — это кинематически простейшие внутренние волновые функции (7.3), а

$$\mathbb{H}(\Omega \delta_{LM} \omega \nu^0 | \tilde{q} g_3^+) = \sum_K \left( \frac{d_{\Omega}}{d\omega} \right) D_{0, \delta_{LK} \omega \nu^0}^{\Omega}(\tilde{q}) D_{KM}^L(g_3^+) \quad (8.20)$$

— кинематически простейшая коллективная ( по переменным  $\tilde{q} g_3^+$  ) функция ядра.

4. Неопределенными у нас остались еще функции, зависящие от переменной  $\varrho$  и последнее, что мы можем сделать — это наложить на них требование кинематической простоты по отношению к подходящей непрерывной группе. В качестве такой группы выберем унитарную группу  $U_{3(n-1)}$ , которая как уже отмечалось в п.4 предыдущего раздела, является универсальной среди компактных групп. Эта универсальность, однако, приносит и дополнительные заботы, так как в случае унитарных групп необходимо четко определить "объект" их преобразования (см. п.6 пятого раздела). В ко-

нечном итоге это задает и конкретный вид функций, зависящих от переменной  $\varrho$ .

Можно пока не вдаваться в эти детали, так как нам уже известны неприводимые характеристики этих функций, которые задает закон сохранения сорта и числа частиц. Речь об этом шла в п.4 седьмого раздела, где выяснилось, что простейшие коллективные функции  $\mathbb{H}(\varrho)$  — это базисные функции  $U_{3(n-1)}$  — представления  $[E]$ . Правила приведения  $[E]$  на цепочке  $U_{3(n-1)} \supset O_{3(n-1)}$  очень просты: в  $E$  содержится  $\Omega = E, E-2, \dots, 1$  или  $0$ . Поэтому  $\Gamma_0$  в (8.13) имеет смысл  $E$ , а кинематически простейшими коллективными функциями  $\mathbb{H}(\varrho)$  являются функции

$$\mathbb{H}(E\Omega|\varrho). \quad (8.21)$$

Когда "объектами" преобразования группы  $U_{3(n-1)}$  являются операторы рождения и уничтожения осцилляторных квантов, тогда

$$(d_\Omega)^{-1/2} \mathbb{H}(E\Omega|\varrho) = R_{E\Omega}(\varrho), \quad (8.22)$$

где  $R$  — радиальная функция  $3(n-1)$ -мерного гармонического осциллятора.

Выбор  $\mathbb{H}(\varrho)$  в виде радиальной осцилляторной функции принципиально ограничивает рассматриваемое пространство функций функциями дискретного спектра. Действительно, как это неоднократно отмечалось в работах по методу К—



гармоник, функции (8.16) дают полный базис по угловым переменным, пригодный для исследования как связанных состояний так и состояний непрерывного спектра. Фрагмент ядра — нуклон или некоторая нуклонная ассоциация в "направлении", задаваемом  $3(\eta-1)-1$  углами, всегда может "ускользнуть" в бесконечность по переменной  $\varrho$ . Технически это можно оформить, генеалогически перелазгая (8.16) таким образом [18], чтобы эта функция была подготовлена для отцепления интересующего нас фрагмента ядра. Выбор  $\mathbb{H}(\varrho)$  в виде (8.22), строго говоря, закрывает каналы всех процессов, требующих учета свойств непрерывного спектра и оставляет возможность изучать лишь связанные состояния.

Если ограничиться лишь задачами на связанных состояниях то формулы (8.20) и (8.22) показывают, что в качестве кинематически простейших коллективных функций можно выбрать функции

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(E \Omega \delta L M \omega \nu^0 | \varrho \tilde{q} g_3^+) &= \\ &= R_{E \Omega}(\varrho) \sum_K \left( \frac{d\Omega}{d\omega} \right)^{1/2} D_{\tilde{0}, \delta L K \omega \nu^0}^{\Omega}(\tilde{q}) D_{KM}^L(g_3^+). \end{aligned} \quad (8.23)$$

При построении (8.23) пошла по максимально компактному пути (см. замечания после формулы (2.18)). Если же воспользоваться цепочкой (7.19), то будем иметь дело с переменными  $\varrho^{(s)}$ , и коллективная функция будет

выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \textcircled{H} \left( \begin{array}{c} E[E_1 E_2 E_3] \gamma^{LM} \\ \beta \omega \nu^0 \end{array} \middle| \rho^{(s)} g_3^+ \right) = \\ = \sum_K \textcircled{H} \left( \begin{array}{c} E[E_1 E_2 E_3] \gamma^{LK} \\ \beta \omega \nu^0 \end{array} \middle| \rho^{(s)} \right) D_{KM}^L(g_3^+), \end{aligned} \quad (8.24)$$

где  $\beta \omega \nu$  - индексы повторения  $\omega$  и  $L$  на цепочках  $U_{n-1} \supset O_{n-1}$  и  $U_3 \supset O_3^+$ . Преобразование базисов, задаваемых квантовыми числами функций (8.23) и (8.24) осуществляется с помощью матрицы  $M_{\Omega \delta, \beta [E_1 E_2 E_3] \alpha}$ , с матричными элементами 23

$$M_{\Omega \delta, \beta [E_1 E_2 E_3] \alpha} (E \omega L). \quad (8.25)$$

Во многих случаях эта матрица является единичной, поэтому, имея, например (8.24), путем замены переменных (4.25) легко получить и функции (8.23). Два способа конструирования функций (8.24) приведены в [4,6].

Прежде чем закончить описание простейших кинематически корректных волновых функций ядра, обратим внимание на то обстоятельство, что эти функции теперь стали полностью определенными, и поэтому появилась свобода выбора их переменных. Если мы не собираемся решать динамическую задачу по коллективным переменным, а хотим пользо-

ваться лишь простейшими функциями, то отпадает необходимость представить их в виде суммы произведения коллективных и внутренних функций. Намного проще отказаться от использования коллективных и внутренних переменных ядра, которые теперь стали необязательными и возвратиться к исходным переменным – координатам Якоби (2.1). Тогда имеем либо функции

$$\psi \left( \begin{matrix} E \Omega \delta L M \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s \right), \quad (8.26)$$

квантовые числа которых задаются цепочкой

$$U_{3(n-1)} \supset O_{3(n-1)} \supset O_3^+ \times \begin{matrix} O_{n-1} \\ U \\ S_n \end{matrix}, \quad (8.27)$$

либо функции

$$\psi \left( \begin{matrix} E [E_1 E_2 E_3] \gamma L M \\ \beta \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s \right); \quad (8.28)$$

квантовые числа которых задаются цепочкой

$$U_{3(n-1)} \supset \begin{matrix} U_3 \times U_{n-1} \\ U \quad U \\ O_3^+ \quad O_{n-1} \\ U \\ S_n \end{matrix}. \quad (8.29)$$

Антисимметрическая функция ядра строится из (8.26) и (8.28) с помощью (6.16). В первом случае – это функция

$$\psi \left( \begin{matrix} E \Omega \delta (L S) \gamma M \gamma \Gamma_s \\ \omega \alpha \lambda \end{matrix} \middle| \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s; Q \right), \quad (8.30)$$

а во втором – функция

$$\psi \left( \begin{array}{c} E[E_1 E_2 E_3] \gamma(LS) \gamma M \gamma \Gamma_S \\ \beta \omega \alpha \lambda \end{array} \middle| \begin{array}{c} S \\ \rho_1, \dots, \rho_{n-1}, q \end{array} \right) \quad (8.31)$$

Функции (8.30) и (8.31) могут быть названы функциями схемы  $U_{3(n-1)}$ , а чтобы их различать, первую из них называем функцией ортогональной схемы, а вторую – функцией унитарной схемы. Существует подробно разработанная техника расчёта с такими функциями [8,18], основанная на генеалогическом разложении, или на еще более экономном методе разложения матрицы плотности через групповые операторы. Эта техника дает возможность усреднить физические операторы на базисе функций схемы  $U_{3(n-1)}$  и тем самым их использовать для изучения свойств связанных состояний ядер. На основе этих методов в [4-6,22] разработана и техника вывода уравнений (8.4) и (8.18), позволяющая заменить невыполнимую задачу построения базисных функций (8.2) и (8.17), намного более простой задачей вычисления компонент соответствующей матрицы плотности.

## 9. Заключение

1. От старта – совершенно произвольных функций (2.2) до финиша – совершенно конкретных внутренних (7.3) и коллективных (8.23) и (8.24) функций или функций (8.30) и (8.31) схемы  $U_{3(n-1)}$  мы прошли долгий и нелегкий путь, эксплуатируя I и II требования кинематической корректности с помощью алгебраического аппарата теории индуцированных представлений групп Ли. Этот аппарат в частности позволил сформулировать требование кинематической простоты, которое (наряду с техническим вопросом – отделением пространственных от спиноизоспиновых функций с помощью супермультиплетной схемы) в необозримом многообразии различных возможностей указал нам единственно правильную дорогу, ведущую к наиболее простым кинематически корректным волновым функциям ядра.

Последнее утверждение требует уточнения. Откуда нам известно, что эти функции действительно являются наиболее простыми? Это нам гарантирует теория групп Ли. В п.1 седьмого раздела уже говорилось, что кинематическая простота, по существу, означает неприводимость по отношению к преобразованиям некоторой непрерывной группы. Простейшие среди групп Ли – это компактные группы. Они классифицированы, т.е. известен их полный список, подобно, например, списку точечных или пространственных групп, исполь-

зуемых в теории молекул и кристаллов. Более того, известны цепочки, позволяющие подняться от компактной группы по "максимально плотной" цепочке, т.е. такой цепочке, в которой, между группой и ее подгруппой для всех нельзя вставить еще какую-нибудь непрерывную группу. Слова "для всех" означают, что речь идет о теории, универсальной для любого  $n$ , т.е. для ядра, состоящего из любого числа нуклонов. Поэтому здесь не принимаются во внимание те случайные возможности подбора других цепочек, которые в виде исключения могут появиться для некоторых обычно небольших,  $n$ .

Плотное вложение группы  $S_n$  в группу  $O_{n-1}$  было использовано в четвертом разделе при доказательстве сформулированных в нем теорем. Это дало нам гарантию того, что группа  $O_{n-1}$  наиболее проста из всех подходящих групп и позволило найти внутренние функции ядра (7.9). В наших лекциях, хотя это специально и не акцентировалось, мы также воспользовались свойством наиболее плотного вложения в предыдущем разделе, при переходе от подгруппы  $O_3^+ \times O_{n-1}$  к группе  $O_{3(n-1)}$  и далее от подгруппы  $O_{3(n-1)}$  к группе  $U_{3(n-1)}$ ; здесь правда, имеется некоторая неоднозначность, ввиду того, что существует и другой путь - переход от подгруппы  $O_3^+ \times O_{n-1}$  к группе  $U_3 \times U_{n-1}$  и затем - к группе  $U_{3(n-1)}$ . Однако эта неоднозначность несущественна, так как базисы,



задаваемые подгруппами обеих цепочек из-за преобразования (8.25), являются унитарно-эквивалентными. Поэтому мы фактически доказали, что функции (8.30) или (8.31) действительно являются самыми простыми из всех возможных функций. Сформулируем это утверждение в виде следующей теоремы.

Теорема. В классе кинематически корректных волновых функций, простейшими (для всех  $n$ ) являются функции схемы  $U_{3(n-1)}$ .

Практическую пользу этой теоремы легко понять, если вспомнить, что для отыскания решений многих типов дифференциальных уравнений, описывающих те или иные физические процессы, как правило, удается подобрать естественную систему базисных функций. Например, для периодических процессов — это экспоненты (когда несущественна операция отражения) или синусы и косинусы (когда разлагаемые функции характеризуются определенной четностью), для задач рассеяния в сферически-симметричном поле — это произведение функций Бесселя и шаровых функций, для разложения векторных полей — это векторные сферические гармоники. Все эти функции являются неприводимыми (по нашей терминологии — “кинематически простейшими”) базисами соответствующих групп: группы  $O_2^+$  (если нет отражения) или  $O_2$  (с отражением) — в случае рядов Фурье, гру-

пы движения трехмерного пространства, приведенной на ее максимальной компактной подгруппе  $O_3^+$  - в случае задачи рассеяния и, наконец, неприводимым базисом, образованным с помощью коэффициентов Клебша-Гордана из прямого произведения шаровых функций и ортов, - для разложения векторных полей. Вышесформулированная теорема показывает, что для связанных состояний трансляционно-инвариантного гамильтониана ядра таким естественным базисом являются функции схемы  $U_{3(n-1)}$ . Как всегда, вопросы сходимости разложений по таким базисам остаются открытыми.

2. Из-за высокого ранга унитарной группы базис схемы  $U_{3(n-1)}$  является очень сложным, поэтому сколько-нибудь удовлетворительное разложение по нему решений уравнения Шредингера можно осуществлять лишь для малонуклонных систем. В случае же ядер, содержащих несколько десятков нуклонов, размерность базиса растет с ужасающей быстротой. Если для  $n < 16$ , а также около массовых чисел  $n = 16$ ,  $n = 40$  и  $n = 80$  число компонент функций (8.30) и (8.31) с данным  $E$  еще поддается контролю, то, например, при  $n \sim 30$ , а тем более при  $n \sim 60$  для самого простого допускаемого принципом Паули значения  $E = E_{\min}$  это число составляет сотни и тысячи. В этом нет ничего удивительного, потому, что разло-

жение по такому набору функций эквивалентно решению многочастичного уравнения Шредингера и нетрудно представить себе, насколько эта задача сложна.

Из сказанного становится ясным, что практические расчеты могут быть осуществлены лишь на ограниченном базисе, а это означает, что состояниям, обрывающим разложение, придается смысл приближенных квантовых чисел. Если хотим сохранить алгебраическую структуру неприводимого базиса группы  $U_{3(n-1)}$ , то первое, что можно сделать — это ограничиться одним слагаемым по  $E$ , то-есть в расчётах не учитывать недиагональных по  $E$  матричных элементов. Тогда матрица полного гамильтониана ядра разбивается на блоки, и тем самым состояния сортируются по квантовому числу  $E$ .

Допущение, что  $E$  является квантовым числом, приписываемым на опыте наблюдаемым состоянием ядра, означает отказ от практически неосуществимой попытки точно решить ядерную задачу многих тел и переход на более скромную, но зато реальную задачу изучения свойств ядер в неограниченном подпространстве многочастичного пространства Гильберта. Такое приближение равносильно введению модели ядра: по определению, упрощенную картину строения ядра, задаваемую базисными функциями  $U_{3(n-1)}$  — неприводимого представления  $E$ , будем называть моделью схемы

$U_{3(n-1)}$ . В отличие от крайних ядерных моделей и их модификаций, которые обсуждались в первом разделе, схема

$U_{3(n-1)}$  дает кинематически корректную модель ядра.

Законно спросить, насколько конструктивен этот результат? Нетривиальна ли эта модель, не дает ли она слишком примитивную картину строения ядра? Какова эта картина?

3. Для раскрытия физического смысла модели схемы  $U_{3(n-1)}$  необходимо реализовать пространственную часть функций (8.30) или (8.31) через функции определенного гамильтониана, который будем называть модельным гамильтонианом ядра. Известно, что характеристики неприводимых представлений задаются собственными значениями набора операторов Казимира; по отношению к группе  $U_{3(n-1)}$  модельные функции ядра характеризуются лишь одним квантовым числом  $E$ , поэтому достаточно решить уравнения на собственные значения для первого оператора Казимира группы

$U_{3(n-1)}$ . Вид этого оператора зависит от способа реализации "объектов" преобразования (см. п.4 восьмого раздела). Нельзя также забывать о том что каждое преобразование пространства, в котором действует унитарная группа, индуцирует преобразование сопряженного с ним пространства, в котором действует так называемое контраградиентное представление унитарной группы (см. напр. 8). Это представление,

обычно обозначаемое как  $D^{[0\dots 0-1]} \equiv D^{[-1]}$  неэквивалентно исходному представлению  $D^{[10\dots 0]} \equiv D^{[1]}$ , поэтому необходимо задать две системы "объектов" преобразования, — одну в пространстве  $[1]$ , а другую — в пространстве  $[-1]$ .

Пусть, например, "объектами" преобразования в пространстве представления  $D^{[1]}$  группы  $U_{3(n-1)}$  будут компоненты векторов Якоби  $\rho_i^s$ , а в сопряженном с ним пространстве представления  $D^{[-1]}$  — производные  $\frac{\partial}{\partial \rho_i^s}$ . Легко проверить, что прямое произведение этих "объектов"

$$\rho_i^{s'} \frac{\partial}{\partial \rho_i^s} \quad (9.1)$$

дает  $(3(n-1))^2$  операторы, которые являются инфинитезимальными операторами группы  $U_{3(n-1)}$ . Первый оператор Казимира для этих инфинитезимальных операторов, очевидно, имеет вид

$$\sum_{i,s} \rho_i^s \frac{\partial}{\partial \rho_i^s} \quad (9.2)$$

Теперь видно, что нами неудачно выбраны "объекты" преобразования, — уж слишком оператор (9.2) непохож на гамильтониан, хотя бы из-за того, что в него входят лишь первые производные. Попробуем поднять порядок уравнения для первого оператора Казимира. С этой целью возьмем импульс

$$-i \frac{\partial}{\partial \rho_i^s} \quad (9.3)$$

соответствующий координате  $\rho_i^s$ , и введем картановскую

комбинацию координат и импульсов:

$$\left. \begin{aligned} \eta_i^s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \rho_i^s - i \left( -i \frac{\partial}{\partial \rho_i^s} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \rho_i^s - \frac{\partial}{\partial \rho_i^s} \right) \\ \eta_i^{+s} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \rho_i^s + i \left( -i \frac{\partial}{\partial \rho_i^s} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \rho_i^s + \frac{\partial}{\partial \rho_i^s} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Это — бозеевские операторы рождения и уничтожения. Пусть теперь  $\eta_i^s$  и  $\eta_i^{+s}$  преобразуются по  $U_{3(n-1)}$  — неприводимым представлениям [1] и [-1] соответственно. Тогда алгебра унитарной группы задается инфинитезимальными операторами

$$\eta_i^s, \eta_i^{+s}, \quad (9.5)$$

которым соответствует первый оператор Казимира

$$H_0 = \sum_{iS} \eta_i^s \eta_i^{+s} \quad (9.6)$$

Оператор  $H_0$  уже нам подходит. Действительно, если в (9.6) возвратиться к переменным  $\rho_i^s$ , то легко проверить, что  $H_0$  принимает следующий вид:

$$H_0 + \frac{1}{2} 3(n-1) = -\frac{1}{2} \sum_{iS} \left( \frac{\partial^2}{(\partial \rho_i^s)^2} - (\rho_i^s)^2 \right). \quad (9.7)$$

Этот оператор является гамильтонианом  $3(n-1)$ -мерного изотопного осциллятора, записанного в безразмерных единицах. Собственное значение оператора  $H_0$  равно  $E$ .



При желании в (9.7) можно ввести параметр осцилляторной частоты.

Только что полученная реализация оператора Казимира группы  $U_{3(n-1)}$  позволяет заключить, что волновую функцию унитарной схемы можно интерпретировать как функцию, пространственная часть которой построена из функций  $3(n-1)$ -мерного изотропного гармонического осциллятора. Другими словами, пространственная картина движения нуклонов отображается ансамблем потенциально невзаимодействующих квазичастиц. Подчеркиваем, — и это весьма существенно, — что именно квазичастиц, а не частиц, причём под квазичастицами здесь подразумевается нуклонные образования, описываемые координатами Якоби.

Независимые квазичастицы могут возникнуть и в системе сильно связанных частиц. Классическим примером таких систем является кристалл; движение локализованных, прикрепленных к своим местам атомов в идеальной кристаллической решетке в гармоническом приближении описывается системой независимых квазичастиц — фононов. С помощью этой аналогии мы приходим к заключению, что простейшая корректная модель атомного ядра в какой-то мере напоминает кристалл, правда, весьма своеобразный. Этот "кристалл" изотропен, имеет конечные размеры и необязательно сферически симметричную форму. Далее, реальные частицы — нук-

лоны, из которых он образован, не прикреплены в определенных узлах, а совершают замысловатые движения, описываемые переменными Якоби. Функция схемы  $U_{3(n-1)}$ , очевидно, может быть записана как линейная комбинация следующих функций, построенных с помощью бозеевских операторов:

$$(\varepsilon_1^x! \varepsilon_1^y! \dots \varepsilon_{n-1}^y! \varepsilon_{n-1}^z!)^{-1/2} (\eta_1^x)^{\varepsilon_1^x} (\eta_1^y)^{\varepsilon_1^y} \dots (\eta_{n-1}^y)^{\varepsilon_{n-1}^y} (\eta_{n-1}^z)^{\varepsilon_{n-1}^z} |0\rangle, \quad (9.8)$$

где  $\varepsilon_1^x + \varepsilon_1^y + \dots + \varepsilon_{n-1}^y + \varepsilon_{n-1}^z = E$ , а  $|0\rangle$  — осцилляционный вакуум

$$|0\rangle = \left( \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2} 3(n-1))} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \rho^2}. \quad (9.9)$$

Поэтому ядро является бозеевской системой по квазичастицам, что не мешает ему быть фермиевской системой по нуклонам (или протонам и нейтронам). Фермиевские свойства в бозеевских операторах "скрыты" в структуре переменных  $\vec{\rho}_i$ , составленных по формуле (2.1), из исходных переменных  $\vec{z}_i$ ; мы помним, что перестановочные свойства обеспечиваются вложением подгруппы  $S_n$  в группу  $O_{n-1}$ .

"Кристаллическая" структура ядра не предполагает отсутствия в нулевом приближении взаимодействия между нуклонами, не утверждает, что нуклоны в ядре двигаются почти независимо. Наоборот, подобно атомам в кристаллической решетке, уже в нулевом приближении нуклонам разрешает-

ся взаимодействовать, даже сильно взаимодействовать в случае большой осцилляторной частоты; важно лишь чтобы это взаимодействие привело к системе потенциально не взаимодействующих квазичастиц.

Здесь необходимо пояснить, почему говоря о системе, описываемой нулевым модельным гамильтонианом  $H_0$ , вместо общепринятого термина "невзаимодействующие квазичастицы" мы пишем "потенциально не взаимодействующие квазичастицы". При построении пространственной функции схемы  $U_{3(n-1)}$  из собственных функций гамильтониана (9.7), действительно, исходим из произведения функций независимых квазичастиц, но затем, из-за необходимости обеспечить интегралы движения, берем линейные комбинации функций этого базиса. В итоге функция всей системы уже не является произведением функций ее соответствующих частиц, а это и означает, что частицы системы "чувствуют" друг друга, т.е. как-то взаимодействуют между собой. Это "кинематическое" взаимодействие, которое учитывается при построении функции схемы  $U_{3(n-1)}$ , не является потенциальным взаимодействием, поэтому мы и говорим о системе потенциально не взаимодействующих квазичастиц. Не следует переуменьшать роль "кинематического" взаимодействия, так как оно является весьма важным и сравнимым с потенциальным взаимодействием.

Возвращаясь к функциям схемы  $U_{3(n-1)}$  еще можно сказать, что вышеприведенная ее интерпретация не является единственной, и это обуславливается хорошо известным фактом, что трансформационные свойства однозначно не восстанавливают явного вида функций. Имеется "вырождение по интерпретации", и это обстоятельство в какой-то мере объясняет наличие противоречивых взглядов на структуру ядра, о которой шла речь в первом разделе настоящих лекций при обсуждении крайних ядерных моделей.

4. Действительно, способна ли модель схемы  $U_{3(n-1)}$  объяснить противоречия между концепциями сильно коллективизированного и почти свободного движения нуклонов в ядре? Мы уже знаем, что с помощью разложения (7.2), где  $\textcircled{H}$  имеет вид (8.23) или (8.24), в волновой функции схемы  $U_{3(n-1)}$  можно раскрыть ее коллективную и внутреннюю структуру. Оказывается, что существует разложение и другого типа, позволяющее представить функцию схемы  $U_{3(n-1)}$  в виде, раскрывающим ее оболочечные свойства. Такое разложение, очевидно возможно лишь в однонуклонных переменных  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ , набор которых эквивалентен векторам Якоби  $\vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_{n-1}$ , если к ним еще добавить и переменную  $\vec{\rho}_0$  (4.7), описывающую движение центра масс ядра. Поэтому первое, что надо сделать — это дополнить функцию схемы  $U_{3(n-1)}$  переменной  $\vec{\rho}_0$ .

Чтобы понять, как осуществить это дополнение, преобразуем модельный гамильтониан (9.7) к переменным

$\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$ . Имеем

$$H_0 + \frac{1}{2} 3(n-1) = -\frac{1}{2n} \sum_{i < j=1}^n [(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2 - (\vec{z}_i - \vec{z}_j)^2], \quad (9.10)$$

где  $\vec{p}_i$  — одночастичные импульсы. Придадим этому оператору одночастичный вид:

$$H_0 + \frac{1}{2} 3(n-1) + H_{ц.м.} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \sum_i [(\vec{p}_i)^2 - (\vec{z}_i)^2], \quad (9.11)$$

где

$$H_{ц.м.} = \sum_s \eta_0^s \eta_0^{+s} \quad (9.12)$$

— осцилляторный гамильтониан движения центра масс ядра. Правая сторона выражения (9.11) является модельным гамильтонианом оболочечной модели ядра; здесь имеются в виду осцилляторные оболочки. Оболочечный гамильтониан равен сумме  $H_0$  и  $H_{ц.м.}$ , а это физически означает, что оболочечную картину ядра можно ввести лишь помещая ядро в яму, которая, очевидно, не может быть создана межнуклонным взаимодействием (см. п.3 первого раздела). При замене свободного движения центра масс ядра связанным осцилляторным состоянием теряется

трансляционная инвариантность задачи, т.е. нарушаются требования кинематической корректности, и лишь этой ценою можно ввести оболочечную картину строения ядра. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. Оболочечная модель ядра несовместима с требованиями кинематической корректности.

Это утверждение, в несколько иной форме впервые сформулированное в [8], означает, что, строго говоря, оболочечные представления о структуре ядра неправильны, т.е. что в ядре не может существовать потенциально не взаимодействующих частиц. Из сказанного также понятна бессмысленность иногда используемого термина "трансляционно-инвариантная оболочечная" модель ядра.

5. Как же все-таки быть? Разве все разговоры об одночастичных уровнях, внешних нуклонах, одночастичных переходах и т.п. не имеют ничего общего с реальностью? Неужели оболочечная картина строения ядра погибла без следа. Если говорить по существу, то да, но с точки зрения вычислительной стороны дела можно сказать следующее: бывают случаи, когда расчёты на базисе оболочечных функций дают аналогичные результаты, что и на базисе функций схемы  $U_{3(n-1)}$  (см. п. 3 первого раздела), и это позволяет понять, почему иногда оболочечная картина строения ядра состоятельна.



Эти случаи можно найти, разлагая, функцию схемы  $U_{3(n-1)}$  через оболочечные функции. Мы уже знаем, что так можно разлагать лишь функцию схемы  $U_{3(n-1)}$ , умноженную на осцилляторную функцию, описывающую движение центра масс ядра. Зафиксируем самое простое, вакуумное, состояние центра масс ядра, и напишем такое разложение:

$$\left(\frac{2}{\pi \binom{3}{2}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\rho_0^2} \psi(E\nu | \vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_{n-1}, Q) = \sum_{\mathcal{K}} \psi(E\mathcal{K} | \vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n; Q).$$

(9.13)

Здесь  $\mathcal{U}$  обозначает базис унитарной или ортогональной схемы, а  $\mathcal{K}$  - все квантовые числа оболочечных конфигураций. Конкретный вид набора квантовых чисел  $\mathcal{K}$  зависит от смысла, вкладываемого в понятие конфигурации. Можно говорить о  $O_3^+$  - конфигурациях, задаваемых квантовыми числами орбитальных моментов нуклонов. Тогда радиальные функции остаются произвольными и, в частности, как и в теории атомных спектров, они могут быть найдены как решения уравнения Хартри-Фока. Можно говорить и о  $SU_3$  - конфигурациях (модель Эллиота), задаваемых спинтлляторными энергиями нуклонов. Тогда

радиальные функции являются осцилляторными радиальными функциями.

Ради определенности будем считать, что  $\nu$  в (9.13) обозначает квантовые числа унитарной схемы, а  $\mathcal{K}$  - квантовые числа  $SU_3$  конфигураций, и зададим себе вопрос когда в (9.13) есть лишь одно слагаемое. Чтобы найти число слагаемых в (9.13), необходимо перечислить все  $SU_3$  -конфигурации с общим числом квантов  $E$ . Рассмотрим сначала случай наименьших разрешаемых принципом Паули  $E = E_{min}$ . Оказывается (подробности см. в [8]), что тогда возможна лишь одна  $SU_3$  -конфигурация, поэтому при  $E = E_{min}$  для любых  $n$  в разложении (9.13) имеется только одно слагаемое. Это и есть те случаи, когда движение потенциально невзаимодействующих квазичастиц из-за внешней осцилляторной ямы перестраивается в движение потенциально не взаимодействующих частиц.  $SU_3$  -конфигурацию далее можно разлагать через  $O_3^+$  - конфигурации. Случается, что в этом разложении также содержится только одно слагаемое (это всегда имеет место в случае  $n \leq 16$ ) и тогда, пользуясь общепринятой терминологией можно сказать, что нуклоны двигаются по сферическим орбитам; эти случаи и соответствуют классической оболочечной модели ядра.

Для состояний  $E = E_{min} + 1$  схемы  $U_{3(n-1)}$ ,

в разложении (9.13), вообще говоря, имеются два слагаемых, для  $E = E_{min} + 2$  - четыре слагаемых (подробности см. в [8]), и т.п. Поэтому при  $E > E_{min}$  движении квазичастиц, как правило, уже не может перестроиться в движение частиц. Тем не менее, бывают случаи, когда часть коэффициентов разложения (9.13) по разным причинам становится равной нулю, и опять остается лишь одна

$SU_3$  - конфигурация, которая изредка вырождается до одной  $O_3^+$  - конфигурации. Иными словами, даже в случае  $E > E_{min}$  иногда встречаются  $U_{3(n-1)}$  - состояния, которые в общей осцилляторной яме не могут перестраиваться в состояния оболочечного типа; подробный анализ таких состояний в случае  $E = E_{min} + 1$  для  $6 \leq n \leq 16$  можно найти в работе [24].

Резюмируя можно сказать, что схема  $U_{3(n-1)}$  в виде исключения допускает состояние в упомянутом смысле оболочечного типа. Однако при переходе от  $E = E_{min}$  к  $E > E_{min}$ , а также от легких ядер к более тяжелым такие состояния встречаются все реже и реже, вследствие чего для многих состояний схемы  $U_{3(n-1)}$  "кристаллическая" структура атомного ядра с помощью внешней потенциальной ямы не может быть перестроена в оболочечную структуру.

6. Подведем итоги. Из кинематических свойств гамильтониана ядра удастся получить в явном виде все групповые характеристики модельных функций, и с их помощью можно дать в определенную физическую картину движения нуклонов в ядре. Нельзя утверждать, что эта картина точно соответствует действительности, — атомное ядро слишком уж сложный объект, чтобы можно было надеяться понять его структуру с помощью наглядных представлений. Однако, можно утверждать, — это доказано, — что она является простейшей из всех возможных картин. Иными словами, мы нашли модель, которая, несмотря на свою простоту, содержит в себе одночастичные, коллективные, а также и промежуточные аспекты движения нуклонов в ядре. Работая с волновыми функциями, заданиями в координатном представлении, мы должны начать изучение свойств атомных ядер с модели схемы

$U_{3(n-1)}$  ; эту модель можно усложнять и тем самым усовершенствовать, однако, она не может быть упрощена без нарушения общих кинематических принципов.

## Л и т е р а т у р а

- [1] Дзюблик А.Я., Препринт ИТФ-71-122Р.
- [2] Дзюблик А.Я., Овчаренко В.И., Стешенко А.И., Филлипов Г.Ф., Препринт ИТФ-71-134р., Я.Ф., 15, 869 (1972).
- [3] Zickendraht W., *J. Math. Phys.*, 12, 1663 (1971).
- [4] Ванагас В.В., Калинаускас Р.К., Я.Ф., 18, 768 (1973).
- [5] Калинаускас Р.К., Ванагас В.В., Литовск.Физ.Сб., 14, № 3 (1974).
- [6] Ванагас В.В., Калинаускас Р.К., Литовск.Физ.Сб., 14, № 4 (1974).
- [7] Виленкин Н.Я., Специальные функции и теория представлений групп, "Наука", 1965.
- [8] Ванагас В.В., Алгебраические методы в теории ядра, и-во "Минтис", Вильнюс, 1971.
- [9] Гельфанд И.М., Наймарк М.А., Труды Матем.ин-та АН СССР, XXXV1, изд. АН СССР, 1950.
- [10] Желобенко А.П., Компактные группы Ли и их представления, "Наука", 1970.
- [11] Bohr A., *Rotational States of Atomic Nuclei*, Copenhagen, 1954. (имеется перевод в сб. "Проблемы Современной физики", вып. 1, 5 (1956)).
- [12] Eisenbud L., Wigner E., *Nuclear Structure*, Univ. Press, 1958. (Имеется перевод: Айзенбуд Л., Вигнер Е., Структура ядра, ИИЛ, Москва, 1959).
- [13] Смирнов Ю.Ф., Шитикова К.В., Орлова Н.В., Вестн. МГУ, 14, 553 (1973).
- [14] Littlewood D.E., *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, 2-nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1958.

- [15] Wybourne B., *Symmetry Principles and Atomic Spectroscopy*, Wiley-Interscience, N.-Y. - L. - Syd. - Tor., 1970.

(Имеется перевод: Джадд Б., Вайборн Б., Теория сложных атомных спектров, "Мир", 1973).

- [16] Алишаускас С., Литовск.Физ.Сб., 14, № 5 (1974).  
 [17] Филиппов Г.Ф., Стешенко А.И., Препринт ИТФ-73-91Р, Киев (1973).  
 [18] Ванагас В., Калинаускас Р., Литовск.Физ.Сб., 12, 217 (1972).  
 [19] Бадалян А.М., Симонов Ю.А., Я.Ф., 3, 1032 (1966).  
 [20] Симонов Ю.А., Я.Ф., 7, 1210 (1968).  
 [21] Galogero F., Simonov Yu. A., Surkov E. L., *Nuovo Cimento*, 1A, 739 (1971).  
 [22] Петраускас А.К., Янкаускас К.И., Ванагас В.В., Я.Ф., 14, 724 (1971).  
 [23] Ванагас В.В., Теория низколежащих ядерных состояний в схеме  $U_{3(n-1)}$ , в сб. "Проблемы современной ядерной физики", "Наука" (1971).  
 [24] Калинаускас Р.К., Ванагас В.В., Литовск.Физ.Сб., 11, 581 (1971).



## О г л а в л е н и е

	стр.
Предисловие .....	5
1. Определение кинематически корректных волно- вых функций ядра и критический взгляд на край- ние ядерные модели .....	6
2. Общая постановка задачи замены переменных и алгебраический смысл простейших примеров ...	19
3. Параметризация ортогональных групп и замена переменных в многомерных пространствах .....	33
4. Коллективные и внутренние переменные ядра ...	44
5. Элементы теории индуцированных представ- лений .....	62
6. Общий метод проецирования коллективных и внут- ренних волновых функций ядра .....	80
7. Кинематически простейшие внутренние волновые функции ядра .....	92
8. Уравнение Шредингера для коллективных функ- ций и кинематически простейшие коллективные функции ядра .....	113
9. Заключение .....	129
Л и т е р а т у р а .....	147

150

ДЛЯ ЗАМЕТОК



Л 50272. Подл. к печати 12/У-74 г. Цена 50 к.

Заказ 557. Тираж 250.

Типография МИФИ, Каширское шоссе, дом 1.